Linearna algebra za fizičare, zimski semestar 2006.

Mirko Primc

Sadržaj

POGLAVLJE 4

Determinante

U ovom poglavlju sva su razmatranja napisana za vektorski prostor $\mathbb{R}^n$, no sve definicije i rezultati jednako vrijede i za vektorski prostor $\mathbb{C}^n$ ako zamijenimo $\mathbb{R}$ sa $\mathbb{C}$.

1. Determinanta kvadratne matrice

1.1. Determinanta 1×1 matrice. *Determinanta* 1×1 *matrice* α_{11} je sam taj broj α_{11}.

1.2. Determinanta 2×2 matrice. *Determinanta* 2×2 *matrice* je broj

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

1.3. Primjer.

$$\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 0\cdot 1 - 2\cdot 1 = -2, \quad \det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = -1\cdot 1 - 2\cdot 1 = -3.$$

1.4. Zadatak. Izračunajte $\det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $\det\begin{pmatrix}i & \sqrt{2}\\ 0 & -i\end{pmatrix}$.

1.5. Determinanta 3×3 matrice. *Determinanta* 3×3 *matrice* je broj

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$$
$$= \alpha_{11}\det\begin{pmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix} - \alpha_{21}\det\begin{pmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix} + \alpha_{31}\det\begin{pmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{pmatrix}.$$

1.6. Primjer.

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1.$$

1.7. Zadatak. Izračunajte $\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

1.8. Oznake za brisanje stupaca i redaka matrice. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ matrica tipa $n \times n$, zapisana po stupcima kao $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Za proizvoljne indekse $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ označimo s

$$A_{jk} = (a_1^{(k)}, \ldots, a_{j-1}^{(k)}, a_{j+1}^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})$$

matricu tipa $(n-1) \times (n-1)$ dobivenu od matrice A **brisanjem j-tog stupca i k-tog retka u matrici A.** Posebno, **u matrici A_{jk} nema matričnog elementa α_{kj}.** Naša oznaka $a_1^{(k)}$ znači da je u prvom stupcu a_1 brisana k-ta koordinata. Matricu A_{jk} možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \varnothing_j & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \varnothing_j & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varnothing_k & \varnothing_k & \ldots & \varnothing_{kj} & \ldots & \varnothing_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \varnothing_j & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

gdje smo s oznakom $\varnothing$ za prazan skup naznačili da je izostavljen j-ti stupac i k-ti redak iz matrice A. Na primjer,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 100 & 2 & 3 \\ 1 & 200 & -1 & 2 \\ 200 & 100 & 300 & 600 \\ 7 & 100 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.9. Determinanta $n \times n$ matrice. *Determinanta $n \times n$ matrice $A = (\alpha_{ij})$ je broj*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det A_{1k}.$$

U ovoj definiciji determinante $n \times n$ matrice A koristimo determinante $(n-1) \times (n-1)$ matrica A_{1k} dobivenih brisanjem **prvog stupca** i k-tog retka u matrici A. Formulu si možemo bolje predočiti ako pišemo

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varnothing_k & \ldots & \varnothing_k \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Također valja uočiti da sumiramo po svim elementima **prvog stupca** matrice A i da predznaci u $(-1)^{k+1}\alpha_{k1}$ alterniraju

$$\alpha_{11}, \quad -\alpha_{21}, \quad \alpha_{31}, \quad -\alpha_{41}, \ldots, \quad (-1)^{n+1}\alpha_{n1}.$$

Valja primijetiti da je definicija za $n = 2$ i 3 u skladu s općom definicijom determinante $n \times n$ matrice.

1.10. Zadatak. Računanjem pokažite da je $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -5.$

1.11. Determinanta jedinične matrice.

$$\det I = \det(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je očita. Također je očito da brisanjem prvog retka i prvog stupca u jediničnoj $n \times n$ matrici I_n dobivamo jediničnu $(n-1) \times (n-1)$ matricu I_{n-1}, pa iz definicije slijedi

$$\det I_n = 1 \cdot \det I_{n-1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

1.12. Zadatak. Dokažite formulu za determinantu gornje trokutaste matrice

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}.$$

2. Determinanta

2.1. Determinanta na skupu $n \times n$ matrica. Matrice tipa $n \times n$ su po definiciji n-torke vektora $(a_1, \dots, a_n)$ u $\mathbb{R}^n$, pa skup svih $n \times n$ matrica označavamo kao Kartezijev produkt

$$\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^n.$$

Determinanta je funkcija

$$\det \colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}, \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \det(a_1, \dots, a_n)$$

koja svakoj matrici $A = (a_1, \dots, a_n)$ pridružuje broj $\det A$. Ako želimo naglasiti o kojoj funkciji det govorimo napisat ćemo $\det_n$.

2.2. Multilinearne funkcije. Za funkciju

$$f \colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}, \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$$

kažemo da je *linearna u i-toj varijabli* ako je za svaki niz od $n-1$ vektora $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ funkcija

$$x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

linearna funkcija na $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je funkcija *n-linearna* ili *multilinearna funkcija* ako je linearna u i-toj varijabli za svaki indeks $i = 1, \dots, n$. Očito je 1-linearna funkcija linearna funkcija, a u slučaju 2-linearne funkcije govorimo o *bilinearnoj* funkciji.

