Linearna algebra za fizičare, zimski semestar 2006.

Mirko Primc

Sadržaj

POGLAVLJE 2

Linearna preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$

0.1. Kompozicija preslikavanja. Neka su A, B i C skupovi i $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ preslikavanja. Tada preslikavanje

$$h\colon A \to C,$$

koje elementu a iz A pridružuje element $h(a)$ iz C po pravilu

$$h(a) = g(f(a)),$$

zovemo *kompozicijom preslikavanja* f *i* g i pišemo $h = g \circ f$.

0.2. Asocijativnost kompozicije preslikavanja. Neka su A, B, C i D skupovi i $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ i $h\colon C \to D$ preslikavanja. Tada je

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Naime, s jedne je strane $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$, a s druge strane je $(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$, dakle jednako prvom, i to za svaki $a \in A$.

0.3. Identiteta na skupu. Neka je A skup. *Identiteta* id *na skupu* A, ili id_A ako želimo naglasiti skup A, je bijekcija

$$\mathrm{id}\colon A \to A, \qquad \mathrm{id}(a) = a \quad \text{za sve} \quad a \in A.$$

0.4. Kompozicija preslikavanja s identitetom. Za svako preslikavanje $f\colon A \to B$ vrijedi

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Naime, za sve $a \in A$ vrijedi $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a)$. Isto tako, za sve $a \in A$ vrijedi $(\mathrm{id}_B \circ f)(a) = \mathrm{id}_B(f(a)) = f(a)$.

1. Linearna preslikavanja

1.1. Definicija linearnog preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. Kažemo da je preslikavanje

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

linearno preslikavanje ili *linearan operator* ako za sve vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ i sve skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \qquad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Ako je A linearno, onda je običaj umjesto $A(x)$ pisati Ax.

1.2. Svojstvo linearnosti preslikavanja i linearne kombinacije. Primijetimo da je zbrajanje vektora $x+y$ operacija u području definicije $\mathbb{R}^n$ preslikavanja A, a da je zbrajanje vektora A(x)+A(y) operacija u području vrijednosti $\mathbb{R}^m$ preslikavanja A. Grubo govoreći, u slučaju linearnog preslikavanja je svejedno da li izvodimo operacije zbrajanja i množenja skalarom prije "primjene" preslikavanja A ili nakon "primjene" preslikavanja A. To vrijedi i za proizvoljne linearne kombinacije:

$$A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s. \tag{1.1}$$

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po s. Za $s = 1$ tvrdnja vrijedi jer po pretpostavci imamo $A(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 A x_1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $s \geq 1$. Tada je

$$\begin{aligned}
&A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s + \lambda_{s+1} x_{s+1}) \\
&= A((\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) + \lambda_{s+1} x_{s+1}) \\
&= A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) + A(\lambda_{s+1} x_{s+1}) \\
&= (\lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s) + \lambda_{s+1} A x_{s+1} \\
&= \lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s + \lambda_{s+1} A x_{s+1}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da druga jednakost vrijedi zbog pretpostavljenog svojstva za sumu dva vektora. □

1.3. Primjer: identiteta $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je linearno preslikavanje. Običaj je identitetu na skupu $\mathbb{R}^n$ označavati s I. Identiteta je očito linearno preslikavanje

$$I(x+y) = x+y = I(x) + I(y), \qquad I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x).$$

1.4. Pitanje. Da li je centralna simetrija $x \mapsto -x$ u $\mathbb{R}^3$ linearno preslikavanje? DA NE

1.5. Primjer: rotacija u ravnini za kut $\frac{\pi}{2}$ je linearno preslikavanje. Preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano formulom

$$A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\xi_2\\ \xi_1\end{pmatrix}$$

je linearno preslikavanje. Naime,

$$A(a+b) = A\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(\alpha_2+\beta_2)\\ \alpha_1+\beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\beta_2\\ \beta_1\end{pmatrix} = Aa + Ab,$$

a na sličan način vidimo i

$$A(\lambda a) = A\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda\alpha_2\\ \lambda\alpha_1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \lambda A a.$$

Linearnost preslikavanja A možemo dokazati i geometrijski: Interpretiramo li $a = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{smallmatrix}\right)$ kao vektor-strelicu u euklidskoj ravnini, onda je vektor-strelica $Aa = \left(\begin{smallmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{smallmatrix}\right)$ dobiven iz a rotacijom oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$ (nacrtajte sliku!). Rotacija A prevodi paralelogram s vrhovima $0, a, b, a+b$ u paralelogram s vrhovima $0, Aa, Ab, A(a+b)$, a ovaj drugi mora biti (zbog definicije zbrajanja vektor-strelica) paralelogram $0, Aa, Ab, Aa + Ab$. Sada jednakost vrhova daje relaciju

$$A(a+b) = Aa + Ab.$$

Na sličan geometrijski način možemo dokazati i relaciju

$$A(\lambda a) = \lambda Aa.$$

1.6. Primjer: rotacija u ravnini za kut φ je linearno preslikavanje. Geometrijski argument o linearnosti rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ možemo ponoviti za bilo koju rotaciju oko ishodišta: *rotacija $R_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oko ishodišta u euklidskoj ravnini za kut φ je linearno preslikavanje.*

2. Matrica linearnog preslikavanja

2.1. Linearno preslikavanje određeno je vrijednostima na kanonskoj bazi. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearano preslikavanje i $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada su u potpunosti određeni vektori

$$a_1 = Ae_1, \quad a_2 = Ae_2, \quad \dots \quad a_n = Ae_n$$

u $\mathbb{R}^m$, napišimo ih kao

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Budući da je A linearno, dovoljno je znati vektore $a_1, a_2, \dots, a_n$ da bi odredili Ax za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Naime, proizvoljni vektor $x \in \mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način zapisati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n,$$

pa zbog linearnosti preslikavanja A imamo

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n. \tag{2.1}$$

Znači da je vektor Ax izražen kao linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$ u kojoj su koeficijenti koordinate $\xi_1, \dots, \xi_n$ vektora x:

$$Ax = \xi_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \xi_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.2. Pitanje. Da li je linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ određeno vrijednostima u kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3 prostora $\mathbb{R}^3$? DA NE

2.3. Matrica linearnog preslikavanja. Razmatranje u prethodnoj točki pokazuje da je linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u potpunosti određeno n-torkom vektora $(Ae_1, \ldots, Ae_n) = (a_1, \ldots, a_n)$ iz $\mathbb{R}^m$ koju zovemo *matricom linearnog preslikavanja A u kanonskoj bazi* i zapisujemo kao

$$(Ae_1, \ldots, Ae_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica je tipa $m \times n$.

