Linearna algebra

Mirko Primc

Sadržaj

POGLAVLJE 8

Dijagonalizacija operatora

1. Svojstvene vrijednosti linearnog operatora

1.1. Teorem. *Neka je $A = (\alpha_{ij})$ kvadratna $n \times n$ matrica. Tada je funkcija*

$$P_A(x) = \det(xI - A)$$

polinom n-tog stupnja oblika

$$P_A(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1}x + \sigma_n,$$

pri čemu je

$$\sigma_1 = -\mathrm{tr} A, \quad \sigma_n = (-1)^n \det A.$$

Polinom $P_A(x) = \det(xI - A)$ zovemo *svojstvenim polinomom matrice A.*

DOKAZ. Prvo primijetimo da su $x - \alpha_{ii}$ dijagonalni elementi matrice $xI - A$, a da elementi $-\alpha_{ij}$ van dijagonale ne sadrže x. Budući da je determinanta matrice suma produkata n matričnih elemenata pomnoženih s $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, to je jasno da je $\det(xI - A)$ polinom stupnja $\leq n$.

Jedini način da u polinomu $P_A(x)$ dobijemo potenciju x^n je da množimo dijagonalne elemente, što u formuli

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n} \tag{1.1}$$

odgovara sumandu za $\sigma = \mathrm{id}$ i $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$. Znači da je $P_A(x)$ oblika $x^n + \ldots$.

Da bismo u polinomu $P_A(x)$ dobili potenciju x^{n-1}, moramo zbrojiti sumande u formuli (1.1) koji kao faktore imaju $n-1$ dijagonalnih elementa. No to je opet moguće jedino ako množimo sve dijagonalne elemente. Znači da je $P_A(x)$ oblika $x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots$, gdje je σ_1 koeficijent uz x^{n-1} u polinomu

$$(x - \alpha_{11}) \ldots (x - \alpha_{nn}) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots = x^n - (\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}) x^{n-1} + \ldots.$$

Znači da je $\sigma_1 = -(\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}) = -\mathrm{tr} A$. Na kraju, $\sigma_n = P_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$. $\square$

1.2. Primjer. Za 2×2 matricu A imamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad xI - A = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix},$$

pa je

$$P_A(x) = \det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

1.3. Svojstvene vrijednosti matrice. Nultočke svojstvenog polinoma $P_A(x)$ matrice A zovemo *svojstvenim vrijednostima matrice* A.

1.4. Determinanta linearnog operatora. Neka je $A \colon V \to V$ linearan operator na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V. Neka su E i E' dvije uređene baze od V. Tada su matrice A_E i $A_{E'}$ operatora A u tim bazama povezane formulom

$$A_{E'} = (T_E)^{-1} A_E T_E.$$

Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema dobijamo

$$\det A_{E'} = \det\big((T_E)^{-1} A_E T_E\big) = \det(T_E)^{-1} \det A_E \det T_E = \det A_E$$

jer je $\det(T_E)^{-1} \det T_E = \det\big((T_E)^{-1} T_E\big) = \det I = 1$.

Budući da je determinanta matrice operatora za svake dvije baze ista, po definiciji stavljamo

$$\det A = \det A_E$$

(za neku bazu E) i kažemo da je $\det A$ *determinanta linearnog operatora* A.

1.5. Primjer. Neka je $A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearan operator zadan u kanonskoj bazi $E = (e_1, e_2)$ matricom

$$A_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det A_E = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$$

Stavimo $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_1 - e_2$. Tada je $E' = (v_1, v_2)$ baza od $\mathbb{R}^2$ za koju je

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v_1 + 0v_2,$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0v_1 + 1v_2.$$

Znači da u bazi $E' = (v_1, v_2)$ imamo

$$A_{E'} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det A_{E'} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 3.$$

Kao što smo rekli, svejedno je u kojoj bazi računamo determinantu operatora; u našem primjeru je

$$\det A = 3.$$

1.6. Svojstveni polinom linearnog operatora. Neka je V konačno-dimenzionalni vektorski prostor i $A\colon V \to V$ linearan operator. Polinom

$$P_A(x) = \det(xI - A)$$

zovemo *svojstvenim polinomom operatora* A.