2.3. Napomena. *Budući da za linearnu funkciju g vrijedi $g(0) = 0$, to za multilinearnu funkciju f vrijedi*

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0.$$

2.4. Lema. *Determinanta je multilinearna funkcija.*

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je očita jer je identiteta $\xi \mapsto \xi$ linearna funkcija.

Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za $n - 1$, tj. da je

$$\det{}_{n-1} \colon (\mathbb{R}^{n-1})^{n-1} \to \mathbb{R}$$

multilinearna funkcija. Neka je indeks $i \in \{2, \dots, n\}$ i neka su dani vektori $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^n$. Kao u točki 1.8 označimo s $x^{(k)}$ vektor u $\mathbb{R}^{n-1}$ dobiven iz vektora x u $\mathbb{R}^n$ brisanjem k-te koordinate ξ_k. Tada je preslikavanje

$$x \mapsto x^{(k)}$$

linearno preslikavanje sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^{n-1}$. Iz toga slijedi da je i kompozicija

$$x \mapsto x^{(k)} \mapsto \det{}_{n-1}(a_2^{(k)}, \dots, a_{i-1}^{(k)}, x^{(k)}, a_{i+1}^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$$

linearna funkcija jer je $\det_{n-1}$ linearna u $(i-1)$-toj varijabli. No onda je i suma linearnih funkcija

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det{}_{n-1}(a_2^{(k)}, \dots, a_{i-1}^{(k)}, x^{(k)}, a_{i+1}^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$$

linearna funkcija. Znači da je

$$x \mapsto \det(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

linearna funkcija. Preostaje pokazati linearnost determinante $\det_n$ u prvoj varijabli. Neka su $a_2, \dots, a_n$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada je

$$x \mapsto \det(x, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \xi_k \det{}_{n-1}(a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$$

linearna funkcija. □

2.5. Alternirajuće multilinearne funkcije. Za multilinearnu funkciju

$$f \colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}, \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$$

kažemo da je *alternirajuća* ako za sve n-torke vektora $a_1, \dots, a_n$ i sve parove indeksa $i < j$ vrijedi

$$\begin{aligned} &f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \\ &= -f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Obično (neprecizno) kažemo da zamjenom mjesta dvaju vektora u alternirajućoj funkciji mijenjamo predznak.

2.6. Lema. *Determinanta je alternirajuća multilinearna funkcija.*

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $n \geq 2$. Za $n = 2$ imamo

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = -\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{22} & \alpha_{21} \end{pmatrix}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za $n-1$. Ako su indeksi $i < j$ iz skupa $\{2, \dots, n\}$, onda po pretpostavci imamo

$$\begin{aligned} &\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det{}_{n-1}(a_2^{(k)}, \dots, a_i^{(k)}, \dots, a_j^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} (-\det{}_{n-1}(a_2^{(k)}, \dots, a_j^{(k)}, \dots, a_i^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})) \\ &= -\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Za indekse $i = 1$, $j = 2$ imamo

$$\det(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \tag{2.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det{}_{n-1}(a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \tag{2.2}$$

$$= \sum_{k} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \left(\sum_{i<k} (-1)^{i+1} \alpha_{i2} \det{}_{n-2}(a_3^{(k)(i)}, \dots, a_n^{(k)(i)}) \right) \tag{2.3}$$

$$+ \sum_{k} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \left(\sum_{i>k} (-1)^{i-1+1} \alpha_{i2} \det{}_{n-2}(a_3^{(k)(i)}, \dots, a_n^{(k)(i)}) \right) \tag{2.4}$$

$$= \sum_{k} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \left(\sum_{i<k} (-1)^{i+1} \alpha_{i2} \det{}_{n-2}(a_3^{(k)(i)}, \dots, a_n^{(k)(i)}) \right) \tag{2.5}$$

$$+ \sum_{i} (-1)^{i+1} \alpha_{i1} \left(\sum_{k>i} (-1)^{k-1+1} \alpha_{k2} \det{}_{n-2}(a_3^{(k)(i)}, \dots, a_n^{(k)(i)}) \right) \tag{2.6}$$

$$= \sum_{i<k} (-1)^{i+k+1} (\alpha_{i1}\alpha_{k2} - \alpha_{k1}\alpha_{i2}) \det{}_{n-2}(a_3^{(k)(i)}, \dots, a_n^{(k)(i)}) \tag{2.7}$$

$$= \sum_{i<k} (-1)^{i+k+1} \det \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} \end{pmatrix} \det{}_{n-2}(a_3^{(k)(i)}, \dots, a_n^{(k)(i)}) \tag{2.8}$$

$$= -\sum_{i<k} (-1)^{i+k+1} \det \begin{pmatrix} \alpha_{i2} & \alpha_{i1} \\ \alpha_{k2} & \alpha_{k1} \end{pmatrix} \det{}_{n-2}(a_3^{(k)(i)}, \dots, a_n^{(k)(i)}) \tag{2.9}$$

$$= -\det(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n) \tag{2.10}$$

Ovdje je (2.2) definicija determinante (2.1). Zatim smo ponovo primijenili definiciju determinante na $\det_{n-1}(a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ i dobili sume (2.3) i (2.4). U slučaju $i < k$ u matrici $(a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ križamo i-ti redak početne matrice A koji se nalazi na i-tom mjestu u matrici $(a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ i zato je predznak $(-1)^{i+1}$. U slučaju $i > k$ u matrici $(a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ križamo i-ti redak početne matrice A koji se nalazi na $(i-1)$-tom mjestu u matrici $(a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$, jer k-tog retka već nema, i zato je predznak $(-1)^{i-1+1}$.

