Linearna algebra za fizičare, zimski semestar 2006.

Mirko Primc

Sadržaj

POGLAVLJE 3

Regularni operatori na $\mathbb{R}^n$

0.1. Pojmovi injekcije i surjekcije. Neka su A i B dva skupa i $f\colon A \to B$ preslikavanje sa skupa A u skup B.

Kažemo da je preslikavanje f *injekcija* ako $x \neq y$ povlači $f(x) \neq f(y)$. Drugim riječima, injekcija pridružuje različitim elementima iz A različite elemente u B. Očito je preslikavanje f injekcija ako i samo ako $f(x) = f(y)$ povlači $x = y$.

Kažemo da je preslikavanje f *surjekcija* ako za svaki element $b \in B$ postoji neki element $a \in A$ takav da je $b = f(a)$. Drugim riječima, pri preslikavanju f svaki je element iz B slika nekog elementa iz A.

0.2. Bijekcija. Kažemo da je preslikavanje f *bijekcija* ako je injekcija i surjekcija. Ako je f bijekcija, onda možemo identificirati elemente skupa A s elementima skupa B tako da element a identificiramo s njegovom slikom $f(a)$, pišemo

$$a \longleftrightarrow f(a).$$

Naime, zbog injektivnosti različite elemente $x, y \in A$ identificiramo s različitim elementima $f(x), f(y) \in B$, a zbog surjektivnosti smo svaki element $b \in B$ identificirali s nekim elementom $a \in A$. Grubo govoreći, ako je f bijekcija, onda skupovi A i B "izgledaju isto".

0.3. Inverzno preslikavanje. Ako je f bijekcija, onda postoji *inverzno preslikavanje* $g\colon B \to A$ koje elementima $f(a) \in B$ pridružuje elemente $a \in A$, pišemo

$$g\colon f(a) \mapsto a.$$

Drugim riječima, ako je $b = f(a)$, onda je $g(b) = a$. Očito je inverzno preslikavanje također bijekcija i vrijedi

$$g(f(a)) = a, \qquad f(g(b)) = b.$$

Inverzno preslikavanje g označavamo s f^{-1}.

0.4. Identiteta i inverzno preslikavanje. Ako je $f\colon A \to B$ bijekcija i $g\colon B \to A$ inverzno preslikavanje od f, onda je

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{i} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B$$

jer je $g(f(a)) = a$ za sve $a \in A$ i $f(g(b)) = b$ za sve $b \in B$.

0.5. Lema. Neka su $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to A$ preslikavanja. Ako je

$$g \circ f = \mathrm{id}_A\,,$$

onda je f injekcija i g surjekcija.

DOKAZ. $f(x) = f(y)$ povlači $x = y$ jer je

$$x = \mathrm{id}_A(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = \mathrm{id}_A(y) = y.$$

Znači da je f injekcija. S druge strane, iz upravo izvedene formule $x = g(f(x))$ vidimo da je svaki $x \in A$ slika $g(y)$ elementa $y = f(x)$, pa je g surjekcija. □

1. Linearne surjekcije i injekcije

1.1. Linearne surjekcije. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Kažemo da je A *linearna surjekcija (sa $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$)* ako je preslikavanje A surjektivno, tj. ako za svaki vektor b u $\mathbb{R}^m$ postoji neki vektor x u $\mathbb{R}^n$ takav da je $b = Ax$. Drugim riječima, *linearno preslikavanje A je surjekcija ako i samo ako sistem jednadžbi*

$$Ax = b$$

ima rješenje za svaki $b \in \mathbb{R}^m$.

1.2. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje i $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada je A surjekcija ako i samo ako vektori $Ae_1, \dots, Ae_n$ razapinju $\mathbb{R}^m$.*

DOKAZ. Neka vektori $Ae_1, \dots, Ae_n$ razapinju $\mathbb{R}^m$. Tada svaki $y \in \mathbb{R}^m$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju

$$y = \lambda_1 Ae_1 + \cdots + \lambda_n Ae_n.$$

No zbog linearnosti preslikavanja A imamo

$$y = A(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n),$$

tj. y je slika vektora $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ iz $\mathbb{R}^n$. Znači da je A surjekcija.

Obrat. Pretpostavimo da je A surjekcija. Neka je $y = Ax$ za vektor

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

iz $\mathbb{R}^n$. Tada zbog linearnosti preslikavanja A imamo

$$y = A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n,$$

tj. y je linearna kombinacija vektora $Ae_1, \dots, Ae_n$. Znači da ti vektori razapinju $\mathbb{R}^m$. □

Prema teoremu 1.7.7 je broj izvodnica od $\mathbb{R}^m$ veći ili jednak m, pa u slučaju linearne surjekcije imamo neposrednu posljedicu prethodnog teorema:

1.3. Korolar. *Ako je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna surjekcija, onda je $n \geq m$.*

1.4. Pitanje. Da li je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

surjekcija? DA NE

1.5. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije dokažite da je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

surjekcija.

1.6. Linearne injekcije. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Kažemo da je A *linearna injekcija (sa* $\mathbb{R}^n$ *u* $\mathbb{R}^m$*)* ako je preslikavanje A injektivno, tj. ako $Ax = Ay$ povlači $x = y$.

1.7. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Tada je A injekcija ako i samo ako homogeni sistem jednadžbi*

$$Ax = 0$$

ima jedinstveno rješenje $x = 0$.

DOKAZ. Pretpostavimo da jednadžba $Ax = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = 0$. Neka je $Au = Av$. Tada je zbog linearnosti preslikavanja A

$$A(u - v) = Au - Av = 0,$$

pa je rješenje sistema $x = u - v = 0$, odnosno $u = v$. Znači da je A injekcija.

Obrat. Pretpostavimo da je A injekcija. Budući da je $A0 = 0$, to zbog injektivnosti $Ax = 0$ povlači $x = 0$. □

1.8. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje i $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada je A injekcija ako i samo su vektori $Ae_1, \dots, Ae_n$ linearno nezavisni.*

DOKAZ. Pretpostavimo da su vektori $Ae_1, \dots, Ae_n$ linearno nezavisni. Ako je $Ax = 0$ za vektor

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n,$$

onda je zbog linearnosti preslikavanja A

$$Ax = \xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n = 0,$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $Ae_1, \dots, Ae_n$ slijedi $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$, tj. $x = 0$. Sada iz teorema 1.7 slijedi da je A injekcija.