1.7. Invarijante linearnog operatora. Važno je primijetiti da svojstveni polinom

$$\det(xI - A) = \det(xI - A_E)$$

ne ovisi o izboru baze E od V u kojoj računamo matricu A_E operatora A. Znači da koeficijenti svojstvenog polinoma

$$\sigma_1 = -\mathrm{tr}A = -\mathrm{tr}A_E, \quad \sigma_2, \ldots, \quad \sigma_{n-1}, \quad \sigma_n = (-1)^n \det A = (-1)^n \det A_E$$

ne ovise zovemo o izboru baze E. No onda ni bilo koja funkcija tih koeficijenata $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, na primjer

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sigma_1^2 - \sigma_n = (\mathrm{tr}A)^2 - (-1)^n \det A,$$

ne ovisi o izboru baze E prostora V u kojoj računamo matricu operatora. Takve funkcije zovemo *invarijantama operatora* A. Posebno važne invarijante operatora A su $\mathrm{tr}A$ i $\det A$.

1.8. Spektar linearnog operatora. Neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Spektrom linearnog operatora $A\colon V \to V$ zovemo skup $\sigma(A)$ svih nultočaka svojstvenog polinoma $P_A(x)$ u polju **kompleksnih** brojeva, tj.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid P_A(\lambda) = 0\},$$

a elemente spektra zovemo *svojstvenim vrijednostima od* A. Prema osnovnom teoremu algebre spektar

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$$

je neprazan skup i svojstveni polinom $P_A(x)$ možemo faktorizirati

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_s)^{n_s},$$

gdje se sve međusobno različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ javljaju s *algebarskim kratnostima* $n_1, \ldots, n_s$. Uočimo da je

$$n_1 + \cdots + n_s = n.$$

1.9. Spektar i koeficijenti svojstvenog polinoma. Važno je primijetiti da koeficijente svojstvenog polinoma $P_A(x)$ možemo očitati iz faktorizacije

$$(x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_s)^{n_s} = x^n - (n_1\lambda_1 + \cdots + n_s\lambda_s)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_s^{n_s}.$$

Posebno je

$$\mathrm{tr}A = n_1\lambda_1 + \cdots + n_s\lambda_s \quad \text{i} \quad \det A = \lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_s^{n_s}.$$

1.10. Primjer. Svojstveni polinom jediničnog operatora I na $\mathbb{R}^n$ je $P_I(x) = (x-1)^n$, spektar je $\sigma(I) = \{1\}$, algebarska kratnost svojstvene vrijednosti 1 je n, $\mathrm{tr} I = n$, $\det I = 1$.

1.11. Primjer. Svojstveni polinom rotacije u ravnini za kut $\frac{\pi}{2}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je $P_J(x) = x^2 - 1$, spektar je $\sigma(J) = \{i, -i\}$, algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti su 1, $\mathrm{tr} = 0$, $\det I = 1$.

2. Svojstveni vektori linearnog operatora

2.1. Svojstveni vektori. Neka je A linearan operator na V i $v \in V$. Ako je

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0,$$

za neki skalar λ, onda kažemo da je v *svojstveni vektor od A*. Primijetimo da je tada $(\lambda I - A)v = 0$, pa operator $\lambda I - A$ nije injekcija i vrijedi

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0, \quad \text{tj.} \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Zato još kažemo da je $v \neq 0$ *svojstveni vektor od A za svojstvenu vrijednost λ*.

2.2. Napomena. Ako je v svojstveni vektor od A za svojstvenu vrijednost λ, onda je za svaki skalar $\mu \neq 0$ i vektor μv svojstveni vektor od A za svojstvenu vrijednost λ. Naime, iz pretpostavki slijedi

$$A(\mu v) = \mu A v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v), \quad \mu v \neq 0.$$

Zbog toga u unitarnom prostoru normiranjem svojstvenog vektora v dobijamo normirani svojstveni vektor $e = \frac{1}{||v||} v$.

2.3. Teorem.

(1) Ako je $V \neq 0$ konačno-dimenzionalni **kompleksni** vektorski prostor, onda za svaku svojstvenu vrijednost postoji svojstveni vektor. Posebno, postoji bar jedan $v \neq 0$ i bar jedan $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je

$$Av = \lambda v.$$

(2) Ako je $V \neq 0$ konačno-dimenzionalni **realni** vektorski prostor, onda za svaku **realnu** svojstvenu vrijednost postoji svojstveni vektor.