2.4. Matrica identitete je jedinična matrica. Budući da je za identitetu $Ie_j = e_j$, to su stupci matrice preslikavanja $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ upravo elementi kanonske baze prostora $\mathbb{R}^n$. Tu matricu označavamo s I,

$$I = (e_1, \ldots, e_n),$$

i zovemo je *jediničnom matricom.* Na primjer,

$$1 = I, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

gdje je redom I jedinična matrica tipa 1×1, tipa 2×2 i tipa 4×4.

2.5. Pitanje. Da li je $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ matrica centralne simetrije $x \mapsto -x$ u $\mathbb{R}^3$? DA NE

2.6. Primjer: matrica rotacije u ravnini za kut φ. Rotacija $A = R_\varphi$ oko ishodišta za kut φ je linearno preslikavanje, pa je u potpunosti određeno vektorima (nacrtajte sliku!)

$$a_1 = Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad a_2 = Ae_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Matrica rotacije za kut φ je

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Posebno su matrice rotacija za kuteve 0, $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3\pi}{2}$ redom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.7. Množenje matrice i vektora. Za linearno preslikavanje A s matricom $(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ slika $Ax \in \mathbb{R}^m$ proizvoljnog vektora $x \in \mathbb{R}^n$ dana je formulom (2.1). Tu formulu (2.1) za računanje Ax, po koordinatama zapisanu kao (2.2), obično zovemo *množenje matrice* $(a_1, \ldots, a_n)$ *i vektora s koordinatama* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ i pišemo:

$$Ax = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Primijetimo da je definirano množenje matrice s vektorom **samo** za $m\times n$ matrice A s vektor-stupcem x tipa $n \times 1$, i da je rezultat vektor-stupac Ax tipa $m \times 1$. Istaknimo to kao "formulu"

$$(m \times n) \cdot (n \times 1) = (m \times 1).$$

Stavimo li $b = Ax$ i označimo li koordinate vektora b s $\beta_1, \ldots, \beta_m$, tada formulu (2.3) za množenje matrice s vektorom možemo zapisati kraće kao

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j \qquad \text{za sve} \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.4}$$

2.8. Primjeri produkta matrice i vektora.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.9. Pitanje. Da li je definiran produkt matrice i vektora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}? \qquad \text{DA} \quad \text{NE}$$

2.10. Produkt jedinične matrice i vektora. Budući da je za identitetu $Ix = x$, to je formula za računanje vektora Ix množenjem jedinične matrice I s vektorom x opet vektor x. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.11. Primjer. Za rotaciju $A = R_\varphi$ vektor Ax računamo koristeći množenje matrice rotacije (Ae_1, Ae_2) i vektora x

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi \\ \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Posebno rotacije vektora x za kuteve $\frac{\pi}{2}$ i π računamo koristeći množenje matrice i vektora

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix}.$$

3. Zadavanje linearnog preslikavanja matricom

3.1. Zadavanje linearnog preslikavanja matricom. Neka je zadan niz od n vektora $a_1, a_2, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$, ili, što je isto, matrica

$$(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Budući da proizvoljni vektor $x \in \mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način zapisati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n,$$

možemo definirati preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A(x)$, formulom

$$A(x) = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n. \tag{3.2}$$

Tako definirano preslikavanje je linearno. Naime, budući da je i-ta koordinata od λx jednaka $\lambda\xi_i$, to je

$$A(\lambda x) = (\lambda\xi_1)a_1 + \dots + (\lambda\xi_n)a_n = \lambda(\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n) = \lambda A(x).$$

Budući da je i-ta koordinata od $x + y$ jednaka $\xi_i + \eta_i$, to je

$$\begin{aligned} A(x+y) &= (\xi_1 + \eta_1)a_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n)a_n \\ &= (\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n) + (\eta_1 a_1 + \dots + \eta_n a_n) = A(x) + A(y). \end{aligned}$$

Obično kažemo da smo *linearno preslikavanje A zadali vrijednostima $(a_1, \dots, a_n)$ na vektorima kanonske baze.* Primijetimo također da je formula (3.2) kojom smo definirali preslikavanje A u stvari formula za množenje matrice i vektora. Zbog toga vrijedi svojstvo da je množenje vektora matricom A linearno preslikavanje

$$A(x + y) = Ax + Ay, \qquad A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

3.2. Matrica linearnog preslikavanja zadanog matricom. Primijetimo li da je i-ta koordinata vektora e_i kanonske baze jednaka 1, a sve ostale 0, onda vidimo da za linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definirano formulom (3.2) vrijedi

$$Ae_i = a_i.$$

Znači da je matrica (3.1) s kojom smo zadali linearno preslikavanje A u stvari matrica $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ tog linearnog preslikavanja A.

3.3. Primjer. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano je na kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3 u $\mathbb{R}^3$ nizom od tri vektora

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

formulom

$$A\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix} = \xi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \xi_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \xi_3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}.$$

3.4. Pitanje. Da li je matricom

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

zadano linearno preslikavanje s $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^4$? DA NE

3.5. Poistovjećivanje linearnog preslikavanja i matrice. Budući da svakom linearnom preslikavanju pripada matrice, i da svakoj matrici pripada linearno preslikavanje kojemu je to pripadna matrica, mi vrlo često ne pravimo razliku[1] između $m \times n$ matrice $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ i linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$x \mapsto Ax,$$

definiranog formulom (2.3) za produkt Ax matrice $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ i vektora x, već pišemo $A = (Ae_1, \dots, Ae_n)$. U tom je smislu matrica

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano formulom

$$A\colon \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix} \quad\mapsto\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}.$$

[1]Kod poistovjećivanja zanemarujemo razlike među stvarima, ali je dobro pamtiti što smo zanemarili. U ovom konkretnom slučaju treba imati na umu i posebnu ulogu kanonske baze u formuli (2.1).

4. Zbrajanje linearnih preslikavanja i množenje skalarom

4.1. Zbrajanje preslikavanja i množenje skalarom. Neka su

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dva linearna preslikavanja. Budući da na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m$ imamo operacije zbrajanja i množenja skalarom, možemo definirati nova preslikavanja

$$A+B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad \lambda A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tako da za svaku točku x iz $\mathbb{R}^n$ stavimo

$$(A+B)(x) = Ax + Bx, \qquad (\lambda A)(x) = \lambda Ax.$$

Ponekad kažemo da smo te operacije *definirali po točkama.*

To su linearna preslikavanja. Naime, koristeći definiciju zbrajanja, svojstvo linearnosti od A i B i opet definiciju zbrajanja, dobivamo

$$\begin{aligned}(A+B)(x+y) &= A(x+y) + B(x+y) = Ax + Ay + Bx + By\\ &= (A+B)(x) + (A+B)(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B)(\mu x) &= A(\mu x) + B(\mu x) = \mu Ax + \mu Bx = \mu(Ax+Bx)\\ &= \mu(A+B)(x).\end{aligned}$$

Slično dokazujemo i linearnost preslikavanja λA.