Obrat. Pretpostavimo da je A injekcija. Ako je

$$\xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n = 0,$$

onda je zbog linearnosti preslikavanja A

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = 0,$$

pa zbog injektivnosti preslikavanja A imamo $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n = 0$, tj. $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$. Znači da su vektori $Ae_1, \ldots, Ae_n$ linearno nezavisni. □

Prema teoremu 1.8.7 je broj linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^m$ manji ili jednak m, pa u slučaju linearne injekcije imamo neposrednu posljedicu prethodnog teorema:

1.9. Korolar. *Ako je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna injekcija, onda je $n \le m$.*

1.10. Pitanje. Da li je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

injekcija? DA NE

1.11. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije dokažite da je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

injekcija.

1.12. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Ako je A bijekcija, onda je $n = m$.*

Dokaz. S jedne je strane A surjekcija, pa je prema korolaru 1.3 $n \ge m$, a s druge je strane A injekcija, pa je prema korolaru 1.9 $n \le m$. □

Prema teoremu 1.12 je linearno preslikavanje A bijekcija samo ako je

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

pa obično govorimo o *linearnoj bijekciji na* $\mathbb{R}^n$. Naglasimo da je matrica linearne bijekcije nužno $n \times n$ matrica.

Neposredna posljedica teorema 1.2 i 1.8 je sljedeći teorem:

1.13. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje i $e_1, \ldots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada je A bijekcija ako i samo ako su vektori $Ae_1, \ldots, Ae_n$ baza u $\mathbb{R}^n$.*

Koristeći teorem 1.9.4 dobivamo i drugu neposrednu posljedicu teorema 1.2 i 1.8:

1.14. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje. Tada je ekvivalentno:*

(1) *A je bijekcija,*
(2) *A je surjekcija,*
(3) *A je injekcija.*

Ovo je jedan od najvažnijih teorema linearne algebre. Posebno je važna i korisna tvrdnja da injektivnost preslikavanja povlači surjektivnost. Naime, provjera da je A injekcija svodi se na provjeru da **jedan sistem jednadžbi**

$$Ax = 0$$

ima jedinstveno rješenje $x = 0$, a provjera da je A surjekcija svodi se na provjeru da svaki od **beskonačno mnogo sistema jednadžbi**

$$Ax = b, \qquad b \in \mathbb{R}^n$$

ima rješenje.

1.15. Primjer. Za dokaz da je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

linearna bijekcija dovoljno je dokazati da su stupci matrice linearno nezavisni.

2. Regularni operatori na $\mathbb{R}^n$

2.1. Inverz linearne bijekcije je linearno preslikavanje. *Ako je*

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

linearna bijekcija, onda je i inverzno preslikavanje

$$A^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

linearno preslikavanje.

Dokaz. Za proizvoljna dva vektora x i y postoje jedinstveni vektori a i b takvi da je $x = Aa$ i $y = Ab$, odnosno $a = A^{-1}(x)$ i $b = A^{-1}(y)$, pa koristeći linearnost preslikavanja A dobivamo

$$A^{-1}(x+y) = A^{-1}(Aa + Ab) = A^{-1}(A(a+b)) = a + b = A^{-1}(x) + A^{-1}(y).$$

Na sličan način dokazujemo i svojstvo linearnosti u odnosu na množenja skalarom

$$A^{-1}(\lambda x) = A^{-1}(\lambda Aa) = A^{-1}(A(\lambda a)) = \lambda a = \lambda A^{-1}(x).$$

□

Zbog ovog svojstva linearne bijekcije na na $\mathbb{R}^n$ zovemo *invertibilnim* ili *regularnim linearnim operatorima na* $\mathbb{R}^n$, a operator A^{-1} zovemo *inverzom od A*.

2.2. Regularni operatori i regularne matrice. Ako je A regularan operator, onda iz relacije

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

slijedi da je matrica preslikavanja A^{-1} inverzna matrica matrice preslikavanja A. Obratno, ako matrica A ima inverznu matricu B, tj. ako je

$$AB = BA = I,$$

onda je linearno preslikavanje definirano matricom A bijekcija. Naime, poistovjetimo li matrice i pripadna preslikavanja, onda je prema lemi 0.5 zbog relacije

$$AB = I$$

preslikavanje A surjekcija, a zbog relacije

$$BA = I$$

je preslikavanje A injekcija. Matrice koje imaju inverz zovemo *invertibilnim* ili *regularnim matricama.*

U skladu s prijašnjim dogovorom mi ćemo često poistovjećivati regularne operatore i regularne matrice

2.3. Teorem. *Neka su A i B kvadratne matrice tipa $n \times n$. Tada su sljedeće tri tvrdnje ekvivalentne:*

(1) $AB = BA = I$,
(2) $AB = I$,
(3) $BA = I$.

Ako vrijedi jedna od tvrdnji, onda je $B = A^{-1}$ i $A = B^{-1}$.

Dokaz. Shvatimo matrice A i B kao linearna preslikavanja $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ako je $AB = I$, onda je prema lemi 0.5 preslikavanje A surjekcija. No onda je prema teoremu 1.14 preslikavanje A bijekcija i postoji inverz A^{-1}. Sada iz pretpostavke $AB = I$ slijedi

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1},$$

pa vrijedi $AB = BA = I$.

Ako je $BA = I$, onda je prema lemi 0.5 preslikavanje A injekcija. No onda je prema teoremu 1.14 preslikavanje A bijekcija i postoji A^{-1}. Sada iz pretpostavke $BA = I$ slijedi

$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1},$$

pa vrijedi $AB = BA = I$. □

2.4. Pitanje. Da li iz relacije $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ slijedi

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? DA NE

2.5. Teorem. *Kvadratna matrica A tipa $n\times n$ je regularna ako i samo ako postoje rješenja $b_1,\dots,b_n$ sistemā jednadžbi*

$$Ax_1=e_1,\quad \dots,\quad Ax_n=e_n, \tag{2.1}$$

pri čemu su desne strane sistemā vektori kanonske baze u $\mathbb{R}^n$. Ako je A regularna, onda je

$$A^{-1}=(b_1,\dots,b_n).$$

Dokaz. Već smo u točki 2.6.10 primijetili da su stupci inverzne matrice A^{-1} rješenja n sistema jednadžbi (2.1). Obratno, ako sistemi (2.1) imaju rješenja $b_1,\dots,b_n$, onda je $AB=I$ za matricu $B=(b_1,\dots,b_n)$ i tvrdnja slijedi iz teorema 2.3. □

Primjedba. Ako su vektori $b_1,\dots,b_n$ iz $\mathbb{R}^n$ rješenja n sistema jednadžbi (2.1), onda je $(b_1,\dots,b_n)=A^{-1}$, pa zbog jedinstvenosti inverza slijedi da je za svaki $i=1,\dots,n$ rješenje b_i sistema $Ax_i=e_i$ jedinstveno.

