Linearna algebra za fizičare, zimski semestar 2006.

Mirko Primc

Sadržaj

POGLAVLJE 5

Potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$

1. Potprostor i linearna ljuska vektora

1.1. Definicija potprostora vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Neka je W neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je W *potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$ ako je *zatvoren za operacije zbrajanja vektora i množenje vektora skalarom*, tj. ako vrijedi:

(1) za sve $a, b \in W$ je $a + b \in W$,
(2) za sve $a \in W$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda a \in W$.

1.2. Nul-potprostor. Neka je $W = \{0\}$, tj. skup čiji je jedini element nula u $\mathbb{R}^n$. Budući da je $0 + 0 = 0$ i $\lambda 0 = 0$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, to je $W = \{0\}$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Potprostor $\{0\}$ zovemo *nul-potprostorom vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$ i označavamo ga s 0.

1.3. Trivijalni potprostori. Očito je $W = \mathbb{R}^n$ potprostor od $\mathbb{R}^n$. Potprostore 0 i $\mathbb{R}^n$ zovemo *trivijalnim potprostorima* vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

1.4. Primjer. Skup W svih vektora u $\mathbb{R}^3$ oblika

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je potprostor. Interpretiramo li $\mathbb{R}^3$ geometrijski, onda je potprostor W ravnina u prostoru koja sadrži prve dvije koordinatne osi.

1.5. Primjer. Skup

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 > 0 \right\}$$

nije potprostor u $\mathbb{R}^2$. Doduše, za $a, b \in W$ vrijedi $a + b \in W$, ali $(-1)a$ nije u W, pa općenito ni λa nije u W (nacrtajte sliku).

1.6. Pitanje. Da li je skup

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \right\}$$

potprostor u $\mathbb{R}^2$?   DA   NE

1.7. Svojstva operacija zbrajanja i množenja skalarom elemenata potprostora. Po definiciji potprostora W vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, na W imamo definirane operacija zbrajanja i množenja skalarom. Operacija zbrajanja je asocijativna i komutativna. Ako je w vektor iz W, onda je po pretpostavci $0 = 0 \cdot w$ iz W, pa potprostor W ima i element 0 za operaciju zbrajanja. Budući da je $-w = (-1) \cdot w$, to zajedno s elementom w potprostor W sadrži i suprotan element $-w$. Znači da operacija zbrajanja vektora iz W ima sva algebarska svojstva zbrajanja vektora u $\mathbb{R}^n$ popisana u točki 1.1.8. Očito je da i operacija množenja vektora iz W skalarom ima sva algebarska svojstva popisana u točki 1.1.8.

1.8. Linearna kombinacija elemenata potprostora. Ako je W potprostor i $a_1, \ldots, a_k$ vektori u W, onda iz definicije neposredno slijedi da je i svaka linearna kombinacija $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ element potprostora W.

1.9. Linearna ljuska vektora. Neka su $v_1, \ldots, v_k$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada skup

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

svih linearnih kombinacija vektora $v_1, \ldots, v_k$ zovemo *linearnom ljuskom vektora* $v_1, \ldots, v_k$.

1.10. Primjer. Neka je e_1, e_2, e_3 kanonska baza u $\mathbb{R}^3$. Tada je linearna ljuska $W = \langle e_1, e_2 \rangle$ vektora e_1 i e_2 skup svih linearnih kombinacija oblika

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.11. Zadatak. Neka je $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Interpretirajte $\mathbb{R}^2$ kao ravninu i nacrtajte linearne ljuske

$$\langle v_1 \rangle, \quad \langle v_2 \rangle \quad \text{i} \quad \langle v_1, v_2 \rangle.$$

1.12. Lema. *Linearna ljuska $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Nadalje, $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ za sve $i = 1, \ldots, k$.*

DOKAZ. Za $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ i $v' = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_k v_k$ imamo

$$v + v' = (\lambda_1 + \lambda'_1) v_1 + \cdots + (\lambda_k + \lambda'_k) v_k, \quad \mu v = \mu \lambda_1 v_1 + \cdots + \mu \lambda_k v_k,$$

pa su vektori $v + v'$ i μv u $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Znači da je $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ potprostor. Nadalje, za vektor v_i imamo

$$v_i = 0 v_1 + \cdots + 0 v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 v_{i+1} + \cdots + 0 v_k,$$

pa je $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. □

1.13. Linearna ljuska vektora i elementarne transformacije. *Neka je niz vektora $v_1', \ldots, v_k'$ dobiven elementarnim transformacijama iz niza $v_1, \ldots, v_k$. Tada je*

$$\langle v_1', \ldots, v_k' \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