4.2. Matrice linearnih preslikavanja $A+B$ i λA. Matrica linearnog preslikavanja $(A+B)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je

$$((A+B)e_1, \dots, (A+B)e_n) = (Ae_1 + Be_1, \dots, Ae_n + Be_n). \tag{4.1}$$

Znači da je svaki stupac matrice preslikavanja $A+B$ suma odgovarajućih stupaca matrice preslikavanja A i matrice preslikavanja B. Budući da ne želimo praviti razliku između preslikavanja i njihovih matrica, formulom

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \tag{4.2}$$

definiramo zbrajanja matrica tipa $m \times n$, tako da (4.1) glasi

$$((A+B)e_1, \dots, (A+B)e_n) = (Ae_1, \dots, Ae_n) + (Be_1, \dots, Be_n).$$

Očito je matrica linearnog preslikavanja λA dobivena množenjem s λ svakog stupca matrice preslikavanja A

$$((\lambda A)e_1, \dots, (\lambda A)e_n) = (\lambda Ae_1, \dots, \lambda Ae_n). \tag{4.3}$$

Budući da ne želimo praviti razliku između preslikavanja i njihovih matrica, formulom

$$\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \tag{4.4}$$

definiramo množenje skalarom matrica tipa $m \times n$, tako da (4.3) glasi

$$((\lambda A)e_1, \dots, (\lambda A)e_n) = \lambda(Ae_1, \dots, Ae_n).$$

4.3. Primjeri zbrajanja matrica i množenja matrice skalarom.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad 3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & 6\\ 3 & 9\end{pmatrix}.$$

4.4. Nul-preslikavanje i nul-matrica. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definirano s $Ax = 0$ za svako x iz $\mathbb{R}^n$ zovemo *nul-preslikavanjem* i označavamo ga s 0. Pripadna matrice tipa $m\times n$ je *nul-matrica* i označavamo je s 0. Na primjer,

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0,\qquad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0,$$

gdje je prva nula matrica tipa 2×2, a druga nula je matrica tipa 2×4. Nul-preslikavanje i nul-matrica su neutralni elementi za odgovarajuće operacije zbrajanja.

4.5. Svojstva operacija zbrajanja matrica i množenja skalarom. Ako su (α_{ij}) i (β_{ij}) matrice tipa $m\times n$, onda definicije zbrajanja matrica (4.2) i množenja matrica skalarom (4.4) možemo zapisati kao

$$(\alpha_{ij})+(\beta_{ij})=(\alpha_{ij}+\beta_{ij}),\qquad \lambda(\alpha_{ij})=(\lambda\alpha_{ij}).$$

Shvatimo li matrične elemente α_{ij} kao koordinate vektora u $\mathbb{R}^{m\cdot n}$, onda je gornja formula upravo definicija zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, pa za te operacije vrijede sva svojstva popisana u točki 1.8. Posebno, imamo nul-matricu 0, neutralni element za zbrajanje, te za svaku matricu (α_{ij}) njoj suprotnu

$$-(\alpha_{ij})=(-\alpha_{ij}).$$

Zbog svojstava operacija zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom, popisanih u točki 1.8, kažemo da je skup svih $m\times n$ matrica vektorski prostor. *Linearnom kombinacijom matrica* zovemo matricu ili izraz

$$\lambda_1 A_1+\cdots+\lambda_s A_s$$

u kojem su λ_i brojevi (skalari), a A_i matrice istoga tipa. Na primjer, matricu rotacije možemo napisati kao linearnu kombinaciju

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\cos\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\sin\varphi\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

4.6. Kanonska baza vektorskog prostora matrica tipa $m\times n$. Svaku matricu $A=(\alpha_{ij})$ tipa $m\times n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}E_{ij},$$

gdje je E_{ij} matrica koja ima matrični element 1 u i-toj koordinati j-tog stupca, a sve ostale elemente 0. Ili, drugim riječima,

$$E_{ij}=(0,\dots,0,e_i,0,\dots,0),$$

pri čemu se element e_i kanonske baze prostora $\mathbb{R}^m$ nalazi na j-tom mjestu. Te matrice zovemo *kanonskom bazom vektorskog prostora matrica tipa* $m \times n$. Tako, na primjer, za 2×2 matrice imamo kanonsku bazu

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

u kojoj možemo na jedinstveni način prikazati svaku 2×2 matricu

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Budući da matrice i operatore možemo identificirati, govorit ćemo i o kanonskoj bazi E_{ij} vektorskog prostora linearnih preslikavanja iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$.

5. Kompozicija linearnih preslikavanja

5.1. Kompozicija linearnih preslikavanja. Ako su

$$A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad B \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

linearna preslikavanja, onda je definirana kompozicija

$$B \circ A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad (B \circ A)(x) = B(A(x))$$

koja je također linearno preslikavanje. Naime,

$$B(A(x+y)) = B(A(x) + A(y)) = B(A(x)) + B(A(y)),$$

$$B(A(\lambda x)) = B(\lambda A(x)) = \lambda B(A(x)).$$

Kompoziciju $B \circ A$ linearnih preslikavanja A i B označavamo kratko s BA. Po dogovoru za linearno preslikavanje C pišemo Cx umjesto $C(x)$, pa po definiciji kompozicije BA imamo

$$(BA)x = B(Ax),$$

što onda pišemo bez zagrada kao

$$BAx.$$

5.2. Množenje matrica. Neka je $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanja s matricom $(a_1, \dots, a_n)$ tipa $m \times n$ i neka je $B \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ linearno preslikavanja s matricom $(b_1, \dots, b_m)$ tipa $k \times m$. Kompozicija $BA \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je linearno preslikavanje i ima matricu

$$C = (c_1, \dots, c_n) = (BAe_1, \dots, BAe_n)$$

tipa $k \times n$, gdje je $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Stupce $c_j = B(Ae_j) = Ba_j$ matrice C računamo po formuli (2.3) za množenje matrice i vektora. Matricu

$$C = (Ba_1, \dots, Ba_n) \tag{5.1}$$

zovemo *produktom matrica* $(b_1, \dots, b_m)$ i $(a_1, \dots, a_n)$.

