LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE – rješenja 1. zadaće

1. (10 bodova) Dokažite da vektori $a_1 = (1, 1, 2)$, $a_2 = (1, -2, 1)$, $a_3 = (-1, 2, 2)$ čine bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

   Rješenje: Zapišemo vektore kao stupce matrice $A = (a_1, a_2, a_3)$. Sada elementarnim transformacijama na retcima i stupcima matrice dobivamo matricu kojoj su stupci različiti vektori iz kanonske baze i eventualno nulvektori.

   Elementarne transformacije možemo provoditi i na stupcima i na retcima jer je rang matrice po stupcima jednak rangu matrice po retcima (rang je maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca, tj. redaka). Elementarnim transformacijama se ne mijenja linearna nezavisnost ili zavisnost stupaca i to da li stupci razapinju dani prostor.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Budući da je matrica A ekvivalentna jediničnoj matrici (kojoj su stupci vektori kanonske baze prostora $\mathbb{R}^3$), zaključujemo da dani vektori čine bazu prostora $\mathbb{R}^3$.

   Više pročitajte u §§1.7, 1.8 skripte (http://web.math.hr/~pejkovic/Linearna/predavanja.htm).

2. (2/0/-2 boda) Kažemo da su vektori linearno nezavisni ako je svaka trivijalna kombinacija nula. DA NE

   Odgovor: NE.

   Objašnjenje: Trivijalna linearna kombinacija vektora je ona u kojoj su svi koeficijenti 0. Očito je svaka trivijalna kombinacija jednaka 0. Vektori su linearno nezavisni ako *ne postoji ni jedna netrivijalna* linearna kombinacija koja je jednaka nula. Drugim riječima, vektori su linearno nezavisni ako je *samo* trivijalna linearna kombinacija vektora jednaka nula. Više pročitajte u §1.3 skripte.

3. (2/0/-2 boda) Da li vektori $e_1, e_2 + e_3, e_3 + e_4$ razapinju $\mathbb{R}^4$? DA NE

   Odgovor: NE.

   Objašnjenje: Možemo postupiti kao u 1. zadatku, ali jednostavnije je primjetiti da su dana tri vektora u prostoru $\mathbb{R}^4$. Prema teoremu 1.7.7 znamo da skup izvodnica u $\mathbb{R}^n$ ima barem n vektora.

4. (10 bodova) Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

   Rješenje: Sustav rješavamo koristeći Gaussovu metodu eliminacije (sustav pišemo u matričnom obliku, a elementarne transformacije smijemo, naravno, vršiti samo na retcima matrice).

$$A_p = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \\ -1 & 2 & 2 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 3 & 4 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 4 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, rješenje danog sustava je $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -1)$. Na kraju je uvijek dobro napraviti provjeru rezultata!
Drugi način rješavanja ovog zadatka je pokazati da je sustav Cramerov i izračunati rješenja (v. skriptu, §4.4). To ostavljamo za vježbu čitatelju.

5. (5 bodova) Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 2 \end{cases}$$

Rješenje: Sustav rješavamo koristeći Gaussovu metodu eliminacije.

$$A_p = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ -2 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & 3 \\ -1 & 2 & 12 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 4 & 7 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 15 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 4 & 7 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 15 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz posljednje jednadžbe koja glasi $0 = 1$ vidimo da sustav nema rješenja.

6. (2/0/-2 boda) Da li je linearan operator zadan matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

injekcija? DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: Stupci dane matrice očito su linearno nezavisni, pa je prema teoremu 3.1.8 linearni operator kojeg ta matrica predstavlja injekcija.

7. (2/0/-2 boda) Da li je linearan operator zadan matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

injekcija? DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Prema korolaru 3.1.9, ako je linearni operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ injekcija, onda je $n \leq m$. Linearni operator iz zadatka ima domenu (područje definicije) $\mathbb{R}^3$ i kodomenu (područje vrijednosti) $\mathbb{R}^2$, pa ne može biti injekcija.

Možemo pokazati da operator iz zadatka nije injekcija i direktno pokazujući da su stupci u matričnom zapisu tog operatora linearno zavisni te koristeći teorem 3.1.8.

8. (10 bodova) Izračunajte A^{-1} za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Računamo inverz matrice (ne zaboravite da je ovo zapravo rješavanje tri sustava istovremeno, pa elementarne transformacije smijemo koristiti samo na retcima matrice).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Dakle, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, što možemo i provjeriti izračunavši npr. $A \cdot A^{-1}$.

9. (2 boda) Napišite matricu permutacije za permutaciju 32541.

Rješenje: Permutacija σ zadana nizom 32541 je bijekcija $\sigma : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ dana sa $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 4$, $\sigma(5) = 1$ (v. skriptu, točka 3.3.10). Matrica permutacije σ je matrica linearnog operatora T_σ zadanog na kanonskoj bazi sa $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, 5$ (v. skriptu, točka 3.3.14). Dakle, tražena matrica je

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. (5 bodova) Linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ima u kanonskoj bazi matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite njegov matrični zapis u bazi $t_1 = (1,0), t_2 = (1,1)$.

Rješenje: Matrica prijelaza iz kanonske baze u bazu (t_1, t_2) je $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pa je matrični zapis operatora A u bazi (t_1, t_2) (v. skriptu, točka 3.5.6)

$$A_T = T^{-1}AT.$$

Izračunamo T^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \text{pa je} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$A_T = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$