2.6. Primjer. Očito su stupci matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

linearno nezavisni, pa je A regularna matrica. Tri sistema jednadžbi (2.1) riješavamo istovremeno Gaussovom metodom:

$$(A\mid e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1&1&2&|&1&0&0\\0&1&-1&|&0&1&0\\0&0&1&|&0&0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&1&2&|&1&0&0\\0&1&0&|&0&1&1\\0&0&1&|&0&0&1\end{pmatrix}\mapsto$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&|&1&0&-2\\0&1&0&|&0&1&1\\0&0&1&|&0&0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&|&1&-1&-3\\0&1&0&|&0&1&1\\0&0&1&|&0&0&1\end{pmatrix}=(I\mid b_1,b_2,b_3).$$

Dobivena matrica $B=(b_1,b_2,b_3)$ je inverz od A, tj.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

3. Opća linearna grupa $GL(n,\mathbb{R})$

3.1. Višestruki produkti operatora na $\mathbb{R}^n$. Neka su $A_1,A_2,\dots,A_k$ linearni operatori s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$. Tada višestruki produkt operatora definiramo induktivno koristeći množenje dva po dva operatora:

$$A_1A_2A_3=(A_1A_2)A_3,\quad A_1A_2A_3A_4=(A_1A_2A_3)A_4$$

i općenito

$$A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k=(A_1A_2\cdots A_{k-1})A_k.$$

Produkt od k faktora $A_i = A$ zovemo *k-tom potencijom operatora A* i zapisujemo kao A^k.

3.2. Asocijativnost za višestruke produkte. Zbog asocijativnosti množenja operatora za sve r i s imamo

$$(A_1 \cdots A_r)(A_{r+1} \cdots A_{r+s}) = A_1 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+s}. \tag{3.1}$$

Formulu dokazujemo indukcijom po $r + s = k$ koristeći svojstvo asocijativnosti za produkt tri operatora

$$\begin{aligned}
&(A_1 \cdots A_r)(A_{r+1} \cdots A_{r+s}) \\
&= (A_1 \cdots A_r)((A_{r+1} \cdots A_{r+s-1})A_{r+s}) \\
&= ((A_1 \cdots A_r)(A_{r+1} \cdots A_{r+s-1}))A_{r+s} \\
&= (A_1 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+s-1})A_{r+s} \\
&= A_1 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+s-1} A_{r+s}
\end{aligned}$$

(treća jednakost vrijedi zbog pretpostavke indukcije za $r + s - 1 = k - 1$). Formulu (3.1) zovemo *svojstvom asocijativnosti za višestruke produkte operatora.*

3.3. Produkt regularnih operatora. *Ako su A i B regularni operatori na $\mathbb{R}^n$, onda je i kompozicija AB regularan operator i vrijedi*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

jer je zbog asocijativnosti kompozicije

$$\begin{aligned}
B^{-1}A^{-1}AB &= B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\
ABB^{-1}A^{-1} &= AIA^{-1} = AA^{-1} = I.
\end{aligned}$$

Za višestruke produkte regularnih operatora imamo

$$(A_1A_2 \cdots A_{k-1}A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Produkt od k faktora $A_i = A^{-1}$ zapisujemo kao A^{-k}.

3.4. Pitanje. Da li je $(A^{-1})^{-1} = A^{-2}$? DA NE

3.5. Zadatak. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pokažite da $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

3.6. Opća linearna grupa $GL(n, \mathbb{R})$. Na skupu svih regularnih operatora na $\mathbb{R}^n$ imamo operaciju množenja (kompoziciju preslikavanja) koja je asocijativna, postoji jedinica I i svaki element A ima inverz A^{-1}. Zbog toga kažemo da je taj skup grupa[1] i zovemo ga *općom linearnom grupom* $GL(n,\mathbb{R})$ (čitamo "ge el en er").

Za $n \geq 2$ množenje nije komutativno. Na primjer, za $n = 2$ imamo regularne operatore zadane matricama tako da je

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Općenitije, $AB \neq BA$ za regularne $n \times n$ matrice

$$A = (e_1, e_1 + e_2, e_3, \dots, e_n) \quad \text{i} \quad B = (e_1 + e_2, e_1, e_3, \dots, e_n).$$

Zbog toga još kažemo da je $GL(n,\mathbb{R})$ nekomutativna grupa.

3.7. Uređena baza u $\mathbb{R}^n$. *Uređena baza u* $\mathbb{R}^n$ je baza $t_1, \dots, t_n$ shvaćena kao niz vektora, tj. kao n-torka vektora $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ u kojem t_1 zovemo *prvim elementom baze*, t_2 zovemo *drugim elementom baze* itd. Prema teoremu 1.13 uređena baza je regularna matrica

$$T = (t_1, \dots, t_n)$$

čiji su stupci baza $t_1, \dots, t_n$ u $\mathbb{R}^n$. Zbog toga **skup** regularnih matrica $GL(n,\mathbb{R})$ možemo "geometrijski" shvatiti kao skup svih uređenih baza u $\mathbb{R}^n$. Na primjer, jediničnu matricu možemo shvatiti kao kanonsku bazu

$$I = (e_1, \dots, e_n),$$

a matricu

$$\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 1 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix} = (e_n, \dots, e_1)$$

kao uređenu bazu $(e_n, \dots, e_1)$ u $\mathbb{R}^n$ kojoj je e_n prvi element, ..., e_1 n-ti element.

3.8. Matrica prijelaza iz kanonske baze u drugu bazu. Budući da regularna matrica T predstavlja i linearno preslikavanje T koje vektore kanonske baze $e_1, \dots, e_n$ prevodi u bazu

$$t_1 = Te_1, \dots, \ t_n = Te_n,$$

to regularnu matricu $T = (t_1, \dots, t_n)$ ponekad zovemo i *matricom prijelaza iz kanonske baze u bazu* $t_1, \dots, t_n$.

[1] Za neprazan skup G kažemo da je *grupa* ako je zadana binarna operacija

$$\star \colon G \times G \to G, \quad (a,b) \mapsto a \star b,$$

tako da za sve elemente $a, b, c \in G$ vrijedi

(1) $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ (asocijativnost);
(2) postoji jedinica e tako da je $a \star e = e \star a = a$;
(3) svaki $a \in G$ ima inverzni element a^{-1} tako da je $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Binarnu operaciju u grupi često zovemo množenjem.