Primijetimo da je definirano množenje dvije matrice **samo** za $k \times m$ matricu s $m \times n$ matricom i da je rezultat matrica tipa $k \times n$. Istaknimo to kao "formulu"

$$(k \times m) \cdot (m \times n) = (k \times n).$$

Stavimo li $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ i $C = (\gamma_{ij})$, tada formulu (5.1) za množenje matrica

$$C = BA$$

možemo zapisati kraće kao

$$\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^{m} \beta_{ir}\alpha_{rj} \qquad \text{za sve} \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.2}$$

5.3. Primjer. Za matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

produkt AB nije definiran, a za BA imamo

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

5.4. Množenje $n \times n$ matrica nije komutativno. Za dvije $n \times n$ matrice A i B definirani su produkti AB i BA, no općenito oni nisu jednaki. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.5. Zadatak. Dokažite[2] da je $R_\varphi R_\psi = R_{\varphi+\psi}$, tj.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}.$$

5.6. Množenje jediničnom matricom. Za linearna preslikavanja prirodno je definirana kompozicija preslikavanja, uz pretpostavku da je područje vrijednosti jednog preslikavanja jednako području definicije drugog preslikavanja. Množenje matrica definirano je tako da je produkt matrica preslikavanja upravo matrica kompozicije. Budući da kompozicija s identitetom ne mijenja linearno preslikavanje, to i množenje s njenom jediničnom matricom ne mijenja matricu preslikavanja. Zato za množenje jediničnom matricom I vrijedi

$$AI = A, \qquad IB = B$$

(kada su produkti matrica definirani).

---

[2]Za funkcije sin i cos vrijede adicioni teoremi:

$$sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi,$$
$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi.$$

5.7. Asocijativnost množenja matrica. Budući da je kompozicija asocijativna operacija, to je i pripadno množenje matrica asocijativno: za tri matrice A, B i C (tipa $k \times m$, $m \times n$ i $n \times p$) je

$$(AB)C = A(BC).$$

5.8. Zadatak. Za linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ možemo definirati potencije A, $A^2 = AA$, $\dots$, $A^k = A^{k-1}A$, $\dots$. Zbog asocijativnosti množenja vrijedi $A^{k+m} = A^k A^m$. Izračunajte sve potencije od J za

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.9. Inverzna matrica. Neka je A matrica tipa $n\times n$. Za $n\times n$ matricu B kažemo da je *inverzna matrica* ili *inverz* od A ako vrijedi

$$AB = BA = I.$$

Ako inverz od A postoji, onda mora biti jedinstven. Naime, ako za neku $n \times n$ matricu B' vrijedi $AB' = B'A = I$, onda zbog svojstva množenja s I i asocijativnosti množenja matrica imamo

$$B' = B'I = B'(AB) = (B'A)B = IB = B.$$

Ako postoji, inverz od A označavamo s A^{-1}.

5.10. Primjer. Matrica $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nema inverznu matricu jer za sve 2×2 matrice (β_{ij}) imamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.11. Zadatak. Razmišljajte geometrijski i nađite inverz matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

5.12. Distributivnost množenja matrica prema zbrajanju matrica. Kada je množenje i zbrajanje matrica definirano, vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju

$$A(B+C) = AB + AC, \qquad (B+C)A = BA + CA.$$

Naime, zbog definicija zbrajanja matrica $B + C$, množenja s A, linearnosti preslikavanja A, te opet definicija zbrajanja matrica i na kraju množenja s A, imamo jednakosti

$$\begin{aligned} A(B+C) &= A(b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n) \\ &= (A(b_1 + c_1), \dots, A(b_n + c_n)) \\ &= (Ab_1 + Ac_1, \dots, Ab_n + Ac_n) \\ &= (Ab_1, \dots, Ab_n) + (Ac_1, \dots, Ac_n) \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

Slično, zbog definicija množenja s $B+C$, definicije zbrajanja po točkama preslikavanja $B+C$, te opet definicija zbrajanja matrica i množenja s B odnosno C, imamo jednakosti

$$\begin{aligned}(B+C)A &= (B+C)(a_1,\dots,a_n)\\ &= ((B+C)a_1,\dots,(B+C)a_n)\\ &= (Ba_1+Ca_1,\dots,Ba_n+Ca_n)\\ &= (Ba_1,\dots,Ba_n)+(Ca_1,\dots,Ca_n)\\ &= BA+CA.\end{aligned}$$

Slično dokazujemo formule

$$(\lambda A)B = \lambda(AB), \qquad A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

5.13. Zadatak. Neka su $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ realni brojevi i

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$(\alpha I + \beta J) + (\alpha' I + \beta' J) \quad \text{i} \quad (\alpha I + \beta J)(\alpha' I + \beta' J)$$

i usporedite rezultat sa sumom i produktom kompleksnih brojeva $\alpha + i\beta$ i $\alpha' + i\beta'$.

6. Sistemi linearnih funkcija i jednadžbi

6.1. Matrica linearne funkcije. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ obično zovemo *linearnom funkcijom.* Kao i u općem slučaju, linearna je funkcija zadana vrijednostima $Ae_1 = \alpha_1, \dots, Ae_n = \alpha_n$ na kanonskoj bazi, odnosno $1 \times n$ matricom

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Vrijednost funkcije Ax, obično za funkcije pišemo $A(x)$, računamo po formuli

$$A(x) = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \cdots + \alpha_n\xi_n.$$

Na primjer, $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3$ je linearna funkcija na $\mathbb{R}^3$ s matricom $(1, -3, 4)$.

6.2. Linearno preslikavanje kao sistem linearnih funkcija. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ možemo shvatiti kao m-torku funkcija

$$A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \qquad Ax = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

odnosno $A = (f_1, \ldots, f_m)$, koju ponekad zovemo *sistemom od m funkcija* $f_1, \ldots, f_m$. Te su funkcije dane formulom (2.3) za množenje vektora matricom

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n\,, \\ f_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n\,, \\ &\cdots \\ f_m(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

a i-ti redak $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ matrice A je matrica i-te linearne funkcije f_i.

6.3. Primjer. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

možemo shvatiti kao sistem od dvije linearne funkcije od tri varijable

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3, \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\xi_1 + \xi_3. \end{aligned}$$

6.4. Sistem linearnih jednadžbi. Neka su zadane linearne funkcije $f_1, \ldots, f_m$ od n varijabli i brojevi $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Sistem jednadžbi

$$f_1(x) = \beta_1, \quad f_2(x) = \beta_2, \ldots, \quad f_m(x) = \beta_m,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= \beta_1\,, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2\,, \\ &\cdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= \beta_m\,, \end{aligned} \tag{6.2}$$

je problem kod kojeg treba naći **sve** n-torke realnih brojeva $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ takve da vrijedi relacija (6.2). Obično govorimo da su $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *nepoznanice sistema*, premda je u stvari nepoznata n-torka brojeva $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, tj. vektor x iz $\mathbb{R}^n$. Definiramo li preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kao m-torku funkcija $A = (f_1, \ldots, f_m)$ i vektor $b \in \mathbb{R}^m$ s koordinatama $\beta_1, \ldots, \beta_m$, tada sistem jednadžbi (6.2) možemo zapisati kraće kao

$$Ax = b.$$

Ako su $a_1, \ldots, a_n$ stupci matrice A, onda, koristeći formulu (2.1), sistem jednadžbi (6.2) možemo zapisati i kao problem nalaženja svih linernih kombinacija vektora $a_1, \ldots, a_n$ koje daju vektor b:

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b. \tag{6.3}$$

6.5. Primjer. Sistem jednadžbi

$$
\begin{aligned}
3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 5, \\
- \xi_1 + \xi_3 &= 0,
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

ima dvije jednadžbe s tri nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3. Očito trojke $x = (1, 3, 1)$ i $x = (2, 1, 2)$ zadovoljavaju uvjet (6.4). No da bismo riješili sistem jednadžbi (6.4) trebamo naći **sve** trojke $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ tako da vrijedi (6.4).

