Linearna algebra za fizičare, zimski semestar 2006.

Mirko Primc

Sadržaj

POGLAVLJE 6

Skalarni produkt

1. Norma i skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^n$

1.1. Duljina vektora u $\mathbb{R}^2$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2)$ iz $\mathbb{R}^2$ kao koordinate točaka u zadanom Kartezijevom sustavu euklidske ravnine, a elemente kanonske baze e_1, e_2 kao jedinične vektore na koordinatnim osima. Prema Pitagorinom poučku za pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0,0), \quad B = (\xi_1, 0), \quad C = (\xi_1, \xi_2),$$

kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AC}$ jednak je sumi kvadrata duljina kateta

$$\xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Ako usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AC}$ poistovjetimo s točkom $x = (\xi_1, \xi_2)$, onda je intuitivno opravdano kad kažemo da je

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

duljina (ili norma) vektora x u $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da za svaki x imamo $\xi_1^2 + \xi_2^2 \geq 0$ i da u definiciji mislimo na nenegativan drugi korijen $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq 0$.

1.2. Primjer. Duljina vektora $x = (1,2)$ je $||x|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

1.3. Duljina vektora u $\mathbb{R}^3$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ kao koordinate točaka u zadanom Kartezijevom sustavu euklidskog prostora, a elemente kanonske baze e_1, e_2, e_3 kao jedinične vektore na koordinatnim osima. Prema Pitagorinom poučku za pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0,0,0), \quad B = (\xi_1, 0, 0), \quad C = (\xi_1, \xi_2, 0),$$

kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AC}$ jednak je sumi kvadrata duljina kateta

$$\xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Sada, primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0,0,0), \quad C = (\xi_1, \xi_2, 0), \quad D = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

dobijamo da je kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AD}$ jednak sumi kvadrata duljina kateta

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2.$$

Ako usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AD}$ poistovjetimo s točkom $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, onda je intuitivno opravdano kad kažemo da je

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

duljina (ili norma) vektora x u $\mathbb{R}^3$.

1.4. Primjer. Duljina vektora $x = (1, 2, -2)$ u $\mathbb{R}^3$ je

$$||x|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3.$$

1.5. Norma vektora u $\mathbb{R}^n$. Za vektor $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ u $\mathbb{R}^n$ definiramo *normu (ili duljinu) vektora x* kao

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}.$$

1.6. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Funkciju

$$(\ |\ )\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n,$$

zovemo *kanonskim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^n$*. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ ima sljedeća svojstva:

(1) skalarni produkt je bilinearna funkcija,
(2) skalarni produkt je simetrična funkcija, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = (y \mid x),$$

(3) $(x \mid x) \geq 0$,
(4) $(x \mid x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.

DOKAZ. Bilinearnost i simetričnost skalarnog produkta vrijedi zbog algebarskih svojstava realnih brojeva:

$$(\lambda x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \xi_i)\eta_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \lambda (x \mid y),$$

$$(x' + x'' \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i' + \xi_i'')\eta_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i'\eta_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i''\eta_i = (x' \mid y) + (x'' \mid y)$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\xi_i = (y \mid x).$$

Očito je $(x \mid x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \geq 0$ i jednakost vrijedi ako i samo ako je $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$. □

1.7. Napomena. Primijetimo da se kanonski skalarni produkt $(x \mid y)$ vektora x i y iz $\mathbb{R}^n$ podudara s kanonskim produktom $\langle x \mid y \rangle$ uvedenim u točki 5.6.2.

1.8. Kanonski skalarni produkt i norma vektora u $\mathbb{R}^n$. Očito je

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)}.$$

1.9. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}$. U slučaju $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ skalarni produkt vektora (brojeva) ξ i η u $\mathbb{R}$ je

$$(\xi \mid \eta) = \xi\eta,$$

a norma $||\xi||$ je apsulutna vrijednost $|\xi|$ broja ξ:

$$|\xi| = ||\xi|| = \sqrt{\xi \cdot \xi}.$$

Primijetimo da u polju $\mathbb{R}$ relacija $(\xi \mid \eta) = \xi\eta = 0$ povlači da je bar jedan od brojeva ξ i η jednak nula.

2. Skalarni produkt vektora u $\mathbb{C}^n$

2.1. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}$. Polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je skup $\mathbb{R}^2$ čije elemente $z = (x, y)$ obično zapisujemo kao $z = x + iy$. Apsolutna vrijednost $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je u stvari norma $||z||$ elementa $z \in \mathbb{R}^2$. Koristimo li konjugiranje i množenje u polju $\mathbb{C}$, imamo formulu

$$|z| = ||z|| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Za kompleksne brojeve z i w kažemo da je

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w}$$

skalarni produkt vektora (brojeva) z i w u $\mathbb{C}$, a

$$||z|| = \sqrt{(z \mid z)}$$

zovemo *normom vektora z u* $\mathbb{C}$.

Primijetimo da u polju $\mathbb{C}$ relacija $(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = 0$ povlači da je bar jedan od brojeva z i w jednak nula. Za razliku od realnih brojeva, skalarni produkt na $\mathbb{C}$ ima svojstvo *hermitske simetrije*

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = \overline{w} \cdot z = \overline{w} \cdot \overline{\overline{z}} = \overline{w \cdot \overline{z}} = \overline{(w \mid z)}.$$

2.2. Kanonski skalarni produkti na $\mathbb{C}$ i na $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da je za kompleksne brojeve $z = x + iy$ i $w = u + iv$

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = xu + yv + i(-xv + yu)$$

pa je skalarni produkt $xu + yv$ vektora (x, y) i (u, v) u 2-dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ jednak realnom dijelu skalarnog produkta $(z \mid w)$ vektora $z = x + iy$ i $w = u + iv$ u 1-dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}$.

2.3. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$. Funkciju

$$(\ \mid\ ) \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y) = \xi_1\overline{\eta_1} + \xi_2\overline{\eta_2} + \cdots + \xi_n\overline{\eta_n},$$

gdje je $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ i $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, zovemo *kanonskim skalarnim produktom na* $\mathbb{C}^n$. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$ ima sljedeća svojstva:

(1) skalarni produkt je linearna funkcija u prvom argumentu, tj.

$$(x' + x'' \mid y) = (x' \mid y) + (x'' \mid y), \quad (\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y),$$

i antilinearna funkcija u drugom argumentu, tj.

$$(x \mid y' + y'') = (x \mid y') + (x \mid y''), \quad (x \mid \lambda y) = \overline{\lambda}(x \mid y),$$

(2) skalarni produkt je hermitski simetrična funkcija, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)},$$

(3) $(x \mid x) \geq 0$,

(4) $(x \mid x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.