Sume (2.5) i (2.6) su prepisane sume (2.3) i (2.4), jedino što smo u (2.6) umjesto indeksa sumacije i pisali k, a umjesto k indeks i. To nam je omogućilo da ih objedinimo u jednu sumu (2.7) koju prepisujemo kao (2.8) koristeći oznaku za determinantu 2×2 matrice. Budući da u toj determinanti zamjena stupaca mijenja predznak, dobivamo (2.9). Na osnovu izvedene jednakosti (2.1)=(2.8) zaključujemo da je (2.9)=(2.10).

Sada za indekse $i = 1$ i $j > 2$ vektor a_j premještamo na drugo mjesto uzastopnom primjenom $j-2$ zamjene

$$\det(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n) = (-1)^{j-2} \det(a_1, a_j, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Zamjenom vektora a_1 i a_j to je dalje jednako

$$-(-1)^{j-2} \det(a_j, a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Na kraju vektor a_1 premještamo na j-to mjesto uzastopnom primjenom $j-2$ zamjene i dobivamo

$$\det(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n) = -(-1)^{2(j-2)} \det(a_j, a_2, \dots, a_{j-1}, a_1, \dots, a_n).$$

□

2.7. Lema. *Ako su f i g multilinearne alternirajuće funkcije i $\lambda \in \mathbb{R}$, onda su funkcije $f+g$ i λf definirane "po točkama"*

$$\begin{aligned}(f+g)(a_1, \dots, a_n) &= f(a_1, \dots, a_n) + g(a_1, \dots, a_n),\\ (\lambda f)(a_1, \dots, a_n) &= \lambda f(a_1, \dots, a_n),\end{aligned}$$

također multilinearne i alternirajuće.

Dokaz. Provjeravanje linearnosti funkcije $f+g$ u i-toj varijabli svodi se na činjenicu da je suma linearnih funkcija linearna funkcija. Slično tome, provjeravanje linearnosti funkcije λf u i-toj varijabli svodi se na činjenicu da je linearna funkcija pomnožena skalarom također linearna. Znači da su $f+g$ i λf multilinearne.

Ako pri zamjeni mjesta dvaju vektora $f(a_1, \dots, a_n)$ i $g(a_1, \dots, a_n)$ mijenjaju predznak, onda je jasno da mijenjaju predznak i $f(a_1, \dots, a_n) + g(a_1, \dots, a_n)$ i $\lambda f(a_1, \dots, a_n)$. Znači da su $f+g$ i λf alternirajuće. □

2.8. Lema. *Neka je* $g\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ *multilinearna alternirajuća funkcija. Ako je* $(a_1, \dots, a_n) \sim (a_1', \dots, a_n')$, *onda postoji* $\mu \neq 0$ *takav da je*

$$g(a_1, \dots, a_n) = \mu g(a_1', \dots, a_n').$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdnju u slučaju elementarne transformacije

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1', \dots, a_n').$$

U slučaju elementarne transformacije zamjene mjesta dvama vektorima imamo $\mu = -1 \neq 0$ jer je g alternirajuća. U slučaju elementarne transformacije množenja i-tog vektora skalarom $\lambda \neq 0$ imamo $\mu = 1/\lambda \neq 0$ jer je g linearna u i-tom argumentu. U slučaju elementarne transformacije dodavanja λa_i vektoru a_j zbog linearnosti u j-tom argumentu imamo

$$\begin{aligned}
&g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_j + \lambda a_i, \dots, a_n)\\
&= g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_n)\\
&\ + \lambda g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_i, \dots, a_n)\\
&= g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_n),
\end{aligned}$$

pri čemu je $g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_i, \dots, a_n) = 0$ jer je g alternirajuća, pa je $\mu = 1 \neq 0$. □

2.9. Osnovni teorem o determinanti. *Neka je* $f\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ *multilinearna alternirajuća funkcija. Tada je*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det(x_1, \dots, x_n).$$

Posebno, determinanta je jedinstvena multilinearna alternirajuća funkcija f *takva da je*

$$f(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Dokaz. Već smo dokazali da je $\det\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ multilinearna alternirajuća funkcija i da je $\det I = 1$. Stavimo

$$g = f - f(e_1, \dots, e_n) \det.$$

Prema lemi 2.7 funkcija g je multilinearna alternirajuća. Neka je $a_1, \dots, a_n$ niz vektora u $\mathbb{R}^n$. Ako su vektori $a_1, \dots, a_n$ izvodnice, onda je prema dokazu teorema 1.7.7

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (e_1, \dots, e_n),$$

pa prema lemi 2.8 postoji μ takav da je

$$\begin{aligned}
g(a_1, \dots, a_n) &= \mu g(e_1, \dots, e_n)\\
&= \mu(f(e_1, \dots, e_n) - f(e_1, \dots, e_n) \det(e_1, \dots, e_n)).
\end{aligned}$$

Sada $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ povlači $g(a_1, \dots, a_n) = 0$. Ako vektori $a_1, \dots, a_n$ nisu izvodnice, onda je prema dokazu teorema 1.7.7