Dok sistem jednadžbi (6.4) ima barem dva rješenja, sistem

$$
\begin{aligned}
3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 5, \\
3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 6,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

očito **nema ni jedno rješenje** jer ne postoji trojka brojeva $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ takva da bi jedan te isti izraz jednom bio jednak 5, a drugi put 6. No ovaj smo put sistem **riješili**: skup svih rješenja sistema (6.5) je prazan skup!

6.6. Homogeni sistemi jednadžbi. Kažemo da je sistem jednadžbi

$$Ax = 0.$$

homogen. Uočimo da je $x = (0, \ldots, 0) = 0$ rješenje homogenog sistema, zovemo ga *trivijalnim rješenjem.*

6.7. Ekvivalentni sistemi. Za dva sistema jednadžbi od n nepoznanica kažemo da su *ekvivalentni sistemi* ako imaju iste skupove rješenja. Na primjer, ako drugu jednadžbu $\xi_1 = \xi_3$ sistema (6.4) uvrstimo u prvu, dobivamo ekvivalentni sistem

$$
\begin{aligned}
2\xi_1 + \xi_2 &= 5, \\
-\xi_1 + \xi_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

6.8. Matrica sistema. Matricu

$$
A = \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn}
\end{pmatrix}
$$

zovemo *matricom sistema* (6.2), a matrice

$$
(A, b) = \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m
\end{pmatrix}
\quad \text{i} \quad
b = \begin{pmatrix}
\beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m
\end{pmatrix}
$$

zovemo *proširenom matricom sistema* i *desnom stranom sistema* (6.2). Ako je matrica sistema tipa $m \times n$, onda ćemo i za sistem jednadžbi reći da je tipa $m \times n$.

6.9. Primjer. Matrica, proširena matrica i desna strana sistema (6.4) su

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A, b) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.10. Inverzna matrica kao rješenje n sistema jednadžbi. Pretpostavimo da je matrica $B = (b_1, \dots, b_n)$ inverzna matrica od A. Tada relaciju $AB = I$, po definiciji množenja AB i jedinične matrice I, možemo zapisati kao

$$(Ab_1, \dots, Ab_n) = (e_1, \dots, e_n).$$

odnosno $Ab_j = e_j$ za svaki $j = 1, \dots, n$. Znači da je stupac b_j inverzne matrice B rješenje sistema jednadžbi $Ax = e_j$. Kasnije ćemo dokazati (teorem 3.2.5) da ako svaki od sistema

$$Ax_j = e_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

ima bar jedno rješenje x_j, onda je za svaki od tih sistema rješenje jedinstveno i inverz od A je

$$A^{-1} = (x_1, \dots, x_n).$$

7. Trokutasti sistemi jednadžbi

Neke posebne tipove sistema linearnih jednadžbi lako je riješiti, a posebno su važni trokutasti sistemi.

7.1. Jedna jednadžba s jednom nepoznanicom. Najjednostavniji je 1×1 "sistem"

$$\alpha\xi = \beta$$

od jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Ako je $\alpha \neq 0$, onda imamo jedinstveno rješenje $\xi = -\beta/\alpha$. Ako je $\alpha = 0$, onda za svaki ξ imamo $\alpha\xi = 0$ i svaki broj ξ je rješenje u slučaju $\beta = 0$, a ni jedan broj ξ nije rješenje u slučaju $\beta \neq 0$.

7.2. Sistem jednadžbi s jednom nepoznanicom. Kao i u prethodnom slučaju, lako je riješiti $m \times 1$ sistem od m jednadžbi

$$\alpha_i\xi = \beta_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

s jednom nepoznanicom ξ. Na primjer, od tri sistema

$$\begin{aligned} 0\xi &= 0, & \qquad 0\xi &= 0, & \qquad 0\xi &= 2, \\ 2\xi &= 2, & \qquad 0\xi &= 0, & \qquad 2\xi &= 0, \end{aligned}$$

prvi ima jedinstveno rješenje $\xi = 1$, drugi ima beskonačno rješenja $\xi \in \mathbb{R}$, a treći nema niti jedno rješenje.

7.3. Jedna jednadžba s više nepoznanica. Promatrajmo $1 \times n$ "sistem" od jedne jednadžbe s n nepoznanica

$$\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_{j-1}\xi_{j-1} + \alpha_j\xi_j + \alpha_{j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_n\xi_n = \beta$$

i pretpostavimo da je $\alpha_j \neq 0$. Tada *rješavanjem po j-toj nepoznanici* dobivamo

$$\xi_j = \frac{1}{\alpha_j}\left(\beta - (\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_{j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_n\xi_n)\right),$$

pa za svaki izbor brojeva $\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1} \ldots, \xi_n$ možemo odrediti ξ_j da jednadžba bude zadovoljena. Tako dobivamo sva rješenja jednadžbe.

7.4. Matrica sistema je nul-matrica. Sistem

$$0x = b$$

nema rješenja kad je $b \neq 0$, a svaki vektor x iz $\mathbb{R}^n$ jest rješenje kad je $b = 0$. Na primjer, sistem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nema rješenja.