Dokaz. Linearnost i hermitska simetrija skalarnog produkta vrijede zbog algebarskih svojstava kompleksnih brojeva:

$$(\lambda x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \xi_i)\overline{\eta_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} = \lambda(x \mid y),$$

$$(x' + x'' \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i' + \xi_i'')\overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' \overline{\eta_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i'' \overline{\eta_i} = (x' \mid y) + (x'' \mid y)$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{\xi_i}\eta_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \overline{\xi_i}} = \overline{(y \mid x)}.$$

Antilinearnost u drugom argumentu slijedi iz linearnosti u prvom argumentu i hermitske simetrije:

$$\begin{aligned}(x \mid y + \lambda v) &= \overline{(y + \lambda v \mid x)} = \overline{(y \mid x) + \lambda(v \mid x)} \\ &= \overline{(y \mid x)} + \overline{\lambda} \cdot \overline{(v \mid x)} = (x \mid y) + \overline{\lambda}(x \mid v).\end{aligned}$$

Očito je $(x \mid x) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 \geq 0$ i jednakost vrijedi ako i samo ako je $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$. □

2.4. Napomena. Primijetimo da se kanonski skalarni produkt $(x \mid y)$ vektora x i y iz $\mathbb{C}^n$ **ne** podudara s kanonskim produktom $\langle x \mid y \rangle$ uvedenim u točki 5.6.2.

2.5. Primjer. Za vektore

$$x = (2, -i) \quad \text{i} \quad y = (i, 1 + i)$$

u $\mathbb{C}^2$ kanonski skalarni produkt je

$$(x \mid y) = 2 \cdot \overline{i} + (-i) \cdot \overline{1 + i} = 2 \cdot (-i) + (-i) \cdot (1 - i) = -2i - i - 1 = -1 - 3i,$$

a kanonski produkt tih vektora je

$$\langle x \mid y \rangle = 2 \cdot i + (-i) \cdot (1 + i) = 2i - i + 1 = 1 + i.$$

2.6. Norma vektora u $\mathbb{C}^n$. *Norma vektora* $x = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ je po definiciji

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2}.$$

2.7. Primjer. Norma vektora $x = (2, -i)$ u $\mathbb{C}^2$ je $||x|| = \sqrt{|2|^2 + |-i|^2}$ $= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

2.8. Norme vektora u $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{R}^{2n}$. Napišemo li koordinate $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$ vektora

$$x = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

kao parove (α_k, β_k) realnih brojeva, onda vektor x možemo shvatiti kao element

$$x = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$$

iz $\mathbb{R}^{2n}$, a norma je u oba slučaja ista:

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2} = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}.$$

3. Unitarni prostori

3.1. Skalarni produkt na vektorskom prostoru. Neka je K polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Neka je V vektorski prostor[1] nad poljem K. Funkciju

$$(\ \mid\ ) \colon V \times V \to K, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y)$$

zovemo *skalarnim produktom na vektorskom prostoru* V ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) funkcija je linearna u prvom argumentu, tj.

$$(x' + x'' \mid y) = (x' \mid y) + (x'' \mid y), \quad (\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y),$$

i funkcija je antilinearna u drugom argumentu, tj.

$$(x \mid y' + y'') = (x \mid y') + (x \mid y''), \quad (x \mid \lambda y) = \overline{\lambda}(x \mid y),$$

(2) funkcija je hermitski simetrična, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)},$$

(3) $(x \mid x) \geq 0$,

(4) $(x \mid x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.

Vektorski prostor sa zadanim skalarnim produktom zovemo *unitarnim prostorom.* U ovom paragrafu pretpostavljamo da je V unitaran.

---

[1] Ovdje prije svega mislimo na vektorske prostore $\mathbb{R}^n$ za polje $K = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}^n$ za polje $K = \mathbb{C}$, te njihove potprostore. No važni su nam i vektorski prostori funkcija $f \colon S \to K$ na danom skupu S, pri čemu su operacije zbrajanja i množenja funkcija skalarom iz K "definirane po točkama"

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in S.$$

3.2. Napomena. Za nas su najvažniji primjeri unitarnih prostora vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ s kanonskim skalarnim produktima. U matematičkoj analizi su važni primjeri unitarnih prostora vektorski prostori funkcija, kao što je, na primjer, realni vektorski prostor neprekidnih funkcija

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$$

sa skalarnim produktom

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

3.3. Potprostor unitarnog prostora je unitaran. Neka je V unitaran prostor i W vektorski potprostor[2] od V. Tada je W unitaran prostor s naslijeđenim skalarnim produktom

$$(\ \mid\ )\colon V \times V \to K, \quad (x,y) \mapsto (x \mid y),$$

jer su za vektore iz W očito zadovoljena sva svojstva (1) – (4) u definiciji skalarnog produkta. Posebno je svaki potprostor od $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$ unitaran prostor.

3.4. Napomena. Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu za svaki vektor x imamo

$$(0 \mid x) = 0. \tag{3.1}$$

Isto tako je $(x \mid 0) = \overline{(0 \mid x)} = 0$.

3.5. Napomena. Ako je V kompleksan vektorski prostor, onda je skalarni produkt vektora $(x \mid y)$ kompleksan broj. No zbog hermitske simetrije je $(x \mid x) = \overline{(x \mid x)}$, pa je za svaki vektor x u V skalarni produkt $(x \mid x)$ realan broj. Budući da u definiciji skalarnog produkta za taj realni broj zahtijevamo $(x \mid x) \geq 0$, to postoji drugi korijen $\sqrt{(x \mid x)} \geq 0$.

3.6. Norma vektora. *Norma vektora* x u unitarnom prostoru V je po definiciji

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} \geq 0.$$

Zbog svojstva (4) skalarnog produkta imamo da je

$$||x|| = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0. \tag{3.2}$$

Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu i antilinearnosti u drugom, za svaki vektor x u V i svaki skalar $\lambda \in K$ vrijedi

$$||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x \mid x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x \mid x)} = |\lambda| \cdot ||x||.$$

---

[2]Kažemo da je W potprostor vektorskog prostora V ako je zatvoren za operacije zbrajanja vektora i množenje vektora skalarom, tj. ako vrijedi:

(1) za sve $a, b \in W$ je $a + b \in W$,
(2) za sve $a \in W$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda a \in W$.