DOKAZ. Pretpostavimo da smo proveli elementarnu transformaciju oblika

$$v_1' = v_1 + \mu v_2,\ v_2' = v_2, \ldots,\ v_k' = v_k.$$

Neka je $\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_k v_k' \in \langle v_1', \ldots, v_k' \rangle$. Tada je

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_n v_n' = \lambda_1 v_1 + (\lambda_1 \mu + \lambda_2) v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + \lambda_n v_n \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Time smo dokazali $\langle v_1', \ldots, v_k' \rangle \subset \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Budući da je inverzna elementarna transformacija istoga tipa, slijedi i $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subset \langle v_1', \ldots, v_k' \rangle$. Tvrdnja leme za ostale slučajeve elementarnih transformacija dokazuje se na sličan način. $\square$

1.14. Primjer. Možemo se zapitati što je linearna ljuska vektora

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

U ovom primjeru niz vektora v_1, v_2, v_3 možemo elementarnim transformacijama na stupcima prevesti u vektore e_2, e_3, e_4 kanonske baze u $\mathbb{R}^4$. Jedan od načina je da prvo poništavamo elemente u "gornjem trokutu"

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

zatim nastavljamo s elementarnim transformacijama na stupcima poništavajući elemente u "donjem trokutu", prvo poništavajući elemente u trećem retku koristeći treći stupac

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom, pomoću drugog stupca, dovršimo postupak

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prema točki 1.13 imamo da je linearna ljuska

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

1.15. Lema. *Za vektore* $v_1, \dots, v_m$ *i* $p < m$ *vrijedi*

$$\langle v_1, \dots, v_p \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Naime, proširimo linearne kombinacije vektora $v_1, \dots, v_p$ do linearnih kombinacija vektora $v_1, \dots, v_m$ "dodavanjem nule"

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + 0v_{p+1} + \cdots + 0v_m.$$

1.16. Lema. $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1} \rangle$ *ako i samo ako je*

$$v_{m+1} \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Naime, prema lemi 1.12 je $v_{m+1} \in \langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1} \rangle$, pa jednakost linearnih ljuski povlači $v_{m+1} \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Obratno, ako je $v_{m+1} \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, odnosno $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$, onda za linearne kombinacije imamo

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} \left(\sum_{i=1}^m \mu_i v_i \right) = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_m v_m,$$

što povlači $\langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1} \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Jednakost linearnih ljuski sada slijedi iz prethodne leme.

2. Baza potprostora i koordinatizacija

2.1. Izvodnice i baza potprostora. Za vektore $a_1, \dots, a_k$ kažemo da su *izvodnice potprostora* $W \neq 0$, ili da *razapinju* W, ako je

$$W = \langle a_1, \dots, a_k \rangle.$$

Linearno nezavisne izvodnice $a_1, \dots, a_k$ potprostora $W \neq 0$ zovemo *bazom potprostora* W. Drugim riječima, vektori $a_1, \dots, a_k$ iz W su baza od W ako se svaki vektor w iz W može na jedinstveni način prikazati kao linearna kombinacija

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k.$$

Koeficijente λ_i u jedinstvenom prikazu $w = \sum \lambda_i a_i$ zovemo *koordinatama vektora* w *u bazi* $a_1, \dots, a_k$. Kažemo da je prazan skup $\emptyset$ *baza potprostora* 0.

2.2. Primjer. Vektori v_1, v_2, v_3 iz primjera 1.14 su linearno nezavisni jer se elementarnim transformacijama mogu svesti do linearno nezavisnih vektora e_2, e_3, e_4 u $\mathbb{R}^4$. Znači da su vektori v_1, v_2, v_3 baza potprostora

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Štoviše, vidimo i da je e_2, e_3, e_4 druga baza tog potprostora.

2.3. Teorem o nadopunjavanju linearno nezavisnog skupa do baze potprostora. *Neka je $W \neq 0$ potprostor i neka su $v_1, \dots, v_p$ linearno nezavisni vektori u W. Ako $v_1, \dots, v_p$ nije baza od W, onda postoji $v \in W$ takav da su*

$$v_1, \dots, v_p, v$$

linearno nezavisni vektori u W. Nadalje, svaki linearno nezavisan skup $v_1, \dots, v_p$ u W koji nije baza od W možemo nadopuniti do baze

$$v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_k$$

potprostora W.