3.9. Matrica prijelaza iz jedne baze u drugu bazu. Neka su

$$T = (t_1, \ldots, t_n) \quad \text{i} \quad S = (s_1, \ldots, s_n)$$

dvije uređene baze. Tada su matrice T i S regularne, pa možemo definirati operatore

$$A = TS^{-1} \quad \text{i} \quad B = ST^{-1}.$$

Tada je

$$AS = (TS^{-1})S = T(S^{-1}S) = TI = T,$$

ili zapisano kao množenje matrica

$$(As_1, \ldots, As_n) = (t_1, \ldots, t_n).$$

Zbog relacija

$$t_1 = As_1, \ldots, \ t_n = As_n$$

operator A zovemo *operatorom prijelaza iz baze S u bazu T*. Na sličan način vidimo da je B operator prijelaza iz baze T u bazu S:

$$s_1 = Bt_1, \ldots, \ s_n = Bt_n.$$

3.10. Grupa permutacija S_n. Bijekciju

$$\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

obično zovemo *permutacijom skupa* $\{1, \ldots, n\}$ i obično zapisujemo kao niz

$$\sigma(1), \ldots, \sigma(n).$$

Tako, na primjer, niz 2431 označava permutaciju

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 3, \quad 4 \mapsto 1$$

skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Kompozicija permutacija $\sigma \circ \nu$ je permutacija koju zapisujemo $\sigma\nu$ i zovemo produktom permutacija σ i ν, a kompoziciju zovemo množenjem.

Binarna operacija množenje permutacija je asocijativna, postoji jedinica id i svaka permutacija σ ima inverz σ^{-1}, pa kažemo da je skup permutacija grupa. Grupu permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ označavamo sa S_n.

3.11. Pitanje. Da li niz 123123 predstavlja permutaciju u S_6 ? DA NE

3.12. Primjer. Za permutaciju $\sigma = 3412$ je $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Naime

$$\begin{aligned}
\sigma^2(1) &= \sigma(\sigma(1)) = \sigma(3) = 1, \\
\sigma^2(2) &= \sigma(\sigma(2)) = \sigma(4) = 2, \\
\sigma^2(3) &= \sigma(\sigma(3)) = \sigma(1) = 3, \\
\sigma^2(4) &= \sigma(\sigma(4)) = \sigma(2) = 4.
\end{aligned}$$

3.13. Pitanje. Da li je 4231 inverz permutacije 4231 u S_4 ? DA NE

3.14. Matrice permutacija. Za permutaciju σ skupa $\{1,\dots,n\}$ definiramo $n\times n$ *matricu permutacije*

$$T_\sigma = (e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}).$$

Drugim riječima, matrica permutacije σ je matrica regularnog operatora T_σ na $\mathbb{R}^n$ definiranog na kanonskoj bazi relacijama

$$T_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}\,, \qquad j=1,\dots,n.$$

Na primjer, za permutaciju 4231 u S_4 imamo 4×4 matricu permutacije

$$T_\sigma = (e_4,e_2,e_3,e_1) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix},$$

a za identitetu id $=1234$ je matrica permutacije jedinična matrica

$$T_{\mathrm{id}} = (e_1,e_2,e_3,e_4) = I.$$

3.15. Pitanje. Da li je $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$ matrica permutacije? DA NE

3.16. Množenje matrica permutacija. Budući da za produkt permutacija $\sigma\nu$ vrijedi

$$T_{\sigma\nu}e_j = e_{(\sigma\nu)(j)} = e_{\sigma(\nu(j))} = T_\sigma e_{\nu(j)} = T_\sigma(T_\nu e_j),$$

to za matrice permutacija vrijedi formula

$$T_{\sigma\nu} = T_\sigma T_\nu. \tag{3.2}$$

Budući da je $T_{\mathrm{id}} = I$, iz gornje formule slijedi $I = T_\sigma T_{\sigma^{-1}}$, odnosno

$$T_{\sigma^{-1}} = (T_\sigma)^{-1}.$$

3.17. Primjer. Budući da je $\sigma^2 = \mathrm{id}$ za permutaciju $\sigma = 3412$, to je

$$T_\sigma^2 = I, \qquad (T_\sigma)^{-1} = T_\sigma,$$

ili zapisano pomoću matrica

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

3.18. Elementarne matrice. Matricu dobivenu nekom elementarnom transformacijom stupaca jedinične matrice zovemo *elementarnom matricom.* Znači da imamo tri tipa elementarnih $n \times n$ matrica

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n) \qquad i < j, \tag{3.3}$$

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, \lambda e_i, e_{i+1}, \dots, , e_n) \qquad \lambda \neq 0, \tag{3.4}$$

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \lambda e_j, e_{i+1}, \dots, e_n) \qquad j \neq i. \tag{3.5}$$

Na primjer, imamo 4×4 elementarne matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.19. Množenje elementarnom matricom je elementarna transformacija. Neka je

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$

$m \times n$ matrica i E elementarna matrica (3.3). Tada je po definiciji množenja matrica

$$\begin{aligned} AE &= A(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= (Ae_1, \dots, Ae_{i-1}, Ae_j, Ae_{i+1}, \dots, Ae_{j-1}, Ae_i, Ae_{j+1}, \dots, Ae_n) \\ &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Znači da je $A \mapsto AE$ elementarna transformacija zamjene i-tog i j-tog stupca matrice A.

Ako je E elementarna matrica (3.4), onda je

$$\begin{aligned} AE &= A(e_1, \dots, e_{i-1}, \lambda e_i, e_{i+1}, \dots, , e_n) \\ &= (Ae_1, \dots, Ae_{i-1}, A\lambda e_i, Ae_{i+1}, \dots, Ae_n) \\ &= (a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Znači da je $A \mapsto AE$ elementarna transformacija množenja i-tog stupca matrice A skalarom $\lambda \neq 0$.

Ako je E elementarna matrica (3.5), onda je

$$\begin{aligned} AE &= A(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \lambda e_j, e_{i+1}, \dots, , e_n) \\ &= (Ae_1, \dots, Ae_{i-1}, A(e_i + \lambda e_j), Ae_{i+1}, \dots, Ae_n) \\ &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \lambda a_j, a_{i+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Znači da je $A \mapsto AE$ elementarna transformacija pribrajanja i-tom stupcu matrice A j-tog stupca pomnoženog skalarom λ.