DOKAZ. (1) Ako je V kompleksan prostor, onda je za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ definiran operator $\lambda I - A$. Budući da $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ povlači da operator $\lambda I - A$ nije injekcija, to postoji $v \neq 0$ takav da je

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

(2) Ako je V realan prostor, onda je operator $\lambda I - A$ definiran samo za realne brojeve λ. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ realan broj, onda $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ povlači da operator $\lambda I - A$ nije injekcija, pa postoji $v \neq 0$ takav da je

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

□

2.4. Napomena. Ako je λ svojstvena vrijednost od A, onda svojstvene vektore za svojstvenu vrijednost λ tražimo rješavanjem sistema linearnih jednadžbi

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

2.5. Primjer. Spektar rotacije J u ravnini za kut $\frac{\pi}{2}$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

je $\{i, -i\}$. Budući da J nema realnih svojstvenih vrijednosti, to nema ni svojstvenih vektora.

2.6. Primjer. Neka je $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ zadan u kanonskoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektar od A je $\{i, -i\}$, pa za svojstvenu vrijednost $\lambda = i$ svojstveni vektor tražimo rješavajući sistem jednadžbi $(A - \lambda I)v = 0$, tj.

$$\begin{aligned} -i\xi_1 - \xi_2 &= 0, \\ \xi_1 - i\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Jedno rješenje tog sistema je $\xi_2 = 1$, $\xi_1 = i$, pa imamo svojstveni vektor $v = (i, 1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.7. Lema. *Neka je $A\colon V \to V$ linearan operator. Neka su $v_1, \dots, v_r$ svojstveni vektori za međusobno različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ operatora A, sve realne ako je V realan prostor. Za $i \in \{1, \dots, r\}$ stavimo*

$$Q_i(A) = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{j \neq i} (A - \lambda_j I).$$

Tada je

$$Q_i(A)v_j = \begin{cases} v_i & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Dokaz. Zbog $Av_i = \lambda_i v_i$ imamo

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda_1 I)\dots(A-\lambda_{i-1}I)(A-\lambda_{i+1}I)\dots(A-\lambda_{r-1}I)(A-\lambda_r I)v_i\\
&= (A-\lambda_1 I)\dots(A-\lambda_{i-1}I)(A-\lambda_{i+1}I)\dots(A-\lambda_{r-1}I)(\lambda_i-\lambda_r)v_i\\
&= (\lambda_i-\lambda_r)(A-\lambda_1 I)\dots(A-\lambda_{i-1}I)(A-\lambda_{i+1}I)\dots(A-\lambda_{r-1}I)v_i\\
&\ \ \vdots\\
&= (\lambda_i-\lambda_1)\dots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\dots(\lambda_i-\lambda_{r-1})(\lambda_i-\lambda_r)v_i.
\end{aligned}$$

Znači da je

$$\left(\prod_{j\neq i}(A-\lambda_j I)\right)v_i = \left(\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)\right)v_i,$$

pa je $Q_i(A)v_i = v_i$. Ako je $k \neq i$, onda zbog $Av_k = \lambda_k v_k$ imamo

$$\left(\prod_{j\neq i}(A-\lambda_j I)\right)v_k = \left(\prod_{j\neq i}(\lambda_k-\lambda_j)\right)v_k = 0$$

jer je na kraju za $j = k$ faktor $\lambda_k - \lambda_k = 0$. Znači da za $k \neq i$ imamo $Q_i(A)v_k = 0$. □

2.8. Teorem. *Neka je $A\colon V \to V$ linearan operator. Neka su $v_1, \dots, v_n$ svojstveni vektori za međusobno različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ operatora A, sve realne ako je V realan prostor. Tada su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni.*

Posebno, ako je $n = \dim V$, onda su svojstveni vektori $v_1, \dots, v_n$ baza od V.

Dokaz. Treba dokazati da $\xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n = 0$ povlači $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$. Promijenimo li operator $Q_i(A)$ iz leme 2.7 dobivamo

$$Q_i(A)(\xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n) = \xi_1 Q_i(A)v_1 + \dots + \xi_n Q_i(A)v_n = \xi_i v_i = 0,$$

pa $v_i \neq 0$ povlači $\xi_i = 0$. □

2.9. Primjer. Neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan u kanonskoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svojstveni polinom je $P_A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$, pa A ima $3 = \dim \mathbb{R}^3$ međusobno različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Znači da A ima i tri svojstvena vektora v_1, v_2, v_3 (za te tri svojstvene vrijednosti) koji čine bazu od $\mathbb{R}^3$. Budući da je