Dokaz. Ako linearno nezavisan skup $v_1, \dots, v_p$ ne razapinje potprostor W, onda postoji vektor $v \in W$ koji nije linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_p$. Tada su vektori

$$v, v_1, \dots, v_p$$

iz W linearno nezavisni. Naime, ako je

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0,$$

onda mora biti $\lambda = 0$, jer bi u suprotnom imali da je v linearna kombinacija

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda} v_p.$$

No $\lambda = 0$ daje

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0,$$

pa zbog linearne nezavisnosti $v_1, \dots, v_p$ slijedi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Budući da je broj linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^n$ manji ili jednak n, to proširivanjem linearno nezavisnog skupa u W dolazimo do baze $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_k$ potprostora W za neki $k \leq n$. $\square$

Već smo rekli da je prazan skup baza potprostora $W = 0$. Ako je $W \neq 0$, onda postoji vektor $w \neq 0$ i $\{w\}$ je linearno nezavisan skup. Nadopunjavanjem do baze dobivamo:

2.4. Teorem. *Svaki potprostor W vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ ima bazu.*

2.5. Koordinatizacija potprostora. Neka je $W \neq 0$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Neka je $B = (b_1, \dots, b_k)$ uređena baza potprostora W. Tada je dobro definirano preslikavanje

$$K_B \colon W \to \mathbb{R}^k$$

koje vektoru w iz W pridružuje k-torku njegovih koordinata λ_i u bazi B

$$w = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k \mapsto w_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Preslikavanje K_B zovemo *koordinatizacijom potprostora W*.

2.6. Teorem. *Koordinatizacija K_B je linearna bijekcija.*

DOKAZ. Očito da jednakost koordinata

$$x_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = y_B$$

povlači jednakost vektora $x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_k b_k = y$, pa je koordinatizacija K_B injekcija. Budući da za svaku k-torku brojeva možemo napisati linearnu kombinaciju vektora $b_1, \ldots, b_k$, to je koordinatizacija K_B surjekcija s W na $\mathbb{R}^k$.

Zbog jedinstvenosti zapisa vektora u bazi za operacije zbrajanja i množenja vektora skalarom

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) b_i, \quad \kappa \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \right) = \sum_{i=1}^{k} (\kappa \lambda_i) b_i.$$

imamo odgovarajuće zbrajanje koordinata u $\mathbb{R}^k$ i množenje koordinata skalarom

$$(x+y)_B = x_B + y_B, \qquad (\kappa x)_B = \kappa x_B.$$

Znači da koordinatizacija K_B ima *svojstvo linearnosti*:

$$K_B(x+y) = K_B(x) + K_B(y) \quad \text{i} \quad K_B(\kappa x) = \kappa K_B(x)$$

za sve vektore $x, y \in W$ i skalare $\kappa \in \mathbb{R}$. □

2.7. Inverz koordinatizacije je linearno preslikavanje. Kao u dokazu teorema 3.2.1 vidimo da i inverzno preslikavanje

$$K_B^{-1} \colon \mathbb{R}^k \to W$$

ima *svojstvo linearnosti*:

$$K_B^{-1}(x+y) = K_B^{-1}(x) + K_B^{-1}(y) \quad \text{i} \quad K_B^{-1}(\kappa x) = \kappa K_B^{-1}(x)$$

za sve vektore $x, y \in \mathbb{R}^k$ i skalare $\kappa \in \mathbb{R}$.

2.8. Dimenzija potprostora. *Svake dvije baze potprostora $W \neq 0$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ imaju isti broj elemenata. Taj broj zovemo dimenzijom od W i označavamo s $\dim W$.*

DOKAZ. Neka su $B = (b_1, \ldots, b_k)$ i $C = (c_1, \ldots, c_r)$ dvije uređene baze potprostora W i

$$K_B \colon W \to \mathbb{R}^k \quad \text{i} \quad K_C \colon W \to \mathbb{R}^r$$

pripadne koordinatizacije. Tada je kompozicija

$$K_C \circ K_B^{-1} \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^r$$

linearna bijekcija, pa iz teorema 3.1.12 slijedi $k = r$. □

Kažemo da je 0 dimenzija nul-potprostora.

2.9. Teorem. *Neka su V i W potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ i neka je $V \subset W$. Tada je*

$$\dim V \leq \dim W \tag{2.1}$$

i jednakost dimenzija $\dim V = \dim W$ *povlači jednakost potprostora* $V = W$.

DOKAZ. Prema teoremu 2.3 svaku bazu potprostora V možemo nadopuniti do baze potprostora W, pa vrijedi nejednakost (2.1). Neka je $v_1, \dots, v_p$ baza potprostora V i neka je $\dim V = \dim W = p$. Tada linearno nezavisan skup vektora $v_1, \dots, v_p$ u W mora biti baza od W, jer bi u protivnom, zbog teorema 2.3, potprostor W imao bazu s više od p elemenata, suprotno pretpostavci $\dim W = p$. No tada je $V = \langle v_1, \dots, v_p \rangle = W$. □

3. Slika linearnog preslikavanja

3.1. Slika linearnog operatora. Neka je $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje. *Slika preslikavanja A* je skup

$$\mathrm{im} A = \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^k\}.$$

Očito je A surjekcija ako i samo ako je $\mathrm{im} A = \mathbb{R}^n$.