3.7. Normirani vektori. Kažemo da je vektor x u unitarnom prostoru V *normiran* ako je

$$||x|| = 1.$$

Za svaki vektor $x \neq 0$ "dijeljenjem" s normom $||x|| \neq 0$ dobijamo normirani vektor:

$$||\tfrac{1}{||x||}x|| = \tfrac{1}{||x||}||x|| = 1.$$

Kažemo da smo normirani vektor $\frac{1}{||x||}x$ dobili *normiranjem vektora* $x \neq 0$. Često umjesto $\frac{1}{||x||}x$ pišemo

$$\frac{x}{||x||}.$$

3.8. Lema. Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu za vektore x i y imamo

$$((x \mid x)y - (y \mid x)x \mid x) = (x \mid x)(y \mid x) - (y \mid x)(x \mid x) = 0.$$

3.9. Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzova nejednakost. *Za proizvoljne vektore x i y vrijedi nejednakost*

$$|(x \mid y)| \leq ||x||\,||y||, \tag{3.3}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

Dokaz. Za $y = \lambda x$ obje strane u (3.3) jednake su $|\lambda|\,||x||^2$. Ako je $x = 0$, onda zbog (3.1) i (3.2) jednakost vrijedi. Zato pretpostavimo da je $x \neq 0$. Zbog antilinearnosti skalarnog produkta u drugom argumentu, prethodne leme, linearnosti u prvom argumentu i hermitske simetrije imamo

$$\begin{aligned}
0 \leq ||(x \mid x)y - (y \mid x)x||^2 &= ((x \mid x)y - (y \mid x)x \mid (x \mid x)y - (y \mid x)x) \\
&= (x \mid x)((x \mid x)y - (y \mid x)x \mid y) - \overline{(y \mid x)}((x \mid x)y - (y \mid x)x \mid x) \\
&= ||x||^2\big((x \mid x)(y \mid y) - (y \mid x)(x \mid y)\big) \\
&= ||x||^2 \left(||x||^2||y||^2 - \overline{(x \mid y)}(x \mid y)\right) \\
&= ||x||^2 \left(||x||^2||y||^2 - |(x \mid y)|^2\right).
\end{aligned}$$

Budući da je (po pretpostavci) $||x||^2 > 0$, to povlači

$$0 \leq ||x||^2||y||^2 - |(x \mid y)|^2,$$

pa vađenjem drugog korijena slijedi nejednakost (3.3). Štoviše, jednakost u (3.3) povlači $||(x \mid x)y - (y \mid x)x|| = 0$, a to zbog (3.2) povlači $(x \mid x)y - (y \mid x)x = 0$, odnosno linearnu zavisnost vektora x i y. □

3.10. Nejednakost trokuta. *Za proizvoljne vektore x i y vrijedi nejednakost*

$$||x+y|| \le ||x|| + ||y||. \tag{3.4}$$

DOKAZ. Zbog svojstava skalarnog produkta imamo

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x+y \mid x+y) \\ &= (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) \\ &= ||x||^2 + (x \mid y) + (y \mid x) + ||y||^2 \\ &= ||x||^2 + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} + ||y||^2 \\ &= ||x||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid y) + ||y||^2 \\ &\le ||x||^2 + 2\,|(x \mid y)| + ||y||^2 \\ &\le ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2\,, \end{aligned}$$

pri čemu prva nejednakost vrijedi jer je realni dio kompleksnog broja manji ili jednak apsolutnoj vrijednosti, a druga nejednakost vrijedi zbog Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzove nejednakosti. Sada nejednakost trokuta slijedi vađenjem drugog korijena. □

4. Ortonormirane baze u $\mathbb{R}^3$ i vektorski produkt

4.1. Okomitost vektora u $\mathbb{R}^2$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2)$ iz $\mathbb{R}^2$ kao koordinate točaka u zadanom Kartezijevom sustavu euklidske ravnine. Po Pitagorinom poučku su vektori $x = (\xi_1, \xi_2)$ i $y = (\eta_1, \eta_2)$ okomiti ako i samo ako je

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2. \tag{4.1}$$

Budući da je

$$\begin{aligned} &||x+y||^2 = (\xi_1+\eta_1)^2 + (\xi_2+\eta_2)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) + \eta_1^2 + \eta_2^2, \\ &||x||^2 + ||y||^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2, \end{aligned}$$

to je uvjet okomitosti (4.1) vektora x i y ekvivalentan

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = 0. \tag{4.2}$$

4.2. Okomiti vektori. Kažemo da su vektora x i y u unitarnom prostoru V *okomiti* ili *ortogonalni* ako je

$$(x \mid y) = 0,$$

često pišemo $x \perp y$. Primijetimo da je tada i $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)} = 0$, tj. $y \perp x$.

Kažemo da je *vektor x okomit na skup vektora A*, pišemo $x \perp A$, ako je $x \perp a$ za svaki vektor a iz skupa A. Kažemo da je *skup vektor B okomit na skup vektora A* ako je svaki vektor b iz B okomit na svaki vektor a iz A, pišemo $B \perp A$. Primijetimo da je tada i $A \perp B$.

4.3. "Pitagorin poučak". Ako je $x \perp y$, onda zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu, antilinearnosti u drugom argumentu i hermitske simetrije vrijedi *"Pitagorin poučak"*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + (x \mid y) + (y \mid x) + ||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

4.4. Teorem. *Ako je $x \perp x$, onda je $x = 0$. Posebno, ako je $x \perp V$, onda je $x = 0$.*

DOKAZ. Po definiciji skalarnog produkta $(x \mid x) = 0$ povlači $x = 0$. Posebno, ako je x okomit na sve vektore iz V, onda je okomit i na sebe, pa mora biti nula. □

4.5. Teorem. *Skup vektora $v_1, \dots, v_k$ je okomit na skup A ako i samo ako je $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \perp A$.*

DOKAZ. Budući da je $v_1, \dots, v_k \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, to $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \perp A$ povlači $v_1, \dots, v_k \perp A$. Obratno, ako je $v_1, \dots, v_k \perp A$ i $a \in A$, onda linearnost skalarnog produkta u prvom argumentu za linearnu kombinaciju daje

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid a) = \lambda_1 (v_1 \mid a) + \cdots + \lambda_k (v_k \mid a) = \lambda_1 \cdot 0 + \cdots + \lambda_k \cdot 0 = 0$$

Znači da je linearna kombinacija $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ okomita na a za svaki a iz A. □

4.6. Ortonormirani skupovi. Kažemo da je skup vektora $v_1, \dots, v_k$ *ortonormirani skup* ako su vektori međusobno okomiti i ako je svaki od njih normiran. To možemo zapisati formulom

$$(v_i \mid v_j) = \delta_{ij} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Ortonormirani skup vektora $v_1, \dots, v_n$ koji razapinje prostor zovemo *ortonormiranom bazom prostora.*

4.7. Napomena. U slučaju vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ se kanonski produkt vektora $\langle x \mid y \rangle$ i kanonski skalarni produkt vektora $(x \mid y)$ podudaraju, pa možemo reći da je ortonormirana baza $v_1, \dots, v_n$ u $\mathbb{R}^n$ sama sebi dualna baza.

