LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE – rješenja 2. zadaće

1. (3 boda) Da li vektori $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ razapinju isti potprostor od $\mathbb{R}^3$ kao i vektori $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$?

   Odgovor: Da.

   Rješenje: Zapišemo prva dva vektora kao stupce matrice A, a druga dva vektora kao stupce matrice B. Prema teoremu 5.1.13 iz skripte[1] elementarne transformacije na vektorima ne mijenjaju linearnu ljusku danih vektora ili, drugim riječima, potprostor razapet stupcima matrice se ne mijenja ako vršimo elementarne transformacije na stupcima matrice. Sada imamo:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}.$$

   Dakle, stupci matrice A razapinju isti potprostor kao i stupci matrice B.

2. (2/0/-2 boda) Da li je $W = \left\{ \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \xi_1\xi_2 = 0 \right\}$ potprostor od $\mathbb{R}^2$? DA NE

   Odgovor: NE.

   Objašnjenje: Skup W nije potprostor jer nije zatvoren na zbrajanje vektora. Primjerice, vektori $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ su u W, ali $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ nije.

3. (5 bodova) Odredite dimenziju potprostora u $\mathbb{R}^4$ razapetog vektorima $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-3\\3\\1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   Rješenje: Vektore iz zadatka zapišemo kao stupce matrice. Elementarnim transformacijama na stupcima matrice ne mijenja se potprostor razapet stupcima, pa ni dimenzija tog potprostora (usp. teorem 5.1.13 u skripti).

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\2 & -3 & 1\\-1 & 3 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -3 & -3\\-1 & 3 & 3\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & -3\\-1 & -1 & 3\\0 & -1/3 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\2/3 & -1/3 & 0\end{pmatrix}.$$

   Vidimo da je dimenzija potprostora razapetog vektorima iz zadatka jednaka 2. Primjetimo da smo ovdje zapravo računali rang dane matrice, pa smo mogli koristiti elementarne transformacije i na retcima i na stupcima i tako brže doći do rješenja (v. §5.5 u skripti). Na taj način ne bi dobili isti *potprostor* koji razapinju stupci, ali bi *dimenzija* ostala nepromijenjena.

4. (8 bodova) Odredite baze za jezgru i sliku matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 1 & -1\\3 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

[1] http://web.math.hr/~pejkovic/Linearna/predavanja.htm

Rješenje: Slika matrice je zapravo slika linearnog operatora kojemu je to matrični zapis u kanonskoj bazi. Dakle, slika matrice je potprostor razapet stupcima dane matrice. Prema teoremu 5.1.13 taj potprostor se ne mijenja ako izvodimo elementarne transformacije na stupcima:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & -10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Baza za sliku matrice je $\{(1,0,-1)^\top, (0,1,2)^\top\}$ ($^\top$ je oznaka za transponiranje, a ovdje je koristimo isključivo zato što retci zauzimaju manje mjesta od stupaca u tekstu).
Jezgra matrice je skup svih vektora x takvih da je $Ax = 0$, pa sve takve vektore možemo dobiti rješavajući ovaj sustav jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vidimo da matrica A ima jezgru $\ker A = \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -3x_2, x_3 = -5x_2\} = \{(-3t, t, -5t)^\top : t \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1,-5)^\top : t \in \mathbb{R}\} = \langle (-3,1,-5)^\top \rangle$ ($\langle S \rangle$ je oznaka za linearnu ljusku skupa vektora S, v. točku 5.1.9 u skripti), pa je baza jezgre dane matrice $\{(-3,1,-5)^\top\}$.

5. (2/0/-2 boda) Ako je rang linearnog operatora $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ jednak 2, onda je defekt tog operatora jednak 1. DA NE

   Odgovor: NE.

   Objašnjenje: Prema teoremu o rangu i defektu (v. skripta, točka 5.4.6), za linearni operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je $\operatorname{rang} A + \operatorname{defekt} A = n$. Ovdje je $n = 4$ i $\operatorname{rang} A = 2$, pa mora biti $\operatorname{defekt} A = 2$.

6. (6 bodova) Zadani su vektori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Izračunajte $||x||$, $||x-y||$ i $(x|y)$.

   Rješenje: Imamo:

$$||x|| = || \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} || = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$||x-y|| = || \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} || = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \sqrt{6^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

$$(x|y) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = -3.$$

7. (2/0/-2 boda) Ako je $||x|| = 2$ i $||y|| = 3$, onda je $|(x|y)| \leq 6$. DA NE

   Odgovor: DA.

   Objašnjenje: Prema Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzovoj nejednakosti (v. skripta, točka 6.3.9) vrijedi $|(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y|| = 2 \cdot 3 = 6$.

8. (5 bodova) Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte vektore $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ i izračunajte koordinate vektora $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ u dobivenoj bazi.