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (c_1, \dots, c_k, 0 \dots, 0)$$

za $k < n$, pa prema lemi 2.8 postoji μ takav da je

$$g(a_1, \dots, a_n) = \mu g(c_1, \dots, c_k, 0 \dots, 0).$$

Sada linearnost funkcije g u n-tom argumentu povlači $g(a_1, \dots, a_n) = 0$. Znači da za svaku n-torku vektora $a_1, \dots, a_n$ vrijedi $g(a_1, \dots, a_n) = 0$, odnosno

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det(a_1, \dots, a_n).$$

Time je dokazana prva tvrdnja teorema. Ako je $f(e_1, \dots, e_n) = 1$, onda slijedi da je f determinanta. □

2.10. Teorem. *Matrica A je regularna ako i samo ako je*

$$\det A \neq 0.$$

DOKAZ. Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$ regularna matrica. Tada su vektori $a_1, \dots, a_n$ izvodnice od $\mathbb{R}^n$, pa je prema dokazu teorema 1.7.7

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (e_1, \dots, e_n).$$

Prema lemi 2.8 postoji $\mu \neq 0$ takav da je

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n) = \mu \det(e_1, \dots, e_n) = \mu \neq 0.$$

Obrat. Neka A nije regularna. Tada vektori $a_1, \dots, a_n$ nisu izvodnice, pa je prema dokazu teorema 1.7.7

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (c_1, \dots, c_k, 0 \dots, 0)$$

za $k < n$. Prema lemi 2.8 postoji μ takav da je

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n) = \mu \det(c_1, \dots, c_k, 0 \dots, 0).$$

Sada linearnost determinate u n-tom argumentu povlači $\det A = 0$. □

2.11. Primjer. Determinantu

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

možemo računati koristeći formulu (2.8)

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &+ \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &- \det \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 5 \cdot 1 - 0 \cdot 10 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 - 10 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -5. \end{aligned}$$

2.12. Zadatak. Računajući determinante pokažite da su

$$J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

regularne matrice.

3. Determinanta matrice i elementarne transformacije

3.1. Računanje determinante matrice pomoću elementarnih transformacija. Osim u slučaju 2×2 matrica i (možda) 3×3 matrica, determinantu "konkretne" matrice **ne računamo** po formuli danoj u definiciji determinante. Najefikasniji način računanja determinante "konkretne" matrice je izvođenjem elementarnih transformacija

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1', \ldots, a_n')$$

na stupcima matrice i korištenjem veze između

$$\det(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{i} \quad \det(a_1', \ldots, a_n').$$

3.2. Zamjena mjesta dvaju vektora. Budući da je po definiciji funkcija det alternirajuća, imamo

$$\begin{aligned} &\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\ &= -\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

3.3. Množenje jednog vektora skalarom $\lambda \neq 0$. Budući da je po definiciji funkcija det multilinearna, imamo

$$\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, \lambda a, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \lambda \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

3.4. Pribrajanje jednog vektora pomnoženog skalarom drugom vektoru. Budući da je funkcija det multilinearna i alternirajuća, imamo

$$\begin{aligned} &\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b + \lambda a, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\ &= \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\ &\ + \lambda \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\ &= \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

(Ovdje smo zapisali slučaj $i < j$, no isto vrijedi i za $i > j$.) Znači da nakon ove transformacije na stupcima matrice determinanta ostaje ista.

3.5. Računanje determinante matrice. *Računanje determinante pomoću elementarnih transformacija svodi se, u suštini, na uzastopnu primjenu transformacije trećeg tipa: Odaberemo li jedan matrični element $\alpha_{ki} \neq 0$ u i-tom stupcu $a = a_i$ matrice*

$$A = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

i odaberemo li $\lambda = -\alpha_{kj}/\alpha_{ki}$, onda u j-tom stupcu matrice

$$A' = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j + \lambda a, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

vektor $a_j + \lambda a$ *ima* k*-tu koordinatu jednaku* $\alpha_{kj} + (-\alpha_{kj}/\alpha_{ki})\alpha_{ki} = 0$. *Uzastopnom primjenom takovih transformacija dobijamo matricu u kojoj su svi elementi u* k*-tom retku nula, osim početnog* $\alpha_{ki} \neq 0$. *Stavimo* $k_1 = k$ *i* $i_1 = i$. Na primjer,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ovdje smo odabrali $\alpha_{32} = 1 \neq 0$. U prvom koraku mijenjamo prvi stupac i biramo $\lambda = -2$. U drugom koraku mijenjamo treći stupac i biramo $\lambda = 3$. Četvrti stupac ne mijenjamo jer na trećem mjestu već stoji 0. Stavimo $k_1 = 3$ i $i_1 = 2$.

Nakon toga biramo $\alpha_{ki} \neq 0$, $i \neq i_1$. *Ako takav ne postoji, matrica ima nul-stupac i determinanta je nula. Ako postoji, nastavimo postupak kao ranije. Primijetimo da pritom nećemo mijenjati postojeći* k_1*-ti redak. Stavimo* $k_2 = k$ *i* $i_2 = i$. U našem primjeru možemo odabrati $\alpha_{41} = -1 \neq 0$. U prvom koraku mijenjamo drugi stupac i biramo $\lambda = 1$. U drugom koraku mijenjamo treći stupac i biramo $\lambda = 5$. U trećem koraku mijenjamo četvrti stupac i biramo $\lambda = 5$. Stavimo $k_2 = 4$ i $i_2 = 1$.