7.5. Trokutaste matrice. Kažemo da je $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$ *donja trokutasta matrica* ako je $\alpha_{ij} = 0$ za $i < j$. Na primjer, svaka od matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je donja trokutasta jer je za svaku $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$. Kažemo da je $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$ *gornja trokutasta matrica* ako je $\alpha_{ij} = 0$ za $i > j$. Tako imamo 4×4 gornje trokutaste matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

7.6. Sistemi jednadžbi s trokutastom matricom sistema. Rješavanje $n \times n$ sistema kojemu je matrica sistema trokutasta matrica svodi se, u n koraka, na rješavanje jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Kada je, na primjer, matrica gornja trokutasta, rješavanje sistema

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{1,n}\xi_n &= \beta_1\,, \\ \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2\,, \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{n-1,n}\xi_n &= \beta_{n-1}\,, \\ \alpha_{nn}\xi_n &= \beta_n \end{aligned}$$

započinjemo rješavanjem zadnje jednadžbe

$$\alpha_{nn}\xi_n = \beta_n.$$

Ako ta jednadžba nema rješenja, onda ni čitav sistem nema rješenja, a ako ta jednadžba ima rješenje ξ_n, onda ga uvrštavamo u predzadnju jednadžbu i rješavamo jednadžbu s nepoznanicom ξ_{n-1}

$$\alpha_{n-1,n-1}\xi_{n-1} = -\alpha_{n-1,n}\xi_n + \beta_{n-1}.$$

Nastavljajući taj postupak do prve jednadžbe dobivamo rješenje sistema, ili pak u nekom koraku postupka ustanovljujemo da sistem nema rješenja. Na primjer, rješavanje sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2 \end{aligned} \tag{7.1}$$

započinjemo rješavanjem treće jednadžbe

$$2\xi_3 = 2.$$

Jedinstveno rješenje $\xi_3 = 1$ uvrštavamo u drugu jednadžbu i dobivamo

$$2\xi_2 = \xi_3 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Jedinstveno rješenje $\xi_2 = 2$ uvrštavamo u prvu jednadžbu i dobivamo jednadžbu

$$\xi_1 = \xi_2 - 2\xi_3 - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$$

koja ima jedinstveno rješenje $\xi_1 = -1$. Sada zaključujemo da sistem ima jedinstveno rješenje $x = (-1, 2, 1)$.

7.7. Trokutasti sistemi jednadžbi. Na sličan način rješavamo i općenitije *trokutaste sisteme* kod kojih za $m \times n$ matricu sistema $A = (\alpha_{ij})$ vrijedi $\alpha_{ij} = 0$ za $i > j$. Na primjer, od dva trokutasta sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2, \\ 0\xi_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2, \\ 0\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

prvi nema rješenja jer jednadžba $0\xi_3 = 1$ nema rješenja, a drugi ima jedinstveno rješenje $x = (-1, 2, 1)$ jer je zadnja jednadžba $0\xi_3 = 0$ zadovoljena za svaki ξ_3, a iz prethodnog primjera (7.1) znamo jedinstveno rješenje preostale tri jednadžbe.

Kod rješavanja trokutastih sistema može se dogoditi da u pojedinom koraku trebamo riješiti jednadžbu s više nepoznanica. Na primjer, rješavanje trokutastog sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3 \end{aligned}$$

započinjemo rješavanjem druge jednadžbe

$$2\xi_2 - \xi_3 = 3.$$

Rješavanjem te jednadžbe po nepoznanici ξ_2 vidimo da imamo rješenje

$$\xi_2 = (\lambda + 3)/2$$

za svaki izbor realnog broja $\xi_3 = \lambda$. Uvrštavanjem rješenja u prvu jednadžbu dobivamo

$$\xi_1 = \xi_2 - 2\xi_3 - 1 = (\lambda + 3)/2 - 2\lambda - 1.$$

7.8. Zadatak. Riješite trokutasti sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 &= 6, \\ \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 &= 4, \\ \xi_5 + \xi_6 &= 2. \end{aligned}$$

8. Gaussova metoda rješavanja sistema jednadžbi

8.1. Gaussove eliminacije. Pretpostavimo da matrica sistema (6.2) nije nul-matrica. To znači da bar u jednom retku matrice sistema postoji bar jedan element različit od nule. Smijemo pretpostaviti da je za neki j element α_{1j} iz prvog retka različit od nule (jer inače promijenimo redoslijed pisanja jednadžbi, ne mijenjajući pritom skup svih rješenja sistema).

Budući da je $\alpha_{1j} \neq 0$, prvu jednadžbu možemo rješavati po nepoznanici ξ_j:
(8.1)

$$\xi_j = \frac{1}{\alpha_{1j}} \left(\beta_1 - (\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1;j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1;j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n)\right).$$

Uvrstimo li ξ_j u preostale jednadžbe, dobivamo sistem:
(8.2)

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1;j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1j}\xi_j + \alpha_{1;j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1\,, \\ &\alpha'_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{2;j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{2;j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{2n}\xi_n = \beta'_2\,, \\ &\alpha'_{31}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{3;j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{3;j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{3n}\xi_n = \beta'_3\,, \\ &\qquad \cdots \\ &\alpha'_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{m;j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{m;j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{mn}\xi_n = \beta'_m\,. \end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo da su za $i > 1$ i $k \neq j$ koeficijenti α'_{ik} (uz nepoznanicu ξ_k) i β'_i u i-toj jednadžbi dani formulom

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} - \alpha_{ij}\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{1j}}, \qquad \beta'_i = \beta_i - \alpha_{ij}\frac{\beta_1}{\alpha_{1j}},$$

odnosno

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + \lambda_i\alpha_{1k}, \qquad \beta'_i = \beta_i + \lambda_i\beta_1, \qquad \text{za} \quad \lambda_i = -\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{1j}}. \tag{8.3}$$

Ovaj rezultat interpretiramo na sljedeći način: *Pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (6.2) prve jednadžbe pomnožene s* λ_i *dobivamo novu jednadžbu u kojoj nema nepoznanice* ξ_j*; kažemo da smo eliminirali nepoznanicu* ξ_j*. U*

Gaussovom postupku eliminacije na ovaj način eliminiramo jednu te istu nepoznanicu ξ_j *u svim jednadžbama za* $i = 2, \ldots, m$.

8.2. Primjer. Neka je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica sistema jednadžbi s nepoznanicama $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Kao prvo vidimo da se nepoznanica ξ_1 "zapravo ne pojavljuje" u sistemu jednadžbi, pa sve ovisi o rješenju sistema s nepoznanicama ξ_2, ξ_3, ξ_4 i matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koristeći prvu jednadžbu mogli bismo eliminirati nepoznanicu ξ_3 u ostalim jednadžbama. No, kako se često radi, možemo treću jednadžbu premjestiti na prvo mjesto

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a onda u ostalima eliminirati nepoznanicu ξ_2.

8.3. Gaussove eliminacije daju ekvivalentni sistem jednadžbi. Ako je x rješenje početnog sistema jednadžbi (6.2), onda je jasno da je x rješenje i novog sistema (8.2) dobivenog pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (6.2) prve jednadžbe pomnožene s λ_i. No početni sistem jednadžbi (6.2) možemo rekonstruirati iz novog sistema pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (8.2) prve jednadžbe pomnožene s $-\lambda_i$. To znači da je svako rješenje x novog sistema (8.2) ujedno i rješenje početnog sistema (6.2). Znači da početni sistem (6.2) i novi sistem (8.2) imaju isti skup rješenja.

8.4. Obratni hod u Gaussovoj metodi. Ponekad se opisani postupak eliminacija nepoznanica zove *direktni hod u Gaussovoj metodi*, a postupak nalaženja rješenja početnog sistema (6.2) iz novog sistema (8.2) zove se *obratni hod u Gaussovoj metodi*.