Rješenje: Postupak je detaljno prikazan u točki 6.5.2 skripte. Koristimo oznake odande:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\\
v_1 &= \frac{1}{||a_1||}a_1 = \frac{1}{||\left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)||}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}\\
b_2 &= a_2 - \sum_{i=1}^{1}(a_2|v_i)v_i = a_2 - (a_2|v_1)v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - (\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix})\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/5\\-3/5\end{pmatrix}\\
v_2 &= \frac{1}{||b_2||}b_2 = \frac{1}{||\left(\begin{smallmatrix}4/5\\-3/5\end{smallmatrix}\right)||}\begin{pmatrix}4/5\\-3/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/5\\-3/5\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dobili smo ortonormiranu bazu $\{v_1, v_2\} = \{\left(\begin{smallmatrix}3/5\\4/5\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}4/5\\-3/5\end{smallmatrix}\right)\}$, a vektor $v = \left(\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}\right)$ ima u toj bazi koordinate $\begin{pmatrix}(v|v_1)\\(v|v_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\left(\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix}3/5\\4/5\end{smallmatrix}\right))\\(\left(\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix}4/5\\-3/5\end{smallmatrix}\right))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ (v. teorem 6.4.8), tj. $v = 3v_1 + 4v_2$.

9. (2/0/-2 boda) Ako je $S \subset \mathbb{R}^n$, onda je $(S^\perp)^\perp = S$. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Općenito vrijedi samo $S \subseteq (S^\perp)^\perp$, a jednakost vrijedi (u konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima) ako i samo ako je S potprostor. To nije teško dokazati korištenjem teorema o projekciji (teorem 6.6.13, usporedi i dokaz teorema 6.6.14). Protuprimjer za tvrdnju zadatka je npr. $S = \{(1, 0, \dots, 0)\}$ za koji se lako vidi da je $(S^\perp)^\perp = \langle(1, 0 \dots, 0)\rangle = \{(t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\} \supsetneq S$.

10. (5 bodova) Odredite kanonski i parametarski oblik jednadžbe pravca koji prolazi točkama $(1, 3, 4)$ i $(2, 1, 4)$.

Rješenje: Pravac je određen jednom točkom i vektorom smjera. Ovdje za točku možemo uzeti bilo koju od dvije dane, npr. $(1, 3, 4)$, a vektor smjera je $\vec{v} = (2, 1, 4) - (1, 3, 4) = (1, -2, 0)$. To znači da točka (x, y, z) leži na pravcu ako i samo ako postoji neki $t \in \mathbb{R}$ takav da je $(x, y, z) = (1, 3, 4) + t(1, -2, 0)$. Tako dobivamo parametarski oblik jednadžbe pravca:

$$
\begin{cases}
x = 1 + t\\
y = 3 - 2t\\
z = 4 + 0t = 4
\end{cases}.
$$

Ako parametar t izrazimo iz svake od tri jednadžbe (u trećoj samo formalno) dobivamo kanonski oblik jednadžbe pravca:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{0}.$$

Više možete pročitati na stranici http://lavica.fesb.hr/mat1/predavanja/node63.html

11. (5 bodova) Odredite presjek pravca $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$ i ravnine $x + 3y - z = -4$.

Rješenje: Tražeći presjek, mi zapravo tražimo sve točke koje leže i na pravcu i u ravnini, tj. rješavamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1} \\ x + 3y - z = -4 \end{cases}.$$

Ovaj sustav je lakše riješiti tako da zapišemo pravac u parametarskom obliku:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

i zatim uvrstimo u jednadžbu ravnine

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= -4 \\ (3 + 2t) + 3 \cdot 2t - t &= -4 \\ 7t &= -7 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Uvrštavanje ove vrijednosti t u parametarsku jednadžbu pravca daje $x = 1$, $y = -2$ i $z = -1$ pa je traženi presjek jednak $\{(1, -2, -1)\}$.

12. (5 bodova) Metodom najmanjih kvadrata riješite sistem jednadžbi

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Rješenje: Jasno je da sistem iz zadatka nema rješenja, pa je najbolje što možemo odrediti x i y metodom najmanjih kvadrata (usp. primjer 6.6.9 u skripti), tj. tako da minimiziramo $|2x+y-1|^2 + |2x+y-2|^2$. Mi zapravo tražimo najbolju aproksimaciju vektora $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorima iz potprostora razapetog s $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Svi takvi vektori su oblika $xa_1 + ya_2$ $(x, y \in \mathbb{R})$, a najbliži je onaj za koji je razlika

$$v = b - (xa_1 + ya_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (x \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

vektor okomit na dani potprostor. Detaljni dokaz ove tvrdnje pogledajte u skripti §6, točke 6.1 i 6.4. Vektor v mora, dakle, biti okomit na vektore koji razapinju potprostor, tj. na vektore a_1 i a_2. Zapišemo li to preko skalarnog produkta dobivamo sustav koji treba riješiti po x i y:

$$\begin{cases} (v|a_1) = 0 \\ (v|a_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b - (xa_1 + ya_2)|a_1) = 0 \\ (b - (xa_1 + ya_2)|a_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1|a_1)x + (a_2|a_1)y = (b|a_1) \\ (a_1|a_2)x + (a_2|a_2)y = (b|a_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 4y = 6 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$4x + 2y = 3, \qquad \text{pa je } (x, y) \in \left\{ \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) + t\Big(-\frac{1}{2}, 1\Big) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$