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 14 & 3 \\ -3 & -1 & -10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 14 & 18 \\ -3 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nakon toga biramo $\alpha_{ki} \neq 0$, $i \neq i_1, i_2$ *itd. U postupku dobivamo ili nul-stupac ili završavamo s* $\alpha_{k_n i_n} \neq 0$. *U potonjem slučaju primijenimo elementarne transformacije drugog tipa i dobivamo*

$$\det A = \alpha_{k_1 i_1}\alpha_{k_2 i_2}\ldots\alpha_{k_n i_n}\det(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

za neku permutaciju σ. Na kraju primijenimo elementarne transformacije zamjene stupaca i svojstvo $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. U našem primjeru

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 14 & 18 \\ -3 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -10 \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7/5 & 18 \\ -3 & -1 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = -10 \det\begin{pmatrix} -6/5 & 3/5 & -7/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-10)(-1/5) \det\begin{pmatrix} -6/5 & 3/5 & -7/5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = 2 \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-2)(-1) \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = -2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2.$$

4. Cramerovo pravilo

4.1. Cramerovo pravilo. *Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$ kvadratna matrica i $\det A \neq 0$. Tada za svaki $b \in \mathbb{R}^n$ sistem jednadžbi*

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b$$

ima jedinstveno rješenje $x \in \mathbb{R}^n$. Štoviše, koordinate ξ_i rješenja x dane su formulom

$$\xi_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(a_1, \dots, a_n)} \quad \text{za sve} \quad i = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Prema teoremu 2.10 pretpostavka $\det A \neq 0$ povlači da je A regularna matrica, pa sistem $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje x. Znači da postoje $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
&\det(a_1,\dots,a_{i-1},b\,,a_{i+1},\dots,a_n)\\
&=\det(a_1,\dots,a_{i-1},\ \sum_{j=1}^n \xi_j a_j\ ,a_{i+1},\dots,a_n)\\
&=\sum_{j=1}^n \xi_j \det(a_1,\dots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\dots,a_n)\\
&=\xi_i \det(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n).
\end{aligned}$$

Druga jednakost vrijedi zbog linearnosti determinante u i-tom argumentu. Ako je $j\neq i$, onda se u nizu $a_1,\dots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\dots,a_n$ vektor a_j pojavljuje dvaput, pa zbog alternirajućeg svojstva determinante imamo

$$\det(a_1,\dots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\dots,a_n)=0$$

i treća jednakost vrijedi. Budući da je po pretpostavci $\det A\neq 0$, imamo formulu

$$\xi_i=\frac{\det(a_1,\dots,a_{i-1},b,a_{i+1},\dots,a_n)}{\det(a_1,\dots,a_n)}.$$

□

4.2. Pitanje. Da li se sistem

$$\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\5&5&5&5\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

može riješiti Cramerovim pravilom? DA NE

4.3. Zadatak. Riješite sistem

$$\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\5&5&5&5\\0&0&1&2\\0&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Cramerovim pravilom i potom Gaussovom metodom.

5. Binet-Cauchyjev teorem

5.1. Binet-Cauchyjev teorem. *Neka su A i B matrice tipa $n\times n$. Tada je*

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B.$$

DOKAZ. Definirajmo funkciju $f\colon(\mathbb{R}^n)^n\to\mathbb{R}$ formulom

$$f(v_1,\dots,v_n)=\det(Av_1,\dots,Av_n).$$

Budući da je A linearno preslikavanje i determinanta linearna funkcija u i-toj varijabli, to je i kompozicija

$$\begin{aligned} x \mapsto Ax \mapsto &\det(Av_1, \dots, Av_{i-1}, Ax, Av_{i+1}, \dots, Av_n) \\ &= f(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

linearna funkcija. Znači da je f multilinearna funkcija. Budući da je determinanta alternirajuća funkcija, to je i f alternirajuća:

$$\begin{aligned} &f(v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \det(Av_1, \dots, Av_{i-1}, Aa, Av_{i+1}, \dots, Av_{j-1}, Ab, Av_{j+1}, \dots, Av_n) \\ &= -\det(Av_1, \dots, Av_{i-1}, Ab, Av_{i+1}, \dots, Av_{j-1}, Aa, Av_{j+1}, \dots, Av_n) \\ &= -f(v_1, \dots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Prema teoremu 2.9 vrijedi

$$f(b_1, \dots, b_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det(b_1, \dots, b_n),$$

odnosno

$$\det(Ab_1, \dots, Ab_n) = \det(Ae_1, \dots, Ae_n) \det(b_1, \dots, b_n),$$

a to i jest Binet-Cauchyjeva formula $\det(AB) = \det A \det B$. □

5.2. Determinanta je invarijanta. Ako je T regularna $n \times n$ matrica, onda je prema Binet-Cauchyjevom teoremu za svaku $n \times n$ matricu A

$$\begin{aligned} \det T^{-1}AT &= \det T^{-1} \det A \det T = \det T^{-1} \det T \det A \\ &= \det T^{-1}T \det A = \det I \det A = \det A. \end{aligned}$$

Znači da je funkcija det invarijanta linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$.

5.3. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja. Zapišemo li kompleksni broj $z = \alpha + i\beta$ kao realnu 2×2 matricu, onda je

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2.$$

Tada iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

5.4. Apsolutna vrijednost kvaterniona. Za kvaternione imamo

$$\det Z = \det \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |Z|^2.$$

Tada iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$.