4.8. Teorem. *Neka je $v_1, \dots, v_k$ ortonormirani skup. Ako je*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i,$$

onda je $\xi_i = (x \mid v_i)$ za sve $i = 1, \dots, n$, odnosno

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i. \tag{4.3}$$

Posebno, ortonormirani skup je linearno nezavisan.

DOKAZ. Skalarnim množenjem

$$x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i$$

s v_j i korištenjem linearnosti skalarnog produkta u prvom argumenti dobivamo

$$(x \mid v_j) = (\sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i (v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \delta_{ij} = \xi_j.$$

Posebno za $x = 0$ slijedi $\xi_1 = \cdots = \xi_k = 0$, pa je skup vektora $v_1, \ldots, v_k$ linearno nezavisan. □

4.9. Fourierovi koeficijenti. Ako je $v_1, \ldots, v_n$ ortonormirana baza prostora, onda koordinate

$$\xi_i = (x \mid v_i)$$

vektora x zovemo *Fourierovim koeficijentima* od x.

4.10. Primjer. Vektori $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ i $v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ su ortonormirana baza u $\mathbb{R}^2$. Koordinate vektora $x = (2, 1)$ u toj bazi su

$$\xi_1 = (x \mid v_1) = 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} = 3/\sqrt{2},$$
$$\xi_2 = (x \mid v_2) = 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 1/\sqrt{2}.$$

4.11. Pitanje. Da li su Fourierovi koeficijenti vektora $x \in \mathbb{C}^n$ u ortonormiranoj bazi $v_1, \ldots, v_n$ dani formulom

$$\xi_i = (v_i \mid x)\,? \qquad \text{DA} \quad \text{NE}$$

4.12. Ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$. Ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$ lako je konstruirati. Za svaki vektor $f \neq 0$ je

$$||\tfrac{1}{||f||} f|| = \tfrac{1}{||f||} ||f|| = 1,$$

pa je vektor $f_1 = \frac{1}{||f||} f$ norme 1. Ako je $f_1 = (\alpha, \beta)$, onda je vektor $f_2 = (-\beta, \alpha)$ također norme 1 i vrijedi

$$(f_1 \mid f_2) = -\alpha\beta + \beta\alpha = 0.$$

Očito je i vektor $-f_2$ norme 1 i okomit na f_1, pa imamo dvije ortonormirane baze

$$(f_1, f_2), \quad (f_1, -f_2),$$

ili zapisano po stupcima kao matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

4.13. Zadatak. Pokažite geometrijski i algebarski da su

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

sve ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$.

4.14. Zadatak. Pokažite da su kvaternioni norme jedan

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$. Pokažite da su

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\lambda\bar{\beta} \\ \beta & \lambda\bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |\lambda| = 1, \quad \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$$

sve ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$.

4.15. Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$. Za vektore $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiramo *vektorski produkt vektora a i b* kao vektor

$$a \times b = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 \tag{4.4}$$

u $\mathbb{R}^3$, što kraće zapisujemo kao

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & e_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & e_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & e_3 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Očito je *vektorski produkt u* $\mathbb{R}^3$

$$\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (a, b) \mapsto a \times b$$

bilinearno alternirajuće preslikavanje.

4.16. Primjer.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a \times b = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & e_1 \\ 2 & 0 & e_2 \\ 1 & 3 & e_3 \end{pmatrix} = 6e_1 - 4e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.17. Mješoviti produkt u $\mathbb{R}^3$. Za $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$ imamo

$$(a \times b \mid c) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\gamma_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma_3, \tag{4.6}$$

odnosno

$$(a \times b \mid c) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Zbog alternirajućeg svojstva determinante slijedi

$$(a \times b \mid a) = 0, \qquad (a \times b \mid b) = 0. \tag{4.8}$$

4.18. Konstrukcija okomice na ravninu u $\mathbb{R}^3$. Neka su a i b linearno nezavisni vektori. Tada je linearna ljuska $\langle a, b\rangle$ ravnina u $\mathbb{R}^3$. Iz relacije (4.8) i teorema 4.5 slijedi da je $a \times b$ okomica na ravninu, odnosno

$$a \times b \perp \langle a, b\rangle.$$

Budući da je 2-dimenzionalna ravnina $\langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}^3$ zadana jednom jednadžbom, to je

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x, a \times b) = 0\}.$$

Tako je, na primjer, za vektore a i b iz primjera 4.16 ravnina $\langle a, b\rangle$ zadana jednadžbom

$$6\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 = 0,$$

odnosno

$$\langle a, b\rangle = \{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 6\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 = 0\}.$$

4.19. Teorem. *Za sve $a, b \in \mathbb{R}^3$ vrijedi*

$$\|a \times b\|^2 = \det \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) \\ (b \mid a) & (b \mid b) \end{pmatrix} = \|a\|^2\|b\|^2 - |(a \mid b)|^2. \tag{4.9}$$

DOKAZ. Primijetimo da je

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) & (a \mid c) \\ (b \mid a) & (b \mid b) & (b \mid c) \\ (c \mid a) & (c \mid b) & (c \mid c) \end{pmatrix},$$

pa iz (4.7) i Binet-Cauchyjevog teorema slijedi

$$|(a \times b \mid c)|^2 = \left(\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}\right)^2 = \det \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) & (a \mid c) \\ (b \mid a) & (b \mid b) & (b \mid c) \\ (c \mid a) & (c \mid b) & (c \mid c) \end{pmatrix}.$$

Prema (4.8) za $c = a \times b$ imamo $(a \mid c) = (b \mid c) = 0$, pa Laplaceov razvoj zadnje determinante po trećem stupcu daje

$$\|c\|^4 = \|a \times b\|^4 = (c \mid c) \det \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) \\ (b \mid a) & (b \mid b) \end{pmatrix}.$$

Pokratimo li s $\|c\|^2 = (c \mid c)$, dobijamo formulu (4.9). $\square$

Primijetimo da iz teorema 4.19 dobivamo Cauchyjevu nejednakost (3.3).