3.2. Lema. *Slika linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Štoviše,*

$$\mathrm{im} A = \langle Ae_1, \dots, Ae_k \rangle. \tag{3.1}$$

DOKAZ. $Ax, Ay \in \mathrm{im} A$ povlači $Ax + Ay = A(x+y) \in \mathrm{im} A$. Također imamo $\lambda Ax = A(\lambda x) \in \mathrm{im} A$. Znači da je slika od A potprostor vektorskg prostora $\mathbb{R}^n$. Budući da za vektor $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_k e_k$ u $\mathbb{R}^k$ imamo

$$Ax = \xi_1 Ae_1 + \dots + \xi_k Ae_k,$$

to očito vrijedi (3.1). □

3.3. Primjer. Slika linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadanog matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je, prema rezultatu primjera 1.14, potprostor $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ u $\mathbb{R}^4$.

3.4. Rang matrice i linearnog operatora. *Rang linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$* je dimenzija slike od A, tj.

$$\operatorname{rang} A = \dim \mathrm{im} A = \dim \langle Ae_1, \dots, Ae_k \rangle.$$

Rang matrice $A = (a_1, \dots, a_k)$ je rang pripadnog preslikavanja, tj.

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(a_1, \dots, a_k) = \dim \langle a_1, \dots, a_k \rangle.$$

3.5. Rang i elementarne transformacije. Prema točki 1.13 elementarne transformacije ne mijenjaju linearnu ljusku, pa to svojstvo koristimo za računaje ranga: elementarnim transformacijama svedemo vektore $A = (a_1, \dots, a_k)$ na oblik

$$(c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0)$$

gdje su $c_1, \dots, c_r$ linearno nezavisni vektori, obično u "trokutastoj formi". Tada su ti vektori baza potprostora $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, pa je $\operatorname{rang} A = r$. Na primjer,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa zaključujemo da je $\operatorname{rang} A = 2$.

3.6. Kronecker-Capellijev teorem. *Neka je linearno preslikavanje* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *zadano na kanonskoj bazi matricom* $(a_1, \dots, a_n)$ *i neka je zadan vektor* b *u* $\mathbb{R}^m$. *Tada sistem jednadžbi*

$$Ax = b$$

ima rješenje ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema, tj. $\operatorname{rang}(a_1, \dots, a_n) = \operatorname{rang}(a_1, \dots, a_n, b)$.

Dokaz. Sistem jednadžbi $Ax = b$ ima rješenje ako i samo ako je b u slici operatora A, tj.

$$b \in \operatorname{im} A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle. \tag{3.2}$$

To je, prema lemi 1.16, ekvivalentno

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle. \tag{3.3}$$

No prema teoremu 2.9 jednakost (3.3) je ekvivalentna jednakosti

$$\dim\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \dim\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle.$$

□

3.7. Primjer. Sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

iz primjera 2.8.6 nema rješenja. To smo u točki 2.8.8 vidjeli Gaussovom metodom izvođenjem elementarnih transformacija na recima proširene matrice sistema:

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\1&2&-1&2\\-1&1&1&0\\-1&1&2&2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&3&-3&3\\-1&1&1&0\\-1&1&2&2\end{pmatrix}\mapsto$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&3&-3&3\\0&0&3&-1\\-1&1&2&2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&3&-3&3\\0&0&3&-1\\0&0&4&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&3&-3&3\\0&0&3&-1\\0&0&0&\frac{7}{3}\end{pmatrix},$$

pa sistem (3.4) nema rješenja jer jednadžba

$$0\xi_1+0\xi_2+0\xi_3=\tfrac{7}{3}$$

nema rješenja. S druge strane, elementarnim transformacijama na stupcima proširene matrice sistema dobivamo

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\1&2&-1&2\\-1&1&1&0\\-1&1&2&2\end{pmatrix}\mapsto\ldots\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&3&-3&3\\-1&0&3&-1\\-1&0&4&1\end{pmatrix}\mapsto\ldots$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&3&0&0\\-1&0&3&-1\\-1&0&4&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&3&0&0\\-1&0&1&-1\\-1&0&\frac{4}{3}&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&3&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&\frac{4}{3}&\frac{7}{3}\end{pmatrix},$$

pa zaključujemo da je $\operatorname{rang} A=3$ i $\operatorname{rang}(A,b)=4$, pa iz Kronecker-Capellijevog teorema slijedi da sistem (3.4) nema rješenja.

