

Zadaća 5

1. Odredite za koji parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ je sustav

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ \lambda x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -2 + \lambda, \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Cramerov, te ga u tom slučaju riješite Cramerovom metodom.

2. Odredite pomoću adjunkte inverz sljedeće matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$A(x_1, x_2, x_3) = (-7x_1 - 9x_2 + 9x_3, 6x_1 + 8x_2 - 6x_3, 3x_1 + 3x_2 - 1x_3).$$

Odredite spektar operatora A , te svojstvene vektore. Može li se ovaj operator dijagonalizirati? Ukoliko može, u kojoj bazi?

4. Sljedeći linearni operatori na $\mathbb{R}^3$ zadani su svojim matičnim zapisom u kanonskoj bazi:

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} -4 & -9/2 & 0 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3/2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } Y = \begin{pmatrix} -4 & -1/2 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti ovih operatora, te odgovarajuće algebarske i geometrijske kratnosti. Napišite Jordanove matrice ovih operatora.

5. Riješite sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & 2y_1 + 2y_2, \\ y_2' & = & -10y_1 - 7y_2. \end{array}$$

6. Sljedećim operatorima odredite rang, defekt, te jezgru i sliku:

$$\text{a) } A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_2),$$

$$\text{b) } B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, B(x_1, x_2) = (-7x_1 - 5x_2, x_1 + 2x_2, 3x_1),$$

$$\text{c) } C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, C(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, -4x_1 - x_3, -7x_1 + 2x_2 - 3x_3).$$

Koji je od danih operatora injektivan (monomorfizam), surjektivan (epimorfizam), odnosno bijektivan (izomorfizam)?