3.20. Regularna matrica je produkt elementarnih matrica. Za regularnu matricu $T = (t_1, \dots, t_n)$ su vektori $t_1, \dots, t_n$ izvodnice, pa iz dokaza teorema 1.7.7 slijedi $T \sim I$. Znači da postoji niz elementarnih transformacija

$$I \mapsto I' \mapsto \dots \mapsto T,$$

ili zapisano pomoću elementarnih matrica

$$I \mapsto IE_1 \mapsto IE_1E_2 \mapsto \dots \mapsto IE_1E_2 \dots E_s = T.$$

Znači da T možemo napisati kao produkt elementarnih matrica

$$T = E_1E_2 \dots E_s.$$

3.21. Primjer. Za niz elementarnih transformacija

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

imamo inverzne transformacije

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

pa je

$$A = IE_1E_2E_3 = I(e_1, e_2 + e_1, e_3)(e_1, e_2, e_3 + 3e_1)(e_1, e_2, e_3 - e_2).$$

Znači da je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Koordinatizacija u zadanoj bazi prostora $\mathbb{R}^n$

4.1. Koordinatizacija. Neka je $T = (t_1, \dots, t_n)$ uređena baza prostora $\mathbb{R}^n$. Koeficijente u jedinstvenom prikazu vektora x kao linearne kombinacije

$$x = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n \tag{4.1}$$

zovemo *koordinatama vektora x u bazi T*, pri čemu λ_1 zovemo *prvom koordinatom*, λ_2 zovemo *drugom koordinatom* itd. Koordinate $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vektora x u bazi T čine n-torku realnih brojeva x_T koje zapisujemo kao vektor u $\mathbb{R}^n$

$$x_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Budući da za svaki vektor x postoji jedinstveni zapis u bazi, to su za svaki vektor x koordinate x_T u potpunosti određene. Zato imamo dobro definirano preslikavanje

$$x \mapsto x_T$$

s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$ koje vektoru x pridružuje njegove koordinate u bazi T. To preslikavanje zovemo *koordinatizacijom s obzirom na bazu* T.

Shvatimo li uređenu bazu $T = (t_1, \dots, t_n)$ kao regularnu $n \times n$ matricu, onda je relacijom (4.1) definirano množenje matrice T i vektora x_T

$$x = Tx_T. \tag{4.2}$$

Budući da je T regularna matrica, odavle dobivamo

4.2. Teorem. *Za koordinata x_T vektora x u bazi T vrijedi*

$$x_T = T^{-1}x. \tag{4.3}$$

Nadalje, koordinatizacija je linearna bijekcija $T^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

4.3. Napomena. Nama će biti zgodno zapisivati linearnost koordinatizacije T^{-1} formulama

$$(x+y)_T = x_T + y_T, \qquad (\lambda x)_T = \lambda x_T. \tag{4.4}$$

4.4. Primjer. U uređenoj bazi $T = (e_3, e_1, e_2)$ prostora $\mathbb{R}^3$ prva koordinata vektora

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_3 e_3 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

je ξ_3, druga koordinata je ξ_1 i treća koordinata je ξ_2. Znači da je koordinatizacija s obzirom na tu bazu preslikavanje

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto x_T = \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

4.5. Primjer. Neka je

$$T = (t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prema formuli (4.2) koordinate $x_T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektora $x = (-1, 2, 0)$ u uređenoj bazi T možemo tražiti kao rješenje sistema jednadžbi

$$\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2 + \xi_3 t_3 = x,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

5. Matrica operatora i promjena baze

5.1. Zadavanje operatora na bazi. *Neka je $t_1, \dots, t_n$ baza u $\mathbb{R}^n$ i neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje. Tada je A u potpunosti određeno svojim vrijednostima*

$$At_1, \dots, At_n$$

na elementima baze $t_1, \dots, t_n$.

Naime, za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$ postoji jedinstveni zapis u bazi

$$x = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n,$$

pa zbog linearnosti preslikavanja A imamo formulu

$$Ax = A(\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n) = \lambda_1 At_1 + \cdots + \lambda_n At_n$$

kojom je vektor Ax izražen pomoću vektora $At_1, \dots, At_n$ i koordinata vektora x.

Primijetimo da smo isti dokaz već koristili u točki 2.2.1 u slučaju kanonske baze. Isto tako možemo ponoviti i razmatranje iz točke 2.3.1 koristeći linearnost koordinatizacije (4.4):

Neka je zadan niz vektora $a_1, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^n$. Tada je preslikavanje

$$x = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n \quad \mapsto \quad A(x) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ za koje je $At_1 = a_1, \ \dots, \ At_n = a_n$.

5.2. Primjer refleksije u ravnini. Neka je $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano matricom

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}.$$

To preslikavanje možemo interpretirati geometrijski kao refleksiju (ili osnu simetriju) u ravnini u odnosu na simetralu prvog i trećeg kvadranta odabranog pravokutnog Kartezijevog sustava u euklidskoj ravnini (nacrtajte sliku!) jer za vektore

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

imamo

$$At_1 = t_1 \quad \text{i} \quad At_2 = -t_2, \tag{5.1}$$

a za proizvoljan vektor $x = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$ u $\mathbb{R}^2$ imamo (nacrtajte sliku!)

$$A(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) = \lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2.$$

Jasno je da smo refleksiju A mogli od početka zadati u uređenoj bazi

$$T = (t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

relacijama (5.1).

5.3. Primjer. Neka je $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator zadan u uređenoj bazi

$$T = (t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

relacijama

$$Bt_1 = 3t_1 \quad \text{i} \quad Bt_2 = t_2. \tag{5.2}$$

Očito je

$$e_1 = \tfrac{1}{2}(t_1 - t_2) \quad \text{i} \quad e_2 = \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2),$$

pa je

$$Be_1 = B(\tfrac{1}{2}t_1 - \tfrac{1}{2}t_2) = \tfrac{1}{2}3t_1 - \tfrac{1}{2}t_2 = \tfrac{1}{2}3(e_1 + e_2) - \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2) = 2e_1 + e_2,$$
$$Be_2 = B(\tfrac{1}{2}t_1 + \tfrac{1}{2}t_2) = \tfrac{1}{2}3t_1 + \tfrac{1}{2}t_2 = \tfrac{1}{2}3(e_1 + e_2) + \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2) = e_1 + 2e_2.$$

Znači da je matrica linearnog preslikavanja B u kanonskoj bazi

$$(Be_1, Be_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.4. Matrica linearnog operatora u uređenoj bazi T. Neka je $T = (t_1, \ldots, t_n)$ uređena baza u $\mathbb{R}^n$ i neka je

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

linearano preslikavanje. Tom linearnom preslikavanju pridružujemo matricu tipa $n \times n$ čiji su stupci koordinate vektora $At_1, \ldots, At_n$ u bazi T

$$A_T = ((At_1)_T, \ldots, (At_n)_T). \tag{5.3}$$

Ako je $A_T = (\alpha_{ij})$, onda dogovor o matrici operatora u bazi T znači

$$At_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} t_i, \quad \text{za } j = 1, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Budući da je linearno preslikavanje A u potpunosti određeno vektorima $At_1, \ldots, At_n$, to je A u potpunosti određeno i matricom A_T koju zovemo *matricom operatora A u uređenoj bazi T*.