4.20. Konstrukcija ortonormirane baze u $\mathbb{R}^3$. Ako je f_1 normirani vektor u $\mathbb{R}^3$, onda nije teško naći normirani vektor f_2 okomit na f_1. Tako, na primjer, za

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

možemo "pogoditi" niz vektora okomitih na f_1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Uzmemo li, na primjer, prvi od tih vektora i normiramo li ga, dobivamo

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stavimo li

$$f_3 = f_1 \times f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ 1 & -1 & e_2 \\ 1 & 0 & e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

onda je f_1, f_2, f_3 ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$.

4.21. Primjer. Neka su a i b vektori iz primjera 4.16. Želimo li naći ortonormiranu bazu potprostora $\langle a, b \rangle$, onda možemo računati

$$g_1 = \frac{a}{||a||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g_3 = \frac{a \times b}{||a \times b||} = \frac{1}{\sqrt{56}} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$g_2 = g_1 \times g_3 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{14}} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & e_1 \\ 2 & -2 & e_2 \\ 1 & 1 & e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 14}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

vektor iz potprostora $\langle a, b \rangle$ jer je okomit na okomicu $a \times b = \sqrt{56}\, g_3$. No onda je g_1, g_2 ortonormirana baza potprostora $\langle a, b \rangle$, tj.

$$\langle a, b \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle.$$

5. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije

5.1. Teorem. *Ako je $v_1, \ldots, v_k$ ortonormirani skup u V i $x \in V$, onda je*

$$Q(x) = x - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i \perp \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Štoviše, $Q(x) \neq 0$ ako i samo ako $x \notin \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Dokaz. Skalarnim množenjem vektorom v_j dobivamo

$$\begin{aligned}(Q(x) \mid v_j) &= (x - \sum_{i=1}^{k}(x \mid v_i)v_i \mid v_j) = (x \mid v_j) - \sum_{i=1}^{k}(x \mid v_i)(v_i \mid v_j)\\ &= (x \mid v_j) - \sum_{i=1}^{k}(x \mid v_i)\delta_{ij} = (x \mid v_j) - (x \mid v_j) = 0.\end{aligned}$$

Znači da je $Q(x) \perp v_1, \ldots, v_k$, a to je prema teoremu 4.5 ekvivalentno $Q(x) \perp \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$. Ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$, onda zbog (4.3) imamo $Q(x) = 0$. Obratno, ako je $Q(x) = 0$, onda je očito $x \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$. □

5.2. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. *Ako je $a_1, \ldots, a_n$ linearno nezavisan skup vektora u unitarnom prostoru V, onda postoji ortonormirani skup vektora $v_1, \ldots, v_n$ takav da je*

$$\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle.$$

Posebno, ako je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor, onda se svaki ortonormirani skup može dopuniti do ortonormirane baze od V.

Dokaz. Konstruktivni dokaz provodimo u koracima koje zovemo *Gram-Scmidtov postupak ortogonalizacije*:

Za $n = 1$ stavimo $v_1 = \frac{1}{||a_1||}a_1$. Očito je v_1 normiran i $\langle v_1\rangle = \langle a_1\rangle$.

Pretpostavimo sada da već imamo ortonormirani skup $v_1, \ldots, v_k$ za $k < n$ takav da je

$$\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle. \tag{5.1}$$

Budući da je po pretpostavci $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ linearno nezavisan skup vektora, to a_{k+1} nije u linearnoj ljusci $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$, pa iz teorema 5.1 slijedi da je

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(a_{k+1} \mid v_i)v_i \neq 0.$$

Tada imamo normirani vektor

$$v_{k+1} = \frac{1}{||b_{k+1}||}b_{k+1} \perp v_1, \ldots, v_k,$$

pa je $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ ortonormirani skup vektora. Iz relacije

$$||b_{k+1}||\, v_{k+1} - a_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$$

i pretpostavke indukcije (5.1) slijedi

$$\langle v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\rangle = \langle a_1, \ldots, a_k, v_{k+1}\rangle = \langle a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\rangle.$$

□

5.3. Primjer. Neka je $c = (1,0)$ i $d = (1,1)$. Primijenimo li Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije na vektore c, d, dobivamo ortonormiranu bazu $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$$v_1 = \tfrac{1}{||c||}c = (1,0),$$
$$b_2 = d - (d \mid v_1)v_1 = d - v_1 = (1,1) - (1,0) = (0,1),$$
$$v_2 = \tfrac{1}{||b_2||}b_2 = (0,1).$$

Primijenimo li pak Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije na vektore d, c, dobivamo ortonormiranu bazu u_1, u_2

$$u_1 = \tfrac{1}{||d||}d = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1),$$
$$b_2 = c - (c \mid u_1)u_1 = c - \tfrac{1}{\sqrt{2}}u_1 = (1,0) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}),$$
$$u_2 = \tfrac{1}{||b_2||}b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1).$$

5.4. Primjer. Skup $\mathcal{P}$ svih polinoma s realnim koeficijentima, definiranih na intervalu $[-1,1]$, je realni vektorski prostor s operacijama zbrajanja i množenja skalarom definiranih po točkama. Na $\mathcal{P}$ imamo skalarni produkt

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Stavimo $a_k(x) = x^k$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$. Tada su polinomi $a_0, a_1, a_2, \ldots$, tj.

$$a_0(x) = 1, \quad a_1(x) = x, \quad a_2(x) = x^2, \quad \ldots$$

linearno nezavisni, pa primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije dobivamo ortonormirani skup polinoma $v_0, v_1, v_2, \ldots$:

Prvo primijetimo da je

$$(a_i \mid a_j) = \int_{-1}^{1} x^i x^j dx = \int_{-1}^{1} x^{i+j} dx = \tfrac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\Big|_{-1}^{1} = \tfrac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}.$$

Znači da je $||a_0||^2 = 2$, pa stavimo

$$v_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}a_0, \quad \text{tj.} \quad v_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}a_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Primijetimo da je

$$(a_1 \mid v_0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \mid a_0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1-(-1)^2}{2} = 0.$$