4. Jezgra linearnog preslikavanja

4.1. Jezgra linearnog operatora. Neka je $A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. *Jezgra preslikavanja A* je skup

$$\ker A=\{x\in\mathbb{R}^n\mid Ax=0\}.$$

Prema teoremu 3.1.7 A je injekcija ako i samo ako je $\ker A=0$.

4.2. Lema. *Jezgra linearnog preslikavanja $A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. $x,y\in\ker A$ povlači $A(x+y)=Ax+Ay=0$, odnosno $x+y\in\ker A$. Također imamo $A(\lambda x)=\lambda Ax=0$, pa je $\lambda x\in\ker A$. Znači da je jezgra od A potprostor vektorskg prostora $\mathbb{R}^n$. □

4.3. Defekt matrice i linearnog operatora. *Defekt linearnog preslikavanja* $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je dimenzija jezgre od A, tj.

$$\operatorname{defekt} A = \dim \ker A.$$

Defekt matrice $A = (a_1, \dots, a_k)$ je defekt pripadnog preslikavanja.

4.4. Pitanje jedinstvenosti rješenja sistema jednadžbi. Pretpostavimo da sistem jednadžbi

$$Ax = b$$

ima rješenje, označimo ga s x_{part} i zovimo ga *partikularnim rješenjem* sistema. Sistem

$$Ax = 0$$

zovemo *pripadnim homogenim sistemom.* Po definiciji je jezgra od A skup svih rješenja pripadnog homogenog sistema.

Teorem. *Skup svih rješenja sistema $Ax = b$ je*

$$x_{part} + \ker A = \{x_{part} + y \mid Ay = 0\}.$$

Posebno, x_{part} je jedinstveno rješenje sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $\ker A = 0$.

Dokaz. Po pretpostavci je $Ax_{\mathrm{part}} = b$. Ako je $Ax = b$, onda za $y = x - x_{\mathrm{part}}$ imamo $Ay = A(x - x_{\mathrm{part}}) = Ax - Ax_{\mathrm{part}} = b - b = 0$. To znači da je svako rješenje sistema $Ax = b$ oblika

$$x = x_{\mathrm{part}} + y, \quad Ay = 0.$$

Obratno, za vektor x tog oblika imamo $Ax = A(x_{\mathrm{part}} + y) = Ax_{\mathrm{part}} + Ay = b + 0 = b$, tj. x je rješenje sistema. □

Napomena. Primijetimo da "odstupanje" od jedinstvenosti rješenja "mjeri" defekt operatora A.

4.5. Primjer. Očito sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 4,\\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - 5\xi_3 &= 4,\\ 4\xi_1 + 5\xi_2 - 9\xi_3 &= 8 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ima jedno rješenje

$$x_{\mathrm{part}} = \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rješavanjem pripadnog homogenog sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 0,\\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - 5\xi_3 &= 0,\\ 4\xi_1 + 5\xi_2 - 9\xi_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

dobivamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & -9 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa su sva rješenja pripadnog homogenog sistema

$$\xi_3 = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \xi_2 = \xi_3 = \lambda, \quad \xi_1 = \xi_3 = \lambda.$$

Znači da su sva rješenja x sistema jednadžbi (4.1) oblika

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.6. Teorem o rangu i defektu. *Neka je* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linearno preslikavanje. Tada je*

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{defekt} A = n.$$

Dokaz. Neka je

$$v_1, \ldots, v_p$$

baza jezgre od A. Taj linearno nezavisan skup u $\mathbb{R}^n$ nadopunimo do baze

$$v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n.$$

Vektori $Av_1, \ldots, Av_n$ razapinju sliku preslikavanja A. No vektori $v_1, \ldots, v_p$ su u jezgri preslikavanja A i za njih je $Av_i = 0$, pa imamo da vektori

$$Av_{p+1}, \ldots, Av_n$$

razapinju sliku preslikavanja A. Za dokaz teorema dovoljno je dokazati da je to baza slike preslikavanja A, tj. da je taj skup linearno nezavisan. Zato pretpostavljamo da je

$$\lambda_{p+1} Av_{p+1} + \cdots + \lambda_n Av_n = 0 \tag{4.3}$$

i dokazujemo da su svi koeficijenti nula. Zbog linearnosti preslikavanja A iz (4.3) slijedi

$$A(\lambda_{p+1} v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n) = 0.$$

Znači da je vektor $\lambda_{p+1} v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n$ u jezgri preslikavanja A. Prikažemo li taj vektor u bazi jezgre