5.5. Primjer. Za linearne operatore A i B i uređenu bazu T iz primjera 5.2 i 5.2 imamo matrice

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6. Teorem. *Matrica operatora A u bazi T je produkt matrica*

$$A_T = T^{-1}AT. \tag{5.5}$$

DOKAZ. Koristeći formulu (4.3) za vektore At_j dobivamo

$$\begin{aligned} A_T &= ((At_1)_T, \ldots, (At_n)_T) = (T^{-1}At_1, \ldots, T^{-1}At_n) \\ &= (T^{-1}ATe_1, \ldots, T^{-1}ATe_n) = T^{-1}AT. \end{aligned}$$

∎

5.7. Primjer. Za operatore $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ i uređenu bazu T iz primjera 5.2 i i 5.2 imamo

$$T^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

pa prema teoremu 5.8 imamo

$$A_T = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$B_T = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(što smo, doduše, već znali).

5.8. Teorem. *Koordinate vektora Ax u bazi T računamo kao množenje matrice operatora A_T u bazi T i koordinata vektora x u bazi T, tj.*

$$(Ax)_T = A_T\, x_T. \tag{5.6}$$

Dokaz. Zbog linearnosti operatora A i linearnosti koordinatizacije (4.4) imamo

$$(Ax)_T = \left(A\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_i\right)\right)_T = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A t_i\right)_T = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,(At_i)_T\,.$$

No zadnji izraz je upravo definicija množenja matrice $((At_1)_T, \dots, (At_n)_T)$ i n-torke koordinata x_T. $\square$

5.9. Kompozicija operatora i množenje matrica. *Ako je T uređena baza prostora $\mathbb{R}^n$ i*

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

linearna preslikavanja, onda je matrica kompozicije BA u bazi T jednaka produktu matrica operatora B i A u bazi T, tj.

$$(BA)_T = B_T A_T. \tag{5.7}$$

Dokaz. Koristeći definiciju matrice operatora i formulu (5.6) za j-ti stupac dobivamo

$$(BAt_j)_T = B_T(At_j)_T = B_T(A_T(t_j)_T) = (B_T A_T)e_j.$$

S lijeve strane je po definiciji j-ti stupac matrice $(BA)_T$, a s desne strane je formula za j-ti stupac u produktu matrica B_T i A_T. $\square$

Napomena. Prethodna dva teorema pokazuju da pri računanju s koordinatama vektora u bazi T i matricama operatora u bazi T koristimo ista pravila množenja matrica i vektora koja koristimo u kanonskoj bazi. U slučaju kad je T kanonska baza, tj. $T = I$, onda je

$$x_I = x \quad \text{i} \quad A_I = A,$$

pa formula (5.6) glasi da koordinate vektora Ax računamo množenjem matrice A i vektora x, a formula (5.7) glasi da je matrica kompozicije preslikavanja jednaka produktu matrica preslikavanja.

Ponekad je računanje s matricama operatora u nekoj bazi T mnogo jednostavnije od računanja u kanonskoj bazi, što ilustrira sljedeći primjer:

5.10. Primjer. Zamislimo si da za linearan operator B iz primjera 5.2 trebamo računati

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{100}.$$

Možemo računati redom

$$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}, \quad B^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}, \dots .$$

Potencije matrice B_T za bazu $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je lakše računati

$$B_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_T^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \quad B_T^{100} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 1^{100} \end{pmatrix}.$$

Budući da je

$$B = TB_TT^{-1},$$

to za prirodan broj n

$$B^n = (TB_TT^{-1})^n = TB_TT^{-1}TB_TT^{-1} \cdots TB_TT^{-1}TB_TT^{-1},$$

pa zbog $T^{-1}T = I$ imamo

$$B^n = T(B_T)^nT^{-1}. \tag{5.8}$$

Znači da je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

a posebno

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{100} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{100}+1 & 3^{100}-1 \\ 3^{100}-1 & 3^{100}+1 \end{pmatrix}.$$

Napomena. Za brojeve 3 i 1 ima smisla govoriti o potencijama 3^n i $1^n = 1$ i za realne brojeve $n = \frac{1}{2}$ ili $n = \sqrt{2}$. Formula (5.9) pruža nam mogućnost da **definiramo** potencije matrice B^n i za realne brojeve $n = \frac{1}{2}$ ili $n = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{\sqrt{2}} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1^{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

5.11. Zadatak. Pokažite da za matricu $\sqrt{B}$ definiranu prvom relacijom u (5.10) vrijedi

$$(\sqrt{B})^2 = \sqrt{B}\sqrt{B} = B.$$

6. Trag i invarijante linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$

6.1. Trag matrice. *Trag* kvadratne $n \times n$ matrice $A = (\alpha_{ij})$ je suma njezinih dijagonalnih elemenata, tj.

$$\mathrm{tr}A = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}.$$

Na primjer,

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 + 1 = 4, \quad \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 0 = 1.$$

6.2. Zadatak. Pokažite da je trag linearna funkcija na vektorskom prostoru $n \times n$ matrica, tj. da vrijedi

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B, \qquad \mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}A.$$

6.3. Osnovno svojstvo traga za produkt dvije matrice. Za dvije $n \times n$ matrice $A = (\alpha_{ij})$ i $B = (\beta_{ij})$ je

$$\mathrm{tr}AB = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{ki}\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{ki},$$
$$\mathrm{tr}BA = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ki}\alpha_{ik}\right) = \sum_{k,i=1}^{n} \beta_{ki}\alpha_{ik}.$$