6. Determinanta i grupa permutacija

6.1. Predznak permutacije. *Neka je σ permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$ i T_σ matrica permutacije*[1]*. Tada je*

$$\det T_\sigma = \det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \in \{1, -1\}.$$

Naime, u matrici $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ vektor e_1 možemo premijestiti na prvo mjesto zamjenom s prvim vektorom u matrici. Potom e_2 možemo premijestiti na drugo mjesto, i tako redom sve dok ne dobijemo jediničnu matricu $I = (e_1, \dots, e_n)$. Budući da kod zamjene mjesta dvaju vektora mijenjamo predznak alternirajućoj funkciji det, to je konačni rezultat $(-1)^s \det I$, gdje je s broj izvršenih zamjena. Budući da je $\det I = 1$, konačni rezultat je ± 1. Na primjer, za permutaciju 3241 imamo

$$\det(e_3, e_2, e_4, e_1) = -\det(e_1, e_2, e_4, e_3) = (-1)^2 \det(e_1, e_2, e_3, e_4) = 1.$$

To smo, doduše, mogli postići i na drugi način

$$\begin{aligned}\det(e_3, e_2, e_4, e_1) &= -\det(e_3, e_2, e_1, e_4) = (-1)^2 \det(e_3, e_1, e_2, e_4)\\ &= (-1)^3 \det(e_1, e_3, e_2, e_4) = (-1)^4 \det(e_1, e_2, e_3, e_4) = 1,\end{aligned}$$

ali rezultat je isti. Broj

$$\varepsilon(\sigma) = \det T_\sigma$$

zovemo *predznakom permutacije* σ i često ga označavamo i kao $(-1)^\sigma$. Tako je, na primjer, predznak permutacije 3241 jednak 1. Očito je predznak identitete 1, uz uvedene oznake pišemo

$$\varepsilon(\mathrm{id}) = \det T_{\mathrm{id}} = \det I = 1.$$

6.2. Zadatak. Izračunajte predznak permutacije 32514.

6.3. Predznak produkta permutacija. Neka su σ i ν permutacije skupa $\{1, \dots, n\}$. Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema na formulu (3.3.2)

$$T_{\sigma\nu} = T_\sigma T_\nu$$

dobivamo formulu za predznak produkta permutacija

$$\det T_{\sigma\nu} = \det T_\sigma \det T_\nu.$$

Kada je $\sigma\nu = \mathrm{id}$, odnosno $\nu = \sigma^{-1}$, imamo

$$\det T_\sigma \det T_{\sigma^{-1}} = 1.$$

Budući da je predznak permutacije jednak ± 1, dobivamo da su predznaci permutacija σ i σ^{-1} isti

$$\det T_{\sigma^{-1}} = \det T_\sigma.$$

6.4. Zadatak. Napišite inverz permutacije 32514 i izračunajte predznak inverza.

[1]definirane u točki 3.3.14

6.5. Indeksi s indeksima. Recimo da tri "opća" vektora a_1, a_2 i a_3 trebamo napisati u kanonskoj bazi. Tada bismo, u skladu s dogovorom, pisali

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} e_i, \quad a_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} e_i, \quad a_3 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i3} e_i.$$

Ako kojim slučajem treba koristiti različite indekse sumacije, onda se odlučimo za slova i, j i k i pišemo

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} e_i, \quad a_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} e_j, \quad a_3 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k3} e_k.$$

Birati tri različita slova i, j i k je lako, ali što ako treba birati sto različitih slova? Odgovor je u pisanju indeksa s indeksima: u našem slučaju možemo birati tri različita slova j_1, j_2, j_3 i pisati

$$a_1 = \sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{j_1 1} e_{j_1}, \quad a_2 = \sum_{j_2=1}^{n} \alpha_{j_2 2} e_{j_2}, \quad a_3 = \sum_{j_3=1}^{n} \alpha_{j_3 3} e_{j_3}.$$

6.6. Teorem. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ kvadratna $n \times n$ matrica. Tada je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}. \tag{6.1}$$

DOKAZ.

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(a_1, a_2 \ldots, a_n) \\
&= \det\Big(\sum_{j_1} \alpha_{j_1 1} e_{j_1}, \sum_{j_2} \alpha_{j_2 2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n} \alpha_{j_n n} e_{j_n}\Big) && (6.2) \\
&= \sum_{j_1} \alpha_{j_1 1} \det\Big(e_{j_1}, \sum_{j_2} \alpha_{j_2 2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n} \alpha_{j_n n} e_{j_n}\Big) && (6.3) \\
&= \sum_{j_1} \alpha_{j_1 1} \sum_{j_2} \alpha_{j_2 2} \det\Big(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n} \alpha_{j_n n} e_{j_n}\Big) && (6.4) \\
&\ \ \vdots \\
&= \sum_{j_1} \alpha_{j_1 1} \sum_{j_2} \alpha_{j_2 2} \cdots \sum_{j_n} \alpha_{j_n n} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) && (6.5) \\
&= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n} \alpha_{j_1 1} \alpha_{j_2 2} \cdots \alpha_{j_n n} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) && (6.6) \\
&= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \alpha_{j_1 1} \alpha_{j_2 2} \cdots \alpha_{j_n n} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) && (6.7) \\
&= \sum_{\sigma \in S(n)} \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \cdots \alpha_{\sigma(n)n} \det(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}). && (6.8)
\end{aligned}$$