$$\begin{aligned}
Av_1 &= v_1 = 1\cdot v_1 + 0v_2 + 0v_3,\\
Av_2 &= -v_2 = 0v_1 + (-1)\cdot v_2 + 0v_3,\\
Av_3 &= 2v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 2\cdot v_3,
\end{aligned}$$

to je matrica A_B operatora A u bazi $B = (v_1, v_2, v_3)$ dijagonalna matrica

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.10. Problem dijagonalizacije. *Problem dijagonalizacije linearnog operatora* je problem nalaženja baze $B = (v_1, \dots, v_n)$ od V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A. Drugim riječima, problem dijagonalizacije linearnog operatora $A \colon V \to V$ je problem nalaženja baze $B = (v_1, \dots, v_n)$ od V u kojoj je matrica operatora dijagonalna

$$A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

pri čemu se na dijagonali matrice A_B javljaju svojstvene vrijednosti operatora A. Ako takva baza postoji, onda kažemo da se A *može dijagonalizirati.*

2.11. Napomena. Ako za A postoji baza svojstvenih vektora, onda je svojstveni polinom

$$P_A(x) = \det(xI - A) = \det\left((xI - A)_B\right) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n),$$

pa zaključujemo da se svojstvena vrijednost operatora A javlja na dijagonali matrice A_B onoliko puta koliko puta se javlja u faktorizaciji svojstvenog polinoma $P_A(x)$.

2.12. Napomena. Ako se operator A može dijagonalizirati, onda se iz dijagonalne matrice A_B operatora A u bazi svojstvenih vektora mogu iščitati gotovo sva bitna svojstva operatora A. Tako odmah vidimo rang, defekt, svojstveni polinom, trag, determinantu, spektar, algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti, itd. Računanje polinoma od A je također vrlo jednostavno, npr.

$$(A^2)_B = (AA)_B = A_B A_B = (A_B)^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix},$$

$$(A^5)_B = (A_B)^5 = \begin{pmatrix} \lambda_1^5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^5 \end{pmatrix}.$$

Tako je za operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iz primjera 2.9 i polinom $Q(x) = x^5 - x^2 + 1$ mnogo lakše računati u bazi B

$$Q(A)_B = Q(A_B) = \begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nego li u kanonskoj bazi $E = (e_1, e_2, e_3)$

$$Q(A)_E = Q(A_E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^5 - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zbog svih navedenih, ali i drugih razloga, problem dijagonalizacije linearnog operatora je jedan od osnovnih problema linearne algebre.

2.13. Ne može se svaki operator dijagonalizirati. Problem dijagonalizacije ne može se riješiti za svaki operator. Najjednostavniji primjer operatora koji se ne može dijagonalizirati je operator $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadan matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je $N \neq 0$, $\det N = 0$ i $\operatorname{tr} N = 0$. Da postoji baza $B = (v_1, v_2)$ u kojoj se N dijagonalizira, tj.

$$N_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

bilo bi $\det N = \det N_B = \lambda_1 \lambda_2 = 0$, $\operatorname{tr} N = \operatorname{tr} N_B = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. No to bi povlačilo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i

$$N_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. $N = 0$, a što je nemoguće jer je $N \neq 0$.

2.14. Napomena. Sada znamo da neke operatore možemo dijagonalizirati, a neke ne. Najbolje što se može reći za svaki operator A da postoje baza od V u kojoj A ima tzv. blok-dijagonalnu matricu oblika

$$A_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix},$$

gdje su $A_1, \dots, A_s$ kvadratne matrice (posebnog oblika), a svi ostali matrični elementi su 0. U tu svrhu treba pojam baze zamijeniti poopćenim pojmom direktne sume potprostora, a pojam svojstvenog vektora poopćenim pojmom invarijantnog potprostora.

3. Dijagonalizacija hermitske matrice

U ovom paragrafu pretpostavljamo da je V konačno-dimenzionalni unitarni prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva.