Tu valja primijetiti da je $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ rješenje novog sistema (8.2) ako i samo ako je $(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$ rješenje sistema

(8.4)

$$\begin{aligned}
&\alpha'_{21}\xi_1 + \dots + \alpha'_{2;j-1}\xi_{j-1} \qquad && + \alpha'_{2;j+1}\xi_{j+1} + \dots + \alpha'_{2n}\xi_n = \beta'_2\,,\\
&\alpha'_{31}\xi_1 + \dots + \alpha'_{3;j-1}\xi_{j-1} \qquad && + \alpha'_{3;j+1}\xi_{j+1} + \dots + \alpha'_{3n}\xi_n = \beta'_3\,,\\
&\quad\dots\\
&\alpha'_{m1}\xi_1 + \dots + \alpha'_{m;j-1}\xi_{j-1} \qquad && + \alpha'_{m;j+1}\xi_{j+1} + \dots + \alpha'_{mn}\xi_n = \beta'_m\,.
\end{aligned}$$

i ako je

$$\xi_j = \frac{1}{\alpha_{1j}}\left(\beta_1 - (\alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1;j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1;j+1}\xi_{j+1} + \dots + \alpha_{1n}\xi_n)\right).$$

Znači da iz rješenja sistema (8.4) možemo naći rješenje početnog sistema (6.2). *Time je problem rješavanja sistema od m jednadžbi s n nepoznanica sveden na problem rješavanja sistema od $m-1$ jednadžbi s $n-1$ nepoznanica.*

8.5. Gaussova metoda. Kada matrica sistema nije nula, primjenom Gaussovih eliminacija problem rješavanja sistema od m jednadžbi s n nepoznanica svodimo na problem rješavanja sistema od $m-1$ jednadžbi s $n-1$ nepoznanica. Ako je matrica manjeg sistema nula, onda sistem znamo riješiti. Ako matrica manjeg sistema nije nula, onda ponovo primijenimo Gaussove eliminacije. Na kraju postupka dobivamo ili matricu sistema nula, ili sistem s jednom nepoznanicom, ili jednu jednadžbu. U svakom od tih slučajeva znamo riješiti sistem, a rješenje početnog sistema dobivamo obratnim hodom.

8.6. Primjer. Neka je zadan sistem od 4 jednadžbe s 3 nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\begin{aligned}
\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1,\\
\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2,\\
-\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0,\\
-\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2.
\end{aligned}$$

Odaberemo $\alpha_{11} = 1 \neq 0$ i pomoću prve jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_1 u ostalima. U prvom koraku mijenjamo drugu jednadžbu: množimo prvu jednadžbu s $\lambda = -1$ i pribrajamo drugoj jednadžbi. U drugom koraku mijenjamo treću jednadžbu i biramo $\lambda = 1$. U trećem koraku biramo $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}
\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, & \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, & \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1,\\
3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, & 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, & 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3,\\
-\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, & 3\xi_3 &= -1, & 3\xi_3 &= -1,\\
-\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2; & -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2; & 4\xi_3 &= 1.
\end{aligned}$$

U sljedećem ciklusu eliminirali bismo drugu nepoznanicu u trećoj i četvrtoj jednadžbi, koristeći za to drugu jednažbu. No u ovom se primjeru desilo da u trećoj i četvrtoj jednadžbi već nema nepoznanice ξ_2. Odaberemo

$\alpha_{33} = 3 \neq 0$ i pomoću treće jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_3 u četvrtoj.

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1, \\ 0 &= \tfrac{7}{3}. \end{aligned}$$

Zadnji redak na kraju procesa Gaussovih eliminacija označuje jednadžbu

$$0\xi_3 = \frac{7}{3}$$

koja nema rješenja. Znači da i početni sistem nema rješenja.

8.7. Primjer. Neka je zadan sistem od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

To su prve tri jednadžbe iz prethodnog primjera, pa Gaussovim eliminacijama dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1. \end{aligned}$$

Sada primijenimo obratni hod: iz treće jednadžbe dobijamo $\xi_3 = -1/3$. Uvrštavanjem dobivenog ξ_3 u drugu jednadžbu dobijamo $\xi_2 = 2/3$. Uvrštavanjem dobivenih ξ_2, ξ_3 u prvu jednadžbu dobivamo $\xi_1 = 1/3$. Dobiveno rješenje $x = (1/3, 2/3, -1/3)$ jedinstveno je rješenje početnog sistema.

8.8. Gaussova metoda i elementarne transformacije. Prvo primijetimo da je kod primjene Gaussovih eliminacija na sistem (6.2) bilo dovoljno zapisivati samo koeficijente u sistemu, tj. proširenu matricu sistema (A, b). Budući da su reci proširene matrice sistema vektori u $\mathbb{R}^{n+1}$, to množenje prve jednadžbe s λ_i i pribrajanje i-toj jednadžbi odgovara upravo elementarnoj transformaciji tipa 6.3 na vektor-recima.

Rješavanje sistema u primjeru 8.6 zapisujemo ovako:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

U ovom primjeru prvo odaberemo $\alpha_{11} = 1 \neq 0$ i pomoću prve jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_1 u ostalima. U prvom koraku mijenjamo drugi redak: množimo prvi redak s $\lambda = -1$ i pribrajamo drugom retku. U drugom koraku mijenjamo treći redak i biramo $\lambda = 1$. U trećem koraku biramo $\lambda = 1$.

U sljedećem ciklusu eliminirali bismo drugu nepoznanicu u trećoj i četvrtoj jednadžbi, koristeći za to drugu jednažbu. No u ovom se primjeru desilo da u trećoj i četvrtoj jednadžbi već nema nepoznanice ξ_2.

Odaberemo $\alpha_{33} = 3 \neq 0$ i pomoću treće jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_3 u četvrtoj. Zadnji redak na kraju procesa Gaussovih eliminacija označuje jednadžbu

$$0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3 = \tfrac{7}{3}$$

koja nema rješenja, pa onda ni početni sistem nema rješenja.

9. Linearna nezavisnost vektora i Gaussove eliminacije

9.1. Linearna nezavisnost i homogeni sistemi jednadžbi. Već smo koristili činjenicu da definiciju 1.8.1 linearne nezavisnosti vektora u $\mathbb{R}^n$ možemo izreći i u terminima sistema jednadžbi: *vektori $a_1, \dots, a_p$ su linearno nezavisni ako i samo ako je za homogeni $n \times p$ sistem jednadžbi*

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_p a_p = 0 \tag{9.1}$$

skup svih rješenja jednak $\{0\} \subset \mathbb{R}^p$.