Znači da je

$$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA. \tag{6.1}$$

6.4. Pitanje. Da li formula (6.1) ima smisla za $n \times m$ matricu A i $m \times n$ matricu B?

6.5. Teorem. *Za matricu operatora A u bazi T je*

$$\mathrm{tr}A_T = \mathrm{tr}A.$$

DOKAZ. Koristeći teorem 5.6 i formulu (6.5) dobivamo

$$\mathrm{tr}A_T = \mathrm{tr}(T^{-1}(AT)) = \mathrm{tr}((AT)T^{-1}) = \mathrm{tr}(AI) = \mathrm{tr}A.$$

□

6.6. Primjer. Za A_T i A iz primjera 5.7 imamo

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

6.7. Primjer. Za matricu

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ne postoji uređena baza S takva da

$$B_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Naime, da postoji, imali bismo

$$4 = \mathrm{tr}B = \mathrm{tr}B_S = 0.$$

6.8. Pitanje. Da li za operator $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ postoji baza S tako da je $C_S = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$? DA NE

6.9. Invarijante linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$. Funkciju f na skupu svih realnih $n \times n$ matrica koja svakoj matrici B pridružuje realan broj $f(B)$, pišemo

$$f \colon B \mapsto f(B),$$

zovemo *invarijantom linearnih operatora na* $\mathbb{R}^n$, ili samo *invarijantom*, ako za svaki operator A i svaku uređenu bazu T vrijedi

$$f(A_T) = f(A).$$

Drugim riječima, f je invarijanta ako za svaku matricu A i svaku regularnu matricu T vrijedi

$$f(T^{-1}AT) = f(A).$$

6.10. Trag i invarijante. Prema teoremu 6.5 trag

$$f(A) = \mathrm{tr}A$$

je invarijanta. No onda je za svaku funkciju g kompozicija $g(f(A))$ invarijanta. Na primjer, funkcije

$$f_2(A) = (\mathrm{tr}A)^2, \quad f_3(A) = (\mathrm{tr}A)^3, \quad f_4(A) = (\mathrm{tr}A)^4, \dots$$

su invarijate. Iz relacije (5.7) slijedi $(A^k)_T = (A_T)^k$, pa je $\mathrm{tr}(A_T)^k = \mathrm{tr}A^k$. Znači da su funkcije

$$h_2(A) = \mathrm{tr}(A^2), \quad h_3(A) = \mathrm{tr}(A^3), \quad h_4(A) = \mathrm{tr}(A^4), \dots$$

invarijante. Veoma važna invarijanta je determinanta operatora (koju ćemo proučavati kasnije).

6.11. Determinanta 2×2 matrice. Determinanta 2×2 matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \text{je broj} \qquad \det A = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Na primjer

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

6.12. Zadatak. Dokažite da je za 2×2 matricu

$$\det A = \tfrac{1}{2}(\mathrm{tr} A)^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2).$$

6.13. Primjer. Za matricu

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

postoji uređena baza T takva da

$$B_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i ne postoji uređena baza S takva da

$$B_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zato se možemo pitati za koje sve λ i μ postoji uređena baza S takva da

$$B_S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}?$$

Budući da su trag i determinanta invarijante, mora biti

$$\lambda + \mu = \mathrm{tr} B_S = \mathrm{tr} B = 4, \qquad \lambda \cdot \mu = \det B_S = \det B = 3,$$

pa iz Vieteovih formula vidimo da λ i μ moraju biti rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) = 0.$$

6.14. Primjer. Za matricu

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne postoji uređena baza S takva da je

$$N_S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

za neke λ i μ. Naime, da postoji, imali bismo

$$\lambda + \mu = \mathrm{tr} N_S = \mathrm{tr} N = 0, \qquad \lambda \cdot \mu = \det B_S = \det B = 0,$$

pa bi iz Vieteovih formula slijedilo da λ i μ moraju biti rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 0x + 0 = x^2 = 0.$$

No $\lambda = \mu = 0$ daje

$$N_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

pa bi za $N \neq 0$ bilo $N = SN_SS^{-1} = S0S^{-1} = 0$.

Napomena. Gornji argument je trebao ilustrirati kako možemo koristiti invarijante. U konkretnom primjeru mogli smo do istog zaključka doći i na drugi način: Prvo uočimo da je

$$N^2 = 0.$$

Da je u nekoj bazi S

$$N_S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

s jedne strane bi zbog (5.7) bilo $(N_S)^2 = (N^2)_S = 0_S = 0$, a s druge strane

$$(N_S)^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}.$$

Sada $\lambda^2 = \mu^2 = 0$ daje $\lambda = \mu = 0$, pa zaključujemo kao prije da je $N = 0$, suprotno $N \neq 0$.

7. Kompleksni brojevi kao 2×2 realne matrice

7.1. Kompleksni brojevi. Kompleksni brojevi su uređeni parovi (α, β) realnih brojeva koje zapisujemo kao

$$z = \alpha + i\beta.$$

Operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva definirane su formulama

$$(\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta') = (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta'),$$
$$(\alpha + i\beta) \cdot (\alpha' + i\beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \beta\alpha').$$

Skup svih kompleksnih brojeva s tako definiranim operacijama zbrajanja i množenja označavamo sa $\mathbb{C}$.

7.2. Skup $\mathbb{C}$ kao $\mathbb{R}^2$. Kompleksne brojeve $x = \xi_1 + i\xi_2$ možemo zapisati kao vektor-stupce

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

u $\mathbb{R}^2$. Tada je zbrajanje kompleksnih brojeva $x' + x''$ zbrajanje vektora u $\mathbb{R}^2$, a množenjem kompleksnog broja $x = \xi_1 + i\xi_2$ realnim brojem $\lambda = \lambda + i0$ dobivamo

$$\lambda x = (\lambda + i0)(\xi_1 + i\xi_2) = (\lambda\xi_1 - 0\xi_2) + i(\lambda\xi_2 + 0\xi_1),$$

što zapisujemo kao

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Znači da je skup $\mathbb{C}$ vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ s operacijama zbrajanja i množenja realnim brojevima λ. Kanonsku bazu označavamo s

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.3. Množenje kompleksnim brojem je linearni operator na $\mathbb{R}^2$. Budući da je množenje kompleksnih brojeva distributivno prema zbrajanju te asocijativno i komutativno, za kompleksni broj z vrijedi

$$z \cdot (x' + x'') = z \cdot x' + z \cdot x'', \qquad z \cdot (\lambda x) = \lambda(z \cdot x),$$

pa je preslikavanje

$$z \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto z \cdot x \tag{7.1}$$

linearan operator. Za kompleksni broj

$$z = \alpha + i\beta$$

su $z \cdot 1 = \alpha + i\beta$ i $z \cdot i = -\beta + i\alpha$ vrijednosti linearnog preslikavanja (7.1) na kanonskoj bazi, pa je

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

matrica tog linearnog preslikavanja.