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

dobivamo

$$-\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Budući da je $v_1, \ldots, v_n$ baza prostora $\mathbb{R}^n$, svi koeficijenti u toj kombinaciji moraju biti nula. Posebno je $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, što je i trebalo dokazati. $\square$

4.7. Primjer. Neka je homogeni sistem jednadžbi $Ax = 0$ zadan matricom iz točke 3.5. Budući da je $\text{rang}A = 2$, to je $\text{defekt}A = 4 - 2 = 2$, tj. jezgra od A ima bazu od dva vektora. Riješavanjem sistema Gaussovom metodom dobivamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je početni sistem $Ax = 0$ ekvivalentan sistemu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

koji je oblika

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix} x = 0.$$

Bazu potprostora $\ker A$ sada tražimo u obliku

$$v_4 = (\xi_1, \xi_2, 0, 1), \quad v_3 = (\eta_1, \eta_2, 1, 0),$$

što je lako riješiti:

$$v_4 = (-\alpha_{14}, -\alpha_{24}, 0, 1) = -\alpha_{14}e_1 - \alpha_{24}e_2 + e_4,$$
$$v_3 = (-\alpha_{13}, -\alpha_{23}, 1, 0) = -\alpha_{13}e_1 - \alpha_{23}e_2 + e_3.$$

U našem konkretnom primjeru to je

$$v_4 = (-1, 1, 0, 1) = -e_1 + e_2 + e_4, \quad v_3 = (-1, -1, 1, 0) = -e_1 - e_2 + e_3.$$

Znači da je $\ker A$ skup svih vektora oblika

$$\lambda_4 v_4 + \lambda_3 v_3, \qquad \lambda_4, \lambda_3 \mathbb{R}.$$

4.8. Baza jezgre operatora. Prethodni nam primjer ukazuje na postupak kojim općenito tražimo bazu jezgre $\ker A$: Gaussovim eliminacijama $m \times n$ sistem $Ax = 0$ svedemo na ekvivalentan sistem

$$\begin{pmatrix} 0\dots & 1 & \alpha_{1j_1} & \dots & 0 & \alpha_{1j_2} & \dots & 0 & \alpha_{1j_3} & \dots \\ 0\dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{2j_2} & \dots & 0 & \alpha_{2j_3} & \dots \\ 0\dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{3j_3} & \dots \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \end{pmatrix} x = 0, \tag{4.4}$$

pri čemu je $j_1 > j_2 > j_3 > \dots$. Ako je $\text{rang}A = r$, onda je matrica sistema (4.4) oblika

$$(0, \dots, 0, e_1, a_{j_1}, \dots, e_2, a_{j_2}, \dots, e_r, a_{j_r}, \dots),$$

a stupcima 0 i a_j odgovara $n - r$ vektora baze potprostora $\ker A$:

$$v_j = \begin{cases} e_j & \text{za} \quad j \leq j_1 - 2, \\ -\alpha_{1j}e_1 - \alpha_{2j}e_2 - \dots - \alpha_{sj}e_s + e_j & \text{za stupce} \quad e_s, \dots, a_j, \dots, e_{s+1}. \end{cases}$$

5. Osnovni teorem o rangu

5.1. Računanje ranga matrice elementarnim transformacijama redaka. Jezgra linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je skup svih rješenja homogenog sistema jednadžbi

$$Ax = 0.$$

Elementarnim transformacijama redaka matrice $A = (\alpha_{ij})$ dobivamo ekvivalentan sistem

$$Bx = 0.$$

Ovdje je matrica $B = (\beta_{ij})$ matrica linearnog preslikavanja $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ koje je (u principu) različito od A, ali su skupovi rješenja homogene jednadžbe isti $\ker A = \ker B$, pa je onda i

$$\operatorname{defekt} A = \dim\ker A = \dim\ker B = \operatorname{defekt} B.$$

Sada iz teorema o rangu i defektu slijedi

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B.$$

5.2. Rang matrice "po recima i stupcima". Iz gornjeg razmatranja slijedi da pri računanja ranga matrice možemo "istovremeno" koristiti elementarne transformacije i na stupcima i na recima matrice. Na primjer, postupak na primjeru iz točke 3.5 mogli smo nastaviti izvođenjem elementarnih transformacija na recima

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, 0, 0),$$

pri čemu je rang zadnje matrice očito 2.

Općenito $m \times n$ matricu A možemo elementarnim transformacijama na stupcima i recima svesti na oblik

$$(e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0) \tag{5.1}$$

iz kojeg očitavamo $\operatorname{rang} A = r$.