9.2. Linearna nezavisnost i Gaussove eliminacije. Prema primjedbi u točki 8.8 za rješavanje sistema (9.1) Gaussovom metodom dovoljno je zapisivati proširenu matricu sistema

$$(a_1, \dots, a_p, 0). \tag{9.2}$$

i izvoditi elementarne transformacije na recima matrice. Pišimo

$$(a_1, \dots, a_p) \underset{r}{\sim} (a'_1, \dots, a'_p)$$

ako smo matricu $(a'_1, \dots, a'_p)$ dobili nizom elementarnih transformacija redaka iz matrice $(a_1, \dots, a_p)$. Jasno je da je tada

$$(a_1, \dots, a_p, 0) \underset{r}{\sim} (a'_1, \dots, a'_p, 0).$$

Argument iz točke 8.3 pokazuje da je novi homogeni sistem jednadžbi s matricom sistema

$$(a'_1, \dots, a'_p, 0)$$

ekvivalentan početnom sistemu (9.2). Odavle slijedi

Lema. *Neka je*

$$(a_1, \dots, a_p) \underset{r}{\sim} (a'_1, \dots, a'_p).$$

Tada su vektori $a_1, \dots, a_p$ linearno nezavisni ako i samo ako su vektori $a'_1, \dots, a'_p$ linearno nezavisni.

9.3. Primjer. U primjeru 1.8.6 je pitanje o linearnoj nezavisnosti vektora v_1, v_2, v_3 u (8.4) svedeno na pitanje nezavisnosti vektora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Umjesto rješavanja homogenog sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0, \\ &2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \\ &\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

mogli smo nastaviti s elementarnim transformacijama na recima matrice

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ \underset{r}{\sim} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i zaključiti da su početni vektori linearno nezavisni jer su vektori e_1, e_2, e_3 kanonske baze u $\mathbb{R}^3$ linearno nezavisni.

9.4. Teorem. *Neka je $A = (a_1, \ldots, a_p) \neq 0$ matrica tipa $n \times p$. Tada se elementarnim transformacijama stupaca i redaka matrica A može prevesti u oblik*

$$(e_1, \ldots, e_k, 0, \ldots, 0),$$

pri čemu je $1 \leq k \leq p$ i $e_1, \ldots, e_k$ je prvih k elemenata kanonske baze u $\mathbb{R}^n$. Nadalje, vektori

$$a_1, \ldots, a_p$$

su linearno nezavisni ako i samo ako je elementarnim transformacijama stupaca i redaka dobivena matrica oblika

$$(e_1, \ldots, e_p).$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po broju redaka n. Za $n = 1$ teorem očito vrijedi: elementarnim transformacijama stupaca dobivamo

$$(a_1, \ldots, a_p) \sim (e_1, 0, \ldots, 0),$$

gdje je $e_1 = 1$ kanonska baza u $\mathbb{R}$, a vektori/brojevi $a_1, \ldots, a_p$ su linearno nezavisni ako i samo ako je $p = 1$.

Pretpostavimo da teorem vrijedi za matrice s $n-1$ redaka. Tada za $A \neq 0$ postoji element $\alpha_{ij} \neq 0$ kojeg zamjenom i-tog i prvog retka i zamjenom j-tog i prvog stupca možemo prevesti u matricu B za koju je $\beta_{11} = \alpha_{ij} \neq 0$.

Tada množenjem prvog stupca s $1/\beta_{11}$ i elementarnim transformacijama na stupcima dobivamo

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta'_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta'_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} & \dots & \beta'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta'_{n1} & \beta'_{n2} & \dots & \beta'_{np} \end{pmatrix}$$

i, nastavljajući s elementarnim transformacijama na recima,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} & \dots & \beta'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta'_{n1} & \beta'_{n2} & \dots & \beta'_{np} \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta''_{22} & \dots & \beta''_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \beta''_{n2} & \dots & \beta''_{np} \end{pmatrix}.$$

Ako su svi $\beta''_{ij} = 0$, onda smo gotovi s postupkom, a inače primijenimo pretpostavku indukcije za matrice s $n-1$ redaka. $\square$

9.5. Primjer. Linearnu nezavisnost vektora v_1, v_2 u primjeru 1.8.6 pokazujemo primjenjujući elementarne transformacije na recima i stupcima:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naravno, za dva je vektora lako vidjeti da li su linearno nezavisni. No ovakav bi postupak provodili i za četiri linearno nezavisna vektora u $\mathbb{R}^6$ svođenjem na oblik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

(gdje su e_1, e_2, e_3, e_4 prva četiri vektora kanonske baze prostora $\mathbb{R}^6$).

10. Linearna preslikavanja sa $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$

10.1. Linearna preslikavanja sa $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$. Budući da smo u dosadašnjem proučavanju linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ koristili samo svojstva zbrajanja i množenja realnih brojeva i svojstva zbrajanja i množenja skalarom realnih vektora, to isto možemo ponoviti i za linearna preslikavanja sa $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$ jer imamo ista svojstva zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva i ista svojstva zbrajanja i množenja skalarom kompleksnih vektora. Tako, na primjer, imamo definiciju linearnog preslikavanja s istim svojstvom:

Kažemo da je preslikavanje

$$A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$

linearno preslikavanje ili linearan operator ako za sve vektore $x, y \in \mathbb{C}^n$ i sve skalare $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Zbog istog svojstva linearnosti dobivamo i istu formulu (2.1)

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 A e_1 + \cdots + \xi_n A e_n = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n.$$

iz koje vidimo da je linearno preslikavanje A u potpunosti određeno vrijednostima na kanonskoj bazi $e_1, \ldots, e_n$ u $\mathbb{C}^n$, što dalje vodi do iste formule za množenje matrice i vektora.

10.2. Realne matrice kao kompleksne matrice. Budući da realne brojeve možemo shvatiti kao kompleksne brojeve, to i realne matrice možemo shvatiti kao matrice linearnih operatora sa $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$. No dobiveni operatori nemaju ista svojstva. Na primjer, realna matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je matrica rotacije A u $\mathbb{R}^2$ za kut $\frac{\pi}{2}$, pa ne postoji vektor $v \neq 0$ koji bi bio proporcionalan vektoru Av. S druge strane, shvatimo li tu matricu kao matricu linearnog preslikavanja B sa $\mathbb{C}^2$ u $\mathbb{C}^2$, onda je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},$$

pa je vektor $B \left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ proporcionalan vektoru $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$. Ovaj primjer pokazuje da operator B na kompleksnom prostoru ima svojstvo koje operator A na realnom prostoru nema. Kao što ćemo vidjeti, to je vezano za svojstvo skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ da jednadžba $x^2 + 1 = 0$ ima rješenje u $\mathbb{C}$ (rješenje je $x = \pm i$).

10.3. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}? \qquad \text{DA} \quad \text{NE}$$

10.4. Zadatak. Izračunajte

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2.$$