Sada računamo

$$b_1 = a_1 - (a_1 \mid v_0)v_0 = a_1, \quad \text{tj.} \quad b_1(x) = x.$$

Budući da je

$$||b_1||^2 = \tfrac{1-(-1)^3}{3} = \tfrac{2}{3},$$

stavimo

$$v_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}b_1, \quad \text{tj.} \quad v_1(x) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}b_1(x) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,x.$$

Primijetimo da je

$$(a_2 \mid v_0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(a_2 \mid a_0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1-(-1)^3}{3} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{2}{3},$$

$$(a_2 \mid v_1) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}(a_2 \mid a_1) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\tfrac{1-(-1)^4}{4} = 0.$$

Sada računamo

$$b_2 = a_2 - (a_2 \mid v_0)v_0 - (a_2 \mid v_1)v_1 = a_2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{2}{3}v_0 = a_2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{\sqrt{2}}a_0,$$

tj. $b_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Budući da je

$$\|b_2\|^2 = \|a_2 - \tfrac{1}{3}a_0\|^2 = \|a_2\|^2 - \tfrac{2}{3}(a_2 \mid a_0) + \tfrac{1}{9}\|a_0\|^2 = \tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{9}\cdot 2 = \tfrac{8}{45},$$

stavimo

$$v_2 = \sqrt{\tfrac{45}{8}}b_2, \quad \text{tj.} \quad v_2(x) = \sqrt{\tfrac{45}{8}}b_1(x) = \sqrt{\tfrac{45}{8}}\,(x^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Time smo dobili ortonormirani skup polinoma[3]

$$v_0(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad v_1(x) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,x, \quad v_2(x) = \sqrt{\tfrac{5}{2}}\,\tfrac{1}{2}\,(3x^2 - 1)$$

koji je ortonormirana baza u unitarnom 3-dimenzionalnom prostoru

$$\langle a_0, a_1, a_2\rangle = \{f \mid f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\}.$$

5.5. Koordinatizacija n-dimenzionalnog unitaranog prostora. Neka je V n-dimenzionalni unitarni prostor nad poljem $K = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Prema teoremu 5.2 postoji uređena ortonormirana baza $B = (v_1, \dots, v_n)$ prostora V. Ako je $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u K^n, onda je prema teoremu 5.2.6 koordinatizacija

$$K_B \colon V \to K^n, \qquad K_B \colon x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i \mapsto x_B = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

linearna bijekcija. Štoviše, za

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i \quad \text{i} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i,$$

imamo

$$(x \mid y) = (\sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j}(v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}\,.$$

Znači da koordinatizacija K_B *čuva skalarni produkt* u smislu

$$(x \mid y) = (K_B x \mid K_B y) = (x_B \mid y_B),$$

gdje je $(x \mid y)$ skalarni produkt vektora u V, a $(x_B \mid y_B)$ je kanonski skalarni produkt vektora u K^n.

---

[3]Polinome $P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\, v_n(x)$ zovemo *Legandreovim polinomima.*

5.6. Parsevalova jednakost. Budući da su koordinate vektora u ortonormiranoj bazi Fourierovi koeficijenti dani formulom (4.3), formulu za skalarni produkt $(x \mid y)$ iz prethodnog dokaza možemo zapisati kao tzv. *Parsevalovu jednakost*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i)\overline{(y \mid v_i)}, \tag{5.2}$$

a za normu vrijedi

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid v_i)|^2. \tag{5.3}$$

5.7. Besselova nejednakost. *Ako je $v_1, \ldots, v_k$ ortonormirani skup u V, vektor x u V i $Q(x)$ kao u teoremu 5.1, onda je*

$$||x||^2 = ||Q(x)||^2 + \sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2. \tag{5.4}$$

Posebno, vrijedi Besselova nejednakost

$$\sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2 \le ||x||^2, \tag{5.5}$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Dokaz. Stavimo

$$P(x) = x - Q(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i.$$

Tada je po definiciji i teoremu 5.1

$$x = P(x) + Q(x), \quad P(x) \perp Q(x),$$

pa je po "Pitagorinom poučku"

$$||x||^2 = ||P(x)||^2 + ||Q(x)||^2. \tag{5.6}$$

Budući da je $v_1, \ldots, v_k$ ortonormirana baza od $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, to prema (5.3) za $P(x) \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ imamo

$$||P(x)||^2 = \sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2,$$

pa jednakost (5.4) slijedi iz (5.6).

Ako u (5.5) vrijedi jednakost, onda iz (5.4) slijedi $||Q(x)|| = 0$. No onda je $Q(x) = 0$ i $x = P(x) \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Obratno, ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, onda prema (4.3) imamo $x = P(x)$, pa zbog (5.3) imamo jednakost u (5.5). $\square$

5.8. Primjer. Uz oznake iz primjera 5.4 imamo da je

$$|(f \mid v_0)|^2 + |(f \mid v_1)|^2 + |(f \mid v_2)|^2 \leq ||f||^2$$

za svaki polinom $f{\in}P$.

5.9. Potpunost ortonormiranog skupa. Neka je $v_1, \ldots, v_n$ ortonormirani skup vektora u unitarnom prostoru V. Tada je ekvivalentno:

(1) $v_1, \ldots, v_n$ je ortonormirana baza od V.
(2) Za sve x u V je

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i) v_i$$

(3) Za sve x u V vrijedi Besselova jednakost

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid v_i)|^2.$$

(4) Za sve x i y u V vrijedi Parsevalova jednakost

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i)\overline{(y \mid v_i)}.$$

DOKAZ. (1)$\Rightarrow$(4) jer vrijedi(5.2).
(4)$\Rightarrow$(3) zbog definicije norme.
(3)$\Rightarrow$(2) zbog teorema 5.7 i (4.3).
(2)$\Rightarrow$(1) jer po pretpostavci $v_1, \ldots, v_n$ razapinje prostor, a ortonormirani skup jest linearno nezavisan. □

6. Teorem o projekciji

6.1. Teorem o najboljoj aproksimaciji. *Neka je V unitaran prostor i neka je Y konačno-dimenzionalni potprostor. Tada za vektor x u V postoji jedinstveni vektor $P(x)$ u Y takav da je*

$$||x - P(x)|| \leq ||x - y|| \quad \text{za svaki} \quad y \in Y,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $y = P(x)$.