3.1. Matrica operatora u ortonormiranoj bazi. Neka je $E = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza od V. Tada su koordinate ξ_i vektora

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

dane formulom

$$\xi_i = (x \mid e_1), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Ako je $A\colon V \to V$ linearni operator, onda je matrica $A_E = (\alpha_{ij})$ operatora A u bazi E određena formulom

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Budući da koordinate α_{ij} vektora Ae_j u ortonormiranoj bazi E možemo računati pomoću formule (3.1), to je matrica operatora u ortonormiranoj bazi dana formulom

$$\alpha_{ij} = (Ae_j \mid e_i), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

3.2. Lema. *Neka su A i B linearni operatori na V. Tada je $A = B$ ako i samo ako je*

$$(Ax \mid y) = (Bx \mid y) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

Dokaz. Neka je $E = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza od V. Tada je

$$(Ae_j \mid e_i) = (Be_j \mid e_i), \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Znači da su matrice A_E i B_E operatora jednake, pa slijedi i jednakost operatora $A = B$. Obrat je očigledan. □

3.3. Hermitski adjungirana matrica. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ matrica. Tada matricu

$$A^* = (\beta_{ij}), \quad \beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

zovemo *hermitski adjungiranom matricom matrici* A. Znači da je A^* dobivena iz A transponiranjem i, ako se radi o kompleksnoj matrici, kompleksnim konjugiranjem svakog matričnog elementa.

3.4. Primjer.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 1 & -1 \\ 2-2i & 3 & -2 \\ 3+i & 4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i & 2+2i & 3-i \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.5. Hermitski adjungirani operator. *Neka je $A\colon V \to V$ linearni operator. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A^*\colon V \to V$ takav da je*

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^*y) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

Operator A^* zovemo *hermitski adjungiranim operatorom operatoru A.*

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost. Pretpostavimo da su B i C operatori na V takvi da je

$$(Ax \mid y) = (x \mid By) \quad \text{i} \quad (Ax \mid y) = (x \mid Cy) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

Tada je zbog hermitske simetrije skalarnog produkta

$$(By \mid x) = \overline{(Ax \mid y)} = (Cy \mid x) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V,$$

pa iz leme 3.2 slijedi $B = C$.

Dokažimo sada da operator A^* postoji. Odaberimo neku ortonormiranu bazu $E = (e_1, \dots, e_n)$ od V. Ako operator A^* postoji, onda mora biti

$$(Ae_i \mid e_j) = (e_i \mid A^*e_j) \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

Zbog hermitske simetrije skalarnog produkta to je ekvivalentno

$$(A^*e_j \mid e_i) = \overline{(Ae_i \mid e_j)} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Zato definiramo linearan operator A^* tako da mu je u bazi E matrica $(A^*)_E = (\beta_{ij})$ jednaka

$$(A^*)_E = (A_E)^*, \qquad \beta_{ij} = (A^*e_j \mid e_i) = \overline{(Ae_i \mid e_j)} = \overline{\alpha_{ji}}, \tag{3.3}$$

tj. jednaka adjungiranoj matrici matrice $A_E = (\alpha_{ij})$ operatora A. Sada zbog (3.2) za proizvoljne

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \qquad \text{i} \qquad y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$$

imamo

$$\begin{aligned}(Ax \mid y) &= (A\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \mid \sum_{j=1}^n \eta_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \overline{\eta_j} (Ae_i \mid e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi_i \overline{\eta_j} (e_i \mid A^*e_j) = (\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \mid A^* \sum_{j=1}^n \eta_j e_j) = (x \mid A^*y).\end{aligned}$$

□

3.6. Napomena. Zbog hermitske simetrije skalarnog produkta je

$$(A^*y \mid x) = (y \mid Ax) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

3.7. Svojstva hermitskog adjungiranja.

(1) $(A^*)^* = A$, obično pišemo $A^{**} = A$ i kažemo da je * *involucija*.
(2) $I^* = I$.
(3) $(AB)^* = B^*A^*$, obično kažemo da je * *antiautomorfizam množenja*.
(4) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*$, obično kažemo da je * *antilinearno*.