Ovdje smo u (6.2) napisali vektore $a_1, a_2 \ldots, a_n$ u kanonskoj bazi koristeći različite indekse. Potom smo u (6.3) koristili linearnost determinante u prvom argumentu, u (6.4) linearnost u drugom argumentu i tako redom do zadnjeg argumenta u (6.5). Koristeći distributivnost množenja prema zbrajanju dobili smo (6.6) i to prepisali kraće u (6.7) naznačivši da svi indeksi $j_1, j_2, \dots, j_n$ poprimaju sve moguće vrijednosti iz skupa $\{1, \dots, n\}$. Međutim, ako neka dva indeksa poprime istu vrijednost $j_r = j_s$, onda je $\det(e_{j_1}, e_{j_2} \dots, e_{j_n}) = 0$ jer ima isti vektor $e_{j_r} = e_{j_s}$ na dva mjesta, r-tom i s-tom. Znači da je dovoljno napisati sumu za sve međusobno različite indekse $j_1, j_2, \dots, j_n$. No svaki takav izbor određuje jedinstvenu permutaciju

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) = (j_1, j_2, \dots, j_n),$$

kako je i napisano u (6.8). Ovdje smo se odlučili pisati predznak permutacije kao $\det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)$. □

6.7. Teorem. *Za kvadratnu matricu $A = (\alpha_{ij})$ vrijedi*

$$\det A = \sum_{\tau \in S(n)} \varepsilon(\tau) \alpha_{1\tau(1)} \cdots \alpha_{n\tau(n)}.$$

DOKAZ. Neka je $A = (\alpha_{ij})$. Prema teoremu 6.6

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Budući da je za permutaciju σ skup vrijednosti $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ čitav skup $1, \dots, n$, to produkt

$$\alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}$$

možemo prepisati u drugom poretku

$$\alpha_{1\tau(1)} \cdots \alpha_{n\tau(n)},$$

pri čemu je faktor $\alpha_{\sigma(k)k} = \alpha_{p\tau(p)}$ za $\sigma(k) = p$ i $k = \tau(p)$. Znači da je $\tau = \sigma^{-1}$, pa formulu za determinantu možemo prepisati kao

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S(n) \\ \tau = \sigma^{-1}}} \varepsilon(\tau^{-1}) \alpha_{1\tau(1)} \cdots \alpha_{n\tau(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S(n)} \varepsilon(\tau) \alpha_{1\tau(1)} \cdots \alpha_{n\tau(n)}.
\end{aligned}$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je svaki τ oblika $\tau = \sigma^{-1}$ za točno jedan $\sigma = \tau^{-1}$ i jer je $\varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(\tau)$. □

6.8. Transponirana matrica. Za matricu $A = (\alpha_{ij})$ tipa $m \times n$ definiramo *transponiranu matricu* $A^\top = (\alpha'_{ij})$ tipa $n \times m$ tako da stupci u matrici A postaju reci u matrici $A^\top$, odnosno

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}.$$

Na primjer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

6.9. Zadatak. Dokažite da za matricu permutacije vrijedi

$$(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})^\top (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = I,$$

$$(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})^{-1} = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})^\top.$$

Na primjer,

$$(e_3, e_1, e_4, e_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (e_2, e_4, e_1, e_3).$$

6.10. Teorem. *Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi*

$$\det A^\top = \det A.$$

Dokaz. Prema teoremu 6.6 i teoremu 6.7 imamo

$$\det A^\top = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha'_{\sigma(1)1} \cdots \alpha'_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} = \det A.$$

□

6.11. Funkcija $\det \colon A^\top \mapsto \det A^\top$ je n-linearna alternirajuća funkcija stupaca matrice $A^\top$. Budući da su stupci matrice $A^\top$ reci u matrici A, teorem 6.10 daje

Teorem. *Funkcija* $\det \colon A \mapsto \det A$ *je n-linearna alternirajuća funkcija redaka matrice A.*

Zbog ovog teorema determinantu matrice možemo računati i elementarnim transformacijama na recima, ili čak kombinacijom elementarnih transformacija po stupcima i recima.

7. Laplaceov razvoj determinante

Ovdje zadržavamo oznake iz točke 1.8. Posebno, matrica A_{jk} dobivena je iz matrice A brisanjem j-tog stupca i k-tog retka.

7.1. Teorem. *Za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ za matricu A vrijedi Laplaceov razvoj determinante od A po j-tom stupcu:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \alpha_{kj} \det A_{jk}.$$

Za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ za matricu A vrijedi Laplaceov razvoj determinante od A po j-tom retku:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \alpha_{jk} \det A_{kj}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
&\det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \\
&= \det(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k , a_{j+1}, \dots, a_n) \qquad (7.1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \dots, a_n) \qquad (7.2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j-1} \alpha_{kj} \det(e_k, a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \qquad (7.3) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j-1} (-1)^{k-1} \alpha_{kj} \det(a_1^{(k)}, \dots, a_{j-1}^{(k)}, a_{j+1}^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \qquad (7.4) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \alpha_{kj} \det A_{jk}.
\end{aligned}$$