Kažemo da je od svih vektora iz potprostora Y vektor $P(x)$ najbolja aproksimacija od x.

DOKAZ. Po pretpostavci je Y konačno-dimenzionalni potprostor, pa prema teoremu 5.2 postoji ortonormirana baza $v_1, \ldots, v_k$ od Y. Stavimo

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i, \quad Q(x) = x - P(x).$$

Tada je po teoremu 5.1

$$Q(x) \perp P(x) - y \in Y,$$

pa je po “Pitagorinom poučku”

$$||x-y||^2 = ||x-P(x)+P(x)-y||^2 = ||x-P(x)||^2+||P(x)-y||^2 \geq ||x-P(x)||^2,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $||P(x)-y|| = 0$, odnosno $P(x)-y = 0$. Budući da je $||x - P(x)|| < ||x - y||$ za $y \neq P(x)$, vektor $P(x) \in Y$ mora biti jedinstven. Stoga $P(x)$ ne ovisi o izboru ortonormirane baze $v_1, \ldots, v_k$ u Y. □

6.2. Primjer. Vektori

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

čine ortonormirani skup u $\mathbb{R}^3$ i razapinju 2-dimenzionalni potprostor $Y = \langle v_1, v_2\rangle$. Za vektor

$$b = (-1, -2, 1)$$

je točka

$$P(b) = (b \mid v_1)v_1 + (b \mid v_2)v_2 = \tfrac{1}{2}(1, -1, 0) - \tfrac{2}{3}(1, 1, 1) = (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{2}{3})$$

najbolja aproksimacija od b točkama iz ravnine Y jer je za sve y iz Y

$$\tfrac{5}{\sqrt{6}} = ||(-1, -2, 1) - (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{2}{3})|| \leq ||(-1, -2, 1) - y||.$$

Vektor $Q(b) = b - P(b) = (-1, -2, 1) - (-\frac{1}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{2}{3})$ interpretiramo kao vektor-okomicu na ravninu Y sa hvatištem u točki ravnine $P(b)$ i završetkom u točki $b = Q(b) + P(b)$, a duljinu $\frac{5}{\sqrt{6}} = ||Q(b)||$ tog vektora interpretiramo kao udaljenost točke b od ravnine Y.

6.3. Primjer. Zadržimo oznake iz primjera 5.4. Neka je $g(x) = 2x+x^2$. Tada je

$$(g \mid v_0) = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad (g \mid v_1) = \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

pa je polinom

$$p = (g \mid v_0)v_0 + (g \mid v_1)v_1 = \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}a_0 + \tfrac{4}{3}\tfrac{3}{2}a_1, \quad \text{odnosno} \quad p(x) = \tfrac{1}{3} + 2x,$$

najbolja aproksimacija polinoma g u potprostoru polinoma

$$\langle a_0, a_1\rangle = \{f \mid f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Drugim riječima

$$\int_{-1}^{1} |g(x) - \tfrac{1}{3} - 2x|^2 dx \leq \int_{-1}^{1} |g(x) - \gamma_0 - \gamma_1 x|^2 dx$$

za sve $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$.

6.4. Metoda najmanjih kvadrata. Neka su dani vektori $a_1, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$ i vektor b koji nije u linearnoj ljusci $Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Tada sistem od m jednadžbi s n nepoznanica

$$Ax - b = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n - b = 0$$

nema rješenja, a najbolje što možemo tražiti su takvi $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ za koje je

$$||a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n - b||^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n - \beta_i|^2$$

najmanje moguće. Ponekad taj problem zapisujemo kao

$$||a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n - b||^2 \longrightarrow \min .$$

Prema teoremu o najboljoj aproksimaciji rješenje tog problema su oni $x \in \mathbb{R}^n$ za koje je

$$Ax = P(b), \tag{6.1}$$

gdje je $P(b)$ najbolja aproksimacija od b vektorima iz Y. Budući da je $P(b) \in Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, sistem (6.1) uvijek ima rješenje x. Rješavanje sistema (6.1) zovemo *metodom najmanjih kvadrata.* Zbog kasnije primjene primijetimo da vrijedi tvrdnja:

6.5. Lema. *Sistem (6.1) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako su vektori $a_1, \dots, a_n$ linearno nezavisni.*

6.6. Teorem o projekciji. *Neka je V unitaran prostor i neka je Y konačno-dimenzionalni potprostor. Tada za vektor x u V postoje jedinstveni vektori $P(x)$ u Y i $Q(x) \perp Y$ takvi da je*

$$x = P(x) + Q(x).$$

DOKAZ. Po pretpostavci je Y konačno-dimenzionalni potprostor, pa prema teoremu 5.2 postoji ortonormirana baza $v_1, \dots, v_k$ od Y. Stavimo

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i, \quad Q(x) = x - P(x).$$

Tada je $x = P(x) + Q(x)$ traženi rastav jer je prema teoremu 5.1 $Q(x) \perp Y$.

Dokažimo jedinstvenost. Ako je $x = P(x) + Q(x) = y + u$ za neki $y \in Y$ i $u \perp Y$, onda je $P(x) - y = u - Q(y)$ i vrijedi

$$P(x) - y \in Y \quad \text{i} \quad u - Q(x) \perp Y.$$

Odavle slijedi

$$u - Q(x) \perp u - Q(x),$$

što povlači $u - Q(x) = 0$, odnosno $u = Q(x)$. No onda mora biti i $y = P(x)$. $\square$

6.7. Sistem jednadžbi za metodu najmanjih kvadrata. Neka V unitaran prostor, b vektor u V i $Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ potprostor u V razapet vektorima $a_1, \dots, a_n$. Prema teoremu 6.6 postoji jedinstveni

$$P(b) = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \in Y$$

takav da je

$$b - P(b) \perp Y.$$

To je, prema teoremu 4.5, ekvivalentno

$$(\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n - b \mid a_i) = 0 \quad \text{za sve} \quad i = 1, \dots, n,$$

ili, zapisano kao sistem jednadžbi,

$$\begin{aligned}
&(a_1 \mid a_1)\xi_1 + (a_2 \mid a_1)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_1)\xi_n = (b \mid a_1), \\
&(a_1 \mid a_2)\xi_1 + (a_2 \mid a_2)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_2)\xi_n = (b \mid a_2), \\
&\qquad\vdots \\
&(a_1 \mid a_n)\xi_1 + (a_2 \mid a_n)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_n)\xi_n = (b \mid a_n).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Znači da najbolju aproksimaciju $P(b) = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n$ možemo tražiti rješavanjem sistema jednadžbi (6.2).