DOKAZ. Sve tvrdnje slijede iz relacija

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^*y) \quad \text{i} \quad (A^*x \mid y) = (x \mid Ay) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V$$

primjenom leme 3.2:

$$\begin{aligned} ((A^*)^*x \mid y) &= (x \mid A^*y) = (Ax \mid y). \\ (I^*x \mid y) &= (x \mid Iy) = (x \mid y) = (Ix \mid y). \\ ((AB)^*x \mid y) &= (x \mid ABy) = (A^*x \mid By) = (B^*A^*x \mid y). \\ ((\lambda A + \mu B)^*x \mid y) &= (x \mid (\lambda A + \mu B)y) = \bar{\lambda}(x \mid Ay) + \bar{\mu}(x \mid By) \\ &= \bar{\lambda}(A^*x \mid y) + \bar{\mu}(B^*x \mid y) = ((\bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*)x \mid y). \end{aligned}$$

□

3.8. Hermitske matrice. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ matrica. Kažemo da je A *hermitska matrica* ako je

$$A^* = A,$$

odnosno

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Primijetimo da su zbog $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ svi dijagonalni elementi hermitske matrice realni brojevi. Realne hermitske matrice zovemo i *simetričnim matricama* jer vrijedi

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

pa je matrica "simetrična na refleksiju" s obzirom na glavnu dijagonalu (α_{ii}).

3.9. Primjeri hermitskih matrica.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2+2i & 1 \\ 2-2i & 3 & -3i \\ 1 & 3i & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 2+2i & 1 \\ 2-2i & 3 & -3i \\ 1 & 3i & 5 \end{pmatrix}.$$

3.10. Hermitski operatori. Za linearan operatora $A \colon V \to V$ kažemo da je *hermitski operator* ako je

$$A^* = A.$$

Zbog veze (3.3) je operator A hermitski ako i samo ako mu je matrica A_B u ortonormiranoj bazi B hermitska matrica. Zbog definicije A^*, operator A je hermitski ako i samo ako je

$$(Ax \mid y) = (x \mid Ay) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V. \tag{3.4}$$

3.11. Lema. *Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ hermitska matrica. Tada su svojstvene vrijednosti od A realni brojevi.*

Dokaz. Neka je A linearan operator

$$A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

zadan u kanonskoj ortonormiranoj bazi matricom A. S obzirom na kanonski skalarni produkt u $\mathbb{C}^n$ operator A je hermitski. Ako je λ svojstvena vrijednost matrice A, onda prema teoremu 2.3 postoji svojstveni vektor $v \neq 0$ u $\mathbb{C}^n$ za tu svojstvenu vrijednost. Tada je zbog (3.4)

$$\lambda(v \mid v) = (\lambda v \mid v) = (Av \mid v) = (v \mid Av) = (v \mid \lambda v) = \bar{\lambda}(v \mid v),$$

pa kraćenjem s $(v \mid v) \neq 0$ dobijamo da je $\lambda = \bar{\lambda}$, odnosno da je λ realan broj. □

3.12. Teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora. *Neka je A hermitski operator na realnom ili kompleksnom unitarnom konačno-dimenzionalnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A.*

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po $n = \dim V$.

Ako je $\dim V = 1$ i e_1 normirani vektor koji razapinje V, onda je $Ae_1 = \lambda e_1$, i vrijedi tvrdnja teorema.

Pretpostavimo sada da za svaki hermitski operator A_1 na $(n-1)$-dimenzionalnom unitarnom prostoru W postoji ortonormirana baza svojstvenih vektora. Neka je $\dim V = n$ i

$$A\colon V \to V$$

hermitski operator. Prema teoremu 2.3 postoji svojstveni vektor $e_1 \neq 0$ u V za svojstvenu vrijednost λ_1, tj.

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1.$$

Smijemo pretpostaviti da je $||e_1|| = 1$. Neka je W potprostor okomit na e_1, tj.

$$W = \{v \in V \mid (v \mid e_1) = 0\}.$$

Prema teoremu o projekciji imamo

$$V = L(e_1) \oplus W, \quad \dim W = n - 1.$$

Za $w \in W$, tj. $(w \mid e_1) = 0$, imamo

$$(Aw \mid e_1) = (w \mid Ae_1) = (w \mid \lambda_1 e_1) = \lambda_1 (w \mid e_1) = 0.$$

Znači da je

$$AW \subset W,$$

pa imamo dobro definirani linearni operator

$$A_1\colon W \to W, \qquad A_1 w = Aw \quad \text{za} \quad w \in W.$$

To je hermitski operator na W jer za $u, w \in W$ vrijedi

$$(A_1 u \mid w) = (Au \mid w) = (u \mid Aw) = (u \mid A_1 w).$$

Sada po pretpostavci indukcije postoji ortonormirana baza $e_2, \ldots, e_n$ svojstvenih vektora od A_1

$$A_1 e_i = A e_i = \lambda_i e_i, \quad i = 2, \ldots, n.$$

No onda je $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A. $\square$