U prvom smo koraku (7.1) stupac a_i zapisali u kanonskoj bazi, (7.2) vrijedi zbog multilinearnosti determinante, (7.3) vrijedi zbog alternirajućeg svojstva determinante. Da bismo vidjeli (7.4) računamo

$$\begin{aligned}
&\det(e_k, a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \\
&= \det \begin{pmatrix}
0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{1n} \\
0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
1 & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \varnothing_{kj} & \dots & \alpha_{kn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{nn}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{kn} \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varnothing_k & \varnothing_k & \varnothing_k & \dots & \varnothing_{kj} & \dots & \varnothing_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varnothing_k & \varnothing_k & \dots & \varnothing_{kj} & \dots & \varnothing_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1} \det(a_1^{(k)}, \dots, a_{j-1}^{(k)}, a_{j+1}^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) = (-1)^{k-1} \det A_{jk}.$$

Prema teoremu 6.11 determinanta je alternirajuća funkcija redaka matrice, pa premještanjem k-tog retka na prvo mjesto dobivamo drugu jednakost. Treća jednakost slijedi iz početne definicije determinante.

Time je dokazan Laplaceov razvoj determinante po j-tom stupcu. Po teoremu 6.10 je $\det A = \det A^\top$, pa Laplaceov razvoj $\det A$ po recima slijedi iz Laplaceovog razvoja $\det A^\top$ po stupcima. □

7.2. Primjedba. Primijetimo da matrica predznaka $(-1)^{k+j}$ počinje s $+$ na mjestu $k = j = 1$ i zatim "alternira". Na primjeru 3×3 matrice imamo

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

7.3. Primjer. Laplaceov razvoj determinante matrice tipa 3×3 po trećem stupcu je

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \gamma_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} - \gamma_2 \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} + \gamma_3 \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

a Laplaceov razvoj determinante po prvom retku je

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \det \begin{pmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} - \beta_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} + \gamma_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

7.4. Napomena. Ponekad pravilo o Laplaceovom razvoju koristimo za preglednije zapisivanje formula. Na primjer, ako su G_1, G_2 i G_3 vektori i $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, 3$, onda izraz

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)G_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)G_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)G_3$$

kraće zapisujemo kao

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & G_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & G_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & G_3 \end{pmatrix},$$

misleći pritom da treba primijeniti formulu (kao što je ona) za Laplaceov razvoj determinante po trećem stupcu.

8. Svojstveni polinom linearnog operatora

8.1. Teorem. *Neka je $A = (\alpha_{ij})$ kvadratna $n \times n$ matrica. Tada je funkcija*

$$P_A(x) = \det(xI - A)$$

polinom n-tog stupnja oblika

$$P_A(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1}x + \sigma_n,$$

pri čemu je $\sigma_1 = -\mathrm{tr}A$ i $\sigma_n = (-1)^n \det A$.

Dokaz. Prvo primijetimo da su $x - \alpha_{ii}$ dijagonalni elementi matrice $xI - A$, a da elementi $-\alpha_{ij}$ van dijagonale ne sadrže x. Budući da je determinanta matrice suma produkata n matričnih elemenata pomnoženih s ± 1, to je jasno da je $\det(xI - A)$ polinom stupnja manjeg ili jednakog n.

Jedini način da u polinomu $P_A(x)$ dobijemo potenciju x^n je da množimo dijagonalne elemente, što u formuli (6.1) odgovara sumandu za $\sigma = \mathrm{id}$ i $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$. Znači da je $P_A(x)$ oblika $x^n + \ldots$.

Da bismo u polinomu $P_A(x)$ dobili potenciju x^{n-1}, moramo zbrojiti sumande u formuli (6.1) koji kao faktore imaju $n-1$ dijagonalnih elementa. No to je opet moguće jedino ako množimo sve dijagonalne elemente. Znači da je $P_A(x)$ oblika $x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots$, gdje je σ_1 koeficijent uz x^{n-1} u polinomu

$$(x - \alpha_{11}) \ldots (x - \alpha_{nn}) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots = x^n - (\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn})x^{n-1} + \ldots.$$

Na kraju, $\sigma_n = P_A(0) = \det(-A)$. □

Polinom $P_A(x) = \det(xI - A)$ zovemo *svojstvenim polinomom matrice A.*

8.2. Primjer. Svojstveni polinom matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ iz primjera 3.6.13 je

$$P_B(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3.$$

8.3. Svojstveni polinom i invarijante. Naka je A linearan operator na $\mathbb{R}^n$ i T uređena baza prostora $\mathbb{R}^n$. Tada je za svaki $x \in \mathbb{R}$

$$xI - A_T = (xI - A)_T = T^{-1}(xI - A)T,$$

pa Binet-Cauchyjev teorem daje

$$P_{A_T}(x) = \det(xI - A_T) = \det(xI - A) = P_A(x).$$

Znači da su svojstveni polinomi matrica A i A_T jednaki. Budući da su koeficijenti σ_i svojstvenog polinoma funkcije matričnih koeficijenata, to jednakost polinoma daje

$$\sigma_i(A_T) = \sigma_i(A).$$

Znači da su koeficijenti svojstvenog polinoma (shvaćeni kao funkcije na skupu $n \times n$ matrica)

$$\sigma_1 = -\mathrm{tr}, \quad \sigma_2, \ldots, \quad \sigma_{n-1}, \quad \sigma_n = (-1)^n \det$$

invarijante linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$.