Naime, ako matrica A tipa $m \times n$ nije nula, onda eventualnom zamjenom stupaca i/ili redaka problem svedemo na slučaj $\alpha_{11} \neq 0$. Sada podijelimo prvi stupac s α_{11} i "eliminiramo" sve preostale elemente u prvom retku, a potom i u prvom stupcu. Znači da smo dobili matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha'_{m2} & \dots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix}$$

i problem sveli na matricu tipa $(m-1) \times (n-1)$.

Primijetimo da su $e_1, \dots, e_r$ u (5.1) prvih r elemenata kanonske baze u $\mathbb{R}^m$. Transponirana matrica ima "isti oblik"

$$(e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0)^\top = (e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0), \tag{5.2}$$

"jedino" što je tipa $n \times m$ i $e_1, \dots, e_r$ na desnoj strani je prvih r elemenata kanonske baze u $\mathbb{R}^n$. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Budući da su stupci transponirane matrice $A^\top$ reci matrice A, a reci od $A^\top$ stupci od A, to možemo "paralelno" svesti A na oblik (5.1), a $A^\top$ na oblik (5.2), te zaključiti da je u oba slučaja rang matrice jednak r. Znači da vrijedi:

5.3. Osnovni teorem o rangu matrica. $\operatorname{rang} A^\top = \operatorname{rang} A$.

6. Kanonski produkt na $\mathbb{R}^n$ i dualne baze

6.1. Osnovno pitanje. Do sada smo se susreli s dvije "vrste" potprostora vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$: slike i jezgre linearnih preslikavanja. Slika linearnog preslikavanja je linearna ljuska konačno vektora

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle.$$

Štoviše, vidjeli smo da je svaki potprostor W tog oblika, čak možemo birati linearno nezavisne vektore $a_1, \dots, a_k$, odnosno bazu u W.

S druge strane, jezgra preslikavanja A je skup svih rješenja homogenog sistema linearnih jednadžbi

$$\{x \mid Ax = 0\}.$$

Osnovno pitanje na koje želimo odgovoriti jest: *Da li je svaki potprostor W vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ tog oblika?*

6.2. Kanonski produkt vektora. Kanonski produkt[1] vektora

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

iz $\mathbb{R}^n$ je broj

$$\langle a \mid b \rangle = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

6.3. Primjer. Kanonski produkt vektora

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je $\langle a \mid b \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 1$.

6.4. Kanonski produkt na $\mathbb{R}^n$. *Kanonski produkt na* $\mathbb{R}^n$ je preslikavanje

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (a, b) \mapsto \langle a \mid b \rangle.$$

6.5. Neka svojstva kanonskog produkta. Kanonski produkt je linearan u prvom argumentu

$$\langle \lambda a + \lambda' a' \mid b \rangle = \lambda \langle a \mid b \rangle + \lambda' \langle a' \mid b \rangle$$

i linearan u drugom argumentu

$$\langle a \mid \mu b + \mu' b' \rangle = \mu \langle a \mid b \rangle + \mu' \langle a \mid b' \rangle.$$

Znači da je kanonski produkt bilinearno preslikavanje. Kanonski produkt je *simetričan*: za sve a i b vrijedi

$$\langle a \mid b \rangle = \langle b \mid a \rangle.$$

6.6. Kroneckerov simbol. Često ćemo koristiti Kroneckerov simbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kad je} \quad i = j, \\ 0 & \text{kad je} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Tako, na primjer, jediničnu matricu možemo zapisati kao $I = (\delta_{ij})$.

6.7. Kanonski produkt elemenata kanonske baze. Za elemente $e_1, \ldots, e_n$ kanonske baze u $\mathbb{R}^n$ očito vrijedi

$$\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

[1] Kanonski produkt vektora a i b u $\mathbb{C}^n$ definiran je istom formulom

$$\langle a \mid b \rangle = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

6.8. Biortogonalni vektori. *Neka su* $a_1, \dots, a_n$ *i* $b_1, \dots, b_n$ *vektori u* $\mathbb{R}^n$*. Ako je*

$$\langle a_i \mid b_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n, \tag{6.1}$$

onda su $a_1, \dots, a_n$ *i* $b_1, \dots, b_n$ *baze u* $\mathbb{R}^n$*.*

DOKAZ. Dovoljno je dokazati da su, na primjer, vektori $a_1, \dots, a_n$ linearno nezavisni. Pretpostavimo zato da je

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0.$$

No tada, zbog linearnosti kanonskog produkta u prvom argumentu i pretpostavke (6.1), za sve $j = 1, \dots, n$ imamo

$$0 = \langle 0 \mid b_j \rangle = \langle \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid b_j \rangle = \lambda_1 \langle a_1 \mid b_j \rangle + \cdots + \lambda_n \langle a_n \mid b_j \rangle = \lambda_j.$$

□

6.9. Biortogonalne baze. Za dvije baze $a_1, \dots, a_n$ i $b_1, \dots, b_n$ za koje vrijedi (6.1) kažemo da su *biortogonalne baze*. Još kažemo da je *baza* $b_1, \dots, b_n$ *dualna bazi* $a_1, \dots, a_n$. Očito je i baza $a_1, \dots, a_n$ dualna bazi $b_1, \dots, b_n$.