6.8. Primjer. Vratimo se primjeru 6.2: zadan je ortonormirani skup

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

u $\mathbb{R}^3$ i vektor

$$b = (-1, -2, 1),$$

a traži se najbolja aproksimacija od b u 2-dimenzionalnom potprostoru $Y = \langle v_1, v_2 \rangle$. Da bi učinili primjer zanimljivijim, stavimo

$$a_1 = \sqrt{2}v_1 + \sqrt{3}v_2 = (2, 0, 1), \; a_2 = \sqrt{3}v_2 = (1, 1, 1),$$

$$a_3 = \sqrt{2}v_1 - \sqrt{3}v_2 = (0, -2, -1),$$

pa još uvijek imamo isti $Y = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Sada tražimo

$$P(b) = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$$

rješavanjem sistema jednadžbi (6.2):

$$\begin{aligned}
5\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 &= -1, \\
3\xi_1 + 3\xi_2 - 3\xi_3 &= -2, \\
-\xi_1 - 3\xi_2 + 5\xi_3 &= 3.
\end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema Gaussovom metodom eliminacija vidimo da sistem nema jedinstveno rješenje. Lako se provjeri da je $x = (\frac{3}{6}, -\frac{7}{6}, 0)$ jedno rješenje, pa je

$$P(b) = \tfrac{3}{6}a_1 - \tfrac{7}{6}a_2 = \tfrac{3}{6}(2, 0, 1) - \tfrac{7}{6}(1, 1, 1) = (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{4}{6}).$$

6.9. Primjer. Zamislimo si da eksperimentalno mjerimo veličine x i y koje su vezane “zakonom”

$$y = Ax + B,$$

a na nama je odrediti koeficijente A i B. Recimo da smo za (x, y) redom dobili $(1, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, 5)$. Tada sistem

$$\begin{aligned} A + B &= 2, \\ 2A + B &= 3, \\ 3A + B &= 5, \end{aligned}$$

nema rješenja i najbolje što možemo je da nepoznanice A i B odredimo metodom najmanjih kvadrata. Sistem prvo zapišemo kao $Aa_1 + Ba_2 = b$, tj.

$$A(1, 2, 3) + B(1, 1, 1) = (2, 3, 5) \quad \text{ili} \quad A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}.$$

a odgovarajući sistem (6.2) kao

$$\begin{aligned} (a_1 \mid a_1)A + (a_2 \mid a_1)B &= (b \mid a_1), \\ (a_1 \mid a_2)A + (a_2 \mid a_2)B &= (b \mid a_2). \end{aligned}$$

To je u našem primjeru sistem

$$\begin{aligned} 14A + 6B &= 23, \\ 6A + 3B &= 10, \end{aligned}$$

a rješenje tog sistema je $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{1}{3}$. Znači da je za taj izbor A i B suma kvadrata

$$|A + B - 2|^2 + |2A + B - 3|^2 + |3A + B - 5|^2$$

najmanja moguća. Nacrtajte pravac $y = \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{3}$ i točke $(1, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, 5)$ “dobivene mjerenjem”.

6.10. Ortogonalni komplement potprostora. Neka je V unitaran prostor i Y potprostor od V. Tada je zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu

$$Y^\perp = \{x \in V \mid (x \mid y) = 0 \text{ za sve } y \in Y\}$$

potprostor od Y. Potprostor $Y^\perp$ zovemo ga *ortogonalnim komplementom od* Y.

6.11. Suma potprostora. *Neka su W i U potprostori od V. Skup svih vektora*

$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}$$

zovemo sumom potprostora. Suma potprostora $W + U$ je vektorski prostor.

DOKAZ. Za vektore $w, w', w'' \in W$ i $u, u', u'' \in U$ i skalar λ imamo

$$(w'+u')+(w''+u'') = (w'+w'')+(u'+u''), \quad \lambda(w+u) = \lambda w+\lambda u \in W+U.$$

□

6.12. Ortogonalna suma potprostora. *Neka su W i U potprostori od V. Ako je $W \perp U$, onda $W+U$ zovemo ortogonalnom sumom potprostora i pišemo*

$$W \oplus U.$$

U tom slučaju imamo jedinstveni prikaz svakog elementa $x \in W \oplus U$ kao sumu

$$x = w + u, \quad w \in W,\ u \in U.$$

DOKAZ. Ako je $w + u = w' + u'$ za neke $w' \in W$ i $u' \in U$, onda je

$$w - w' = u' - u$$

element iz W i U, pa okomitost $W \perp U$ povlači

$$||w - w'||^2 = (w - w' \mid w - w') = (w - w' \mid u' - u) = 0.$$

No tada zbog svojstva norme (3.2) mora biti $w - w' = 0$, što povlači $w' = w$, a onda i $u' = u$. □

Uz uvedenu terminologiju teorem 6.6 možemo iskazati na sljedeći način

6.13. Teorem o projekciji. *Neka je V unitaran prostor i neka je Y konačno-dimenzionalni potprostor. Tada je*

$$V = Y \oplus Y^{\perp}.$$

6.14. Teorem. *Neka je V unitaran konačno-dimenzionalni prostor i neka je Y potprostor. Tada je*

$$\dim Y + \dim(Y^{\perp}) = \dim V \qquad \text{i} \qquad (Y^{\perp})^{\perp} = Y.$$

DOKAZ. □

Neka je $v_1, \ldots, v_k$ ortonormirana baza u Y i $u_1, \ldots, u_r$ ortonormirana baza u $Y^{\perp}$. Tada je $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r$ ortonormirani skup u V. Budući da je po teoremu o projekciji svaki vektor x iz V suma vektora iz Y i $Y^{\perp}$, to je x linearna kombinacija vektora $v_1, \ldots, v_k$ i vektora $u_1, \ldots, u_r$. No to onda znači da je skup

$$v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r$$

ortonormirana baza od V, pa je $k + r = \dim V$. Nadalje, vektor

$$x = \sum_{i=1}^{k}(x \mid v_i)v_i + \sum_{j=1}^{r}(x \mid u_j)u_j$$

je okomit na $Y^{\perp} = \langle u_1, \ldots, u_r\rangle$ ako i samo ako su mu Fourierovi koeficijenti $(x \mid u_1) = \cdots = (x \mid u_r) = 0$, odnosno ako i samo ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle = Y$. Znači da je $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$.