7.4. Kompleksni brojevi kao 2×2 realne matrice. Očito možemo identificirati kompleksne brojeve i realne 2×2 matrice oblika

$$\alpha + i\beta \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Pri toj identifikaciji zbrajanju kompleksnih brojeva $z + z'$ odgovara zbrajanje preslikavanja po točkama

$$(z + z') \cdot x = z \cdot x + z' \cdot x,$$

dakle zbrajanje matrica

$$(\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta') \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix},$$

a množenju kompleksnih brojeva $z \cdot z'$ odgovara kompozicija preslikavanja

$$(z \cdot z') \cdot x = z \cdot (z' \cdot x),$$

dakle množenje matrica

$$(\alpha + i\beta) \cdot (\alpha' + i\beta') \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}.$$

7.5. Kompleksni brojevi jesu 2×2 realne matrice. Svo gornje razglabanje mogli smo preskočiti da smo rekli da kompleksni brojevi naprosto **jesu** realne 2×2 matrice oblika

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

s operacijama zbrajanja i množenja matrica. Pri tome bi trebalo provjeriti da je suma i produkt takvih matrica istog oblika i da za

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{imamo inverz} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sva ostala svojstva zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva, uključujući komutativnost množenja, slijede iz općih svojstava zbrajanja i množenja kvadratnih matrica.

8. Kvaternioni kao 2×2 kompleksne matrice

8.1. Skup kvaterniona. Kvaternioni su kompleksne 2×2 matrice oblika

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

pri čemu je $\bar{\alpha}$ kompleksno konjugiran broju α. Na primjer, matrice

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

su kvaternioni, a tzv. *Paulijeve matrice* **nisu** kvaternioni

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.2. Pitanje. Da li je matrica $\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ kvaternion? DA NE

8.3. Kvaternioni ili hiperkompleksni brojevi. Očito je

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & -\bar{\beta}' \\ \beta' & \bar{\alpha}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha' & -\overline{(\beta + \beta')} \\ \beta + \beta' & \overline{(\alpha + \alpha')} \end{pmatrix},$$

pa na skupu kvaterniona imamo definirano zbrajanje. Pomnožimo li dva kvaterniona dobivamo kvaternion

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & -\bar{\beta}' \\ \beta' & \bar{\alpha}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \bar{\beta}\beta' & -\overline{(\beta\alpha' + \bar{\alpha}\beta')} \\ \beta\alpha' + \bar{\alpha}\beta' & \overline{(\alpha\alpha' - \bar{\beta}\beta')} \end{pmatrix},$$

pa na skupu kvaterniona imamo definirano množenje. Skup kvaterniona s operacijama zbrajanja i množenja matrica označavamo s $\mathbb{H}$ i zovemo ga *algebrom kvaterniona* ili *algebrom hiperkompleksnih brojeva.*

8.4. Svojstva zbrajanja i množenja kvaterniona. Operacija zbrajanja kvaterniona ima sva svojstva zbrajanja kvadratnih matrica: asocijativnost, komutativnost, imamo kvaternion nula

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i svaki kvaternion Z ima suprotni $-Z$. Operacija množenja kvaterniona ima sva svojstva množenja kvadratnih matrica: asocijativnost, distributivnost množenja prema zbrajanju i imamo jedinicu

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Štoviše, iz relacije

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vidimo da svaki kvaternion $Z \neq 0$ ima inverz Z^{-1}

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad Z^{-1} = \tfrac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Množenje kvaterniona nije komutativno[2], na primjer

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

8.5. Pitanje. Možemo li riješiti sistem jednadžbi

$$A_{11}Z_1 + A_{12}Z_2 = B_1,$$
$$A_{21}Z_1 + A_{22}Z_2 = B_2,$$

gdje su zadani kvaternioni A_{ij} i B_i, a nepoznanice su kvaternioni Z_j?

8.6. Konjugacija kvaterniona. Za kvaternion Z definiramo konjugirani kvaternion Z^*

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad Z^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Očito je $(Z_1 + Z_2)^* = Z_1^* + Z_2^*$. Budući da množenje nije komutativno, važno je primijetiti da je

$$(Z_1 Z_2)^* = Z_2^* Z_1^*$$

za $Z_1, Z_2 \in \mathbb{H}$.

[2] Operacije zbrajanja i množenja kvaterniona imaju sva svojstva u definiciji polja **osim** komutativnosti množenja. Zato $\mathbb{H}$ nije polje.

8.7. Apsolutna vrijednost kvaterniona. Za kvaternion Z definiramo apsolutnu vrijednost (ili normu) $|Z|$ relacijom

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |Z|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \det Z.$$

Očito je $|Z| = 0$ ako i samo ako je $Z = 0$. Također vrijedi

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1|\,|Z_2|$$

za $Z_1, Z_2 \in \mathbb{H}$.

8.8. Skup kvaterniona kao $\mathbb{R}^4$. Kvaternion možemo zapisati kao

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 & \alpha_2 + i\alpha_3 \\ -\alpha_2 + i\alpha_3 & \alpha_0 - i\alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_0 I + \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3$$

gdje je $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ četvorka realnih brojeva u $\mathbb{R}^4$ i

$$J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

U ovom zapisu kvaterniona imamo

$$(\alpha_0 I + \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3)^* = \alpha_0 I - \alpha_1 J_1 - \alpha_2 J_2 - \alpha_3 J_3,$$
$$|Z| = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2},$$
$$Z^{-1} = \frac{1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\,(\alpha_0 I - \alpha_1 J_1 - \alpha_2 J_2 - \alpha_3 J_3).$$

8.9. Imaginarne jedinice. Kvaternione J_1, J_2, J_3 zovemo *imaginarnim jedinicama* jer je

$$|J_1| = |J_2| = |J_3| = 1$$

i vrijede relacije

$$\begin{aligned} &J_1^2 = -I, \quad J_2^2 = -I, \quad J_3^2 = -I, \\ &J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3, \quad J_2 J_3 = -J_3 J_2 = J_1, \quad J_3 J_1 = -J_1 J_3 = J_2. \end{aligned} \tag{8.1}$$

8.10. Zadatak. Dokažite sve nedokazane tvrdnje o kvaternionima.