6.10. Dualna baza i koordinate vektora. Prethodni argument pokazuje da su koordinate λ_j vektora

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

u bazi $a_1, \dots, a_n$ dane pomoću dualne baze formulom

$$\lambda_j = \langle x \mid b_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \tag{6.2}$$

6.11. Svaka baza ima dualnu bazu. *Neka je* $a_1, \dots, a_n$ *baza u* $\mathbb{R}^n$*. Tada postoji jedinstvena baza* $b_1, \dots, b_n$ *takva da je*

$$\langle a_i \mid b_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n, \tag{6.3}$$

DOKAZ. Budući da je $a_1, \dots, a_n$ baza, to je $A = (a_1, \dots, a_n)$ regularna matrica koja ima inverznu matricu

$$A^{-1} A = I = (\delta_{ij}).$$

Stavimo

$$(b_1, \dots, b_n) = B = (A^{-1})^\top.$$

Budući da su stupci matrice B jednaki recima matrice A^{-1}, to je "produkt i-tog retka matrice A^{-1} i j-tog stupca matrice A" upravo kanonski produkt

$$\langle b_i \mid a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Jedinstvenost dualne baze B slijedi iz jedinstvenosti inverzne matrice A^{-1}.

□

6.12. Primjer. Lako je provjeriti da matrica

$$(a_1, a_2, a_3) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

ima inverznu matricu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Znači da je

$$(b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dualna baza baze a_1, a_2, a_3. Provjerite relacije $\langle a_i \mid b_j \rangle = \delta_{ij}$ za $i, j = 1, 2, 3$.

6.13. Zadatak. Izračunajte koordinate vektora v u bazi A,

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad (a_1, a_2, a_3) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

koristeći a) formulu (3.4.3) i b) formulu (6.2). U čemu je razlika?

6.14. Zadatak. Za svaku od baza (v_1, v_2) u $\mathbb{R}^2$,

$$(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

nađite dualnu bazu i svaki par biortogonalnih baza nacrtajte u ravnini.

6.15. Teorem. *Neka je W potprostor u $\mathbb{R}^n$, $\dim W = k$. Tada postoje vektori $b_1, \dots, b_{n-k}$ u $\mathbb{R}^n$ takvi da je W skup svih rješenja x sistema jednadžbi*

$$\langle b_1 \mid x \rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle b_{n-k} \mid x \rangle = 0.$$

Stavimo li $A = (b_1, \dots, b_{n-k})^\top$, onda je $W = \ker A$.

Dokaz. Neka je

$$v_{n-k+1}, \dots, v_n$$

baza potprostora W koju nadopunimo do baze

$$v_1, \dots, v_{n-k}, v_{n-k+1}, \dots, v_n$$

od $\mathbb{R}^n$. Tada je

$$W = \{\xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n \mid \xi_1 = \dots = \xi_{n-k} = 0\}.$$

Neka je $b_1, \dots, b_n$ dualna baza. Tada zbog $\langle b_i \mid v_j \rangle = \delta_{ij}$ imamo

$$\langle b_i \mid \xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n \rangle = \xi_1 \langle b_i \mid v_1 \rangle + \dots + \xi_n \langle b_i \mid v_n \rangle = \xi_i,$$

pa je

$$W = \{x \mid \langle b_1 \mid x \rangle = \dots = \langle b_{n-k} \mid x \rangle = 0\}.$$

□

6.16. Primjer. Za matricu A iz točke 3.5 elementarnim transformacijama stupaca dobivamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, 0, 0),$$

pa zaključujemo da je v_1, v_2 baza od $\operatorname{im} A$. Očito je v_1, v_2, e_3, e_4 baza od $\mathbb{R}^4$ i lako je vidjeti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Znači da je

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dualna baza od v_1, v_2, e_3, e_4, pa je

$$W = \operatorname{im} A = \langle v_1, v_2 \rangle$$

zadan sistemom jednadžbi $\langle b_3, x \rangle = 0$, $\langle b_4, x \rangle = 0$, odnosno W je skup svih rješenja sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} -\tfrac{5}{3}\xi_1 - \tfrac{1}{3}\xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ \tfrac{2}{3}\xi_1 + \tfrac{1}{3}\xi_2 + \xi_4 &= 0. \end{aligned}$$