Priprema za prvi kolokvij iz kolegija Linearna algebra 2

2010/2011

1 Linearna preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$

Zadatak 1.1. Koji od sljedećih operatora je linearan. U slučaju da je operator linearan dati dokaz, inače primjerom pokazati da nije linearan.

a) $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad A(x,y,z) = z$

b) $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad A(x,y,z) = y \cdot z$

c) $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad A(x,y,z) = (y, |z|)$

d) $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad A(x,y,z) = (3x+y, y-z, x-2y+4z)$

e) $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad A(x,y,z) = (\sin x, \cos y, z)$

f) $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad A(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

g) $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

h) $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad A(x,y) = x^2 + y^2$

Zadatak 1.2. Napišite matricu rotacije (u kanonskoj bazi) u ravnini za sljedeće kutove:
a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) π e) $\frac{3\pi}{2}$ f) $\frac{5\pi}{3}$

Zadatak 1.3. Napišite matricu operatora projekcije (u kanonskoj bazi) u $\mathbb{R}^3$ na ravninu:
a) x–y b) y–z c) x–z

Zadatak 1.4. Izračunajte sljedeće umnoške matrica:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 30 & \end{bmatrix}$

Zadatak 1.5. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte AB, $A^\top B^\top$, $B^\top A^\top$ i BA.

Zadatak 1.6. Odredite x, y i z ako je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

ortogonalna matrica ($AA^\top = A^\top A = I$). Koliko ima rješenja.

Zadatak 1.7. Dokažite da je svaka potencija simetrične matrice ($A = A^\top$) opet simetrična matrica.

Zadatak 1.8. Neka je $\mathbf{a} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$, te neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator definiran na sljedeći način:

$$A(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}.$$

Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

Zadatak 1.9. Dokažite da su operatori $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadani kao

$$A(x, y, z) = (z + y, x + z, x + y), \qquad B(x, y, z) = (x + y + z, 2x - 3y)$$

linearni operatori. Nađite matrice operatora A, B, $B \circ A$ u kanonskoj bazi.

2 Regularni operatori na $\mathbb{R}^n$

Zadatak 2.1. Nađite inverze sljedećih matrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.2. Za koje vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

invertibilna. Odredite A^{-1} u tom slučaju.

Zadatak 2.3. Koje uvjete moraju zadovoljavati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ da bi matrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

bila invertibilna. Odredite A^{-1} u tom slučaju.

Zadatak 2.4. Neka je $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Preslikavanje $A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dano s

$$A(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Dokažite da je A linearan operator. Koje uvjete moraju zadovoljavati a, b, c i d da bi A bio regularan.

Zadatak 2.5. Odredite da li je operator $A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadan s

$$A(x, y, z, w) = (x + y + z + w, x + y - z - w, x - y + z - w, x - y - z + w)$$

regularan operator.

Zadatak 2.6. Pokažite da je skup $\{a, b, c\}$ gdje je

$$a = (-1, 1, 1), \qquad b = (1, -1, 1), \qquad c = (1, 1, -1)$$

baza prostora $\mathbb{R}^3$. Neka je $A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linearan operator zadan svojim djelovanjem na bazi:

$$A(a) = (1, 0, 1, \lambda), \quad A(b) = (0, 1, -1, 0), \quad A(c) = (1, -1, \lambda, -1).$$

Odredite $A(x, y, z)$ za sve $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Za koje vrijednosti λ je operator A injektivan.

Zadatak 2.7. Odredite matricu prijelaza iz uređene baze

$$((1,0,0,1),(0,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0))$$

od $\mathbb{R}^4$ u kanonsku uređenu bazu od $\mathbb{R}^4$.

Zadatak 2.8. Neka je $E = (e_1, e_2, e_3)$ kanonska baza od $\mathbb{R}^3$ te neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator zadan matricom

$$A_E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

u kanonskoj bazi. Odredite matricu operatora A u uređenoj bazi

$$F = ((1,-1,1),(1,-2,2),(1,-2,1)).$$

Zadatak 2.9. Neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator zadan s

$$A(x,y,z) = (y,-x,z).$$

Odredite matricu operatora A s obzirom na uređenu kanonsku bazu. Odredite matricu operatora A s obzirom na uređenu bazu

$$((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)).$$

Zadatak 2.10. Neka su

$$E = ((1,0,-1),(0,2,0),(1,2,3)) \qquad \text{i} \qquad F = ((-1,1),(2,0))$$

uređene baze od $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respektivno. Neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearan operator čija je matrica u paru baza E i F oblika

$$A_{FE} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu operatora A u kanonskoj uređenoj bazi.

Zadatak 2.11. Neka je $D\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ operator deriviranja na skupu polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3.

$$D(p) = p'$$

Odredite matricu operatora D u bazi $(1, 1+x, (1+x)^2, 1+x^3)$

Zadatak 2.12. Neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator takav da vrijedi

$$\begin{aligned} A(1,0,0) &= (2,3,-2),\\ A(1,1,0) &= (4,1,4),\\ A(1,1,1) &= (5,1,-7). \end{aligned}$$

Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

Zadatak 2.13. Neka je $E = (e_1, e_2, e_3)$ standardna uređena baza od $\mathbb{R}^3$, te neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator čija je matrica u standarnoj bazi jednaka

$$A_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je $F = (f_1, f_2, f_3)$ baza od $\mathbb{R}^3$ gdje je

$$f_1 = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta, \qquad f_2 = A(e_1), \qquad f_3 = A(e_2).$$

Odredite matricu operatora A u bazi F.

3 Determinanta operatora

Zadatak 3.1. Da li su uređene baze $((1,1),(1,0))$ i $((-1,-1),(0,1))$ u $\mathbb{R}^2$ jednako orijentirane.

Zadatak 3.2. Da li su uređene baze

$$((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)) \qquad \text{i} \qquad ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$$

jednako orijentirane.

Zadatak 3.3. Odredite inverznu permutaciju, predznak, te predznak inverza sljedećih permutacija:

a) (321)

b) (51243)

c) (614253)

d) (543612)

Zadatak 3.4. Izračunajte determinante sljedećih matrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.5. Koristeći elementarne transformacije nad recima i stupcima dokažite jednakost

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \end{vmatrix} = -acefhm.$$

Zadatak 3.6. Za koje vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi $\det A \neq 0$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$