Linearna algebra za fizičare, zimski semestar 2006.

Mirko Primc

Sadržaj

POGLAVLJE 1

Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

0.1. Pojam preslikavanja. Neka su A i B dva skupa. Ako svakom elementu a skupa A pridružimo neki element $f(a)$ skupa B, pišemo

$$a \mapsto f(a),$$

onda kažemo da je zadano *preslikavanje* f *sa skupa* A *u skup* B i pišemo

$$f\colon A \to B.$$

Kažemo da su dva preslikavanja $f\colon A \to B$ i $g\colon A \to B$ *jednaka* ako je

$$f(a) = g(a)$$

za sve elemente a skupa A.

0.2. Konačni nizovi elemenata u skupu. Neka je S neki skup. Tada preslikavanje $f\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to S$ zovemo *nizom od* k *članova u skupu* S, ili samo *konačnim nizom u* S. Preslikavanje f je u potpunosti zadano ako znamo

$$f(1) = s_1, \quad f(2) = s_2, \quad f(3) = s_3, \quad \ldots, \quad f(k) = s_k,$$

pa obično kažemo da je

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k \quad \text{ili} \quad (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k)$$

niz u S, a elemente s_1, s_2, s_3, $\ldots$, s_k skupa S zovemo *članovima niza.* Također kažemo da je *prvi član niza* s_1, *drugi član niza* s_2 itd. Iz opće definicije jednakosti preslikavanja slijedi da su nizovi

$$f\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to S \quad \text{i} \quad g\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to S$$

jednaki ako i samo ako je

$$f(1) = g(1), \quad f(2) = g(2), \quad f(3) = g(3), \quad \ldots, \quad f(k) = g(k).$$

Nizove $(s_1, \ldots, s_k)$ od k članova u skupu S zovemo i *uređenom* k*-torkom elemenata iz* S. Skup svih k-torki elemenata iz S označavamo sa S^k i čitamo "skup es na katu potenciju" ili samo "es na katu".

0.3. Primjer. Za skup $S = \{0, 1\}$ imamo niz

$$0, 0, 0, 1, 0, 1, 1$$

od sedam članova, pri čemu je prvi član niza 0, drugi član niza isto 0 itd. Jasno je da je

$$1, 0, 1, 1, 0, 0, 0$$

drugi niz u skupu S jer se radi o drugom preslikavanju $\{1, 2, \dots, 7\} \to S$.

0.4. Razlika između skupa od n elemenata i niza od n članova. Kad govorimo o skupu $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ od n elemenata, onda podrazumijevamo da su svi elementi tog skupa međusobno različiti i ne podrazumijevamo nikakav poredak među njima. Kad govorimo o nizu $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ od n članova, onda podrazumijevamo da je s_1 prvi član niza, s_2 drugi član niza itd, a ne podrazumijevamo da su ti članovi međusobno različiti.

1. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

1.1. Skup $\mathbb{R}^n$. Neka je n fiksan prirodan broj. Elementi skupa $\mathbb{R}^n$ (čitamo "er na entu" ili samo "er en") su sve uređene n-torke realnih brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Uređenu n-torku realnih brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ obično zovemo *točkom* ili *vektorom* u $\mathbb{R}^n$, a realne brojeve α_1, α_2, $\dots$, α_n *koordinatama* vektora (točke) a.

1.2. Primjer. $(0, 1, 1, -1, \sqrt{3})$ i $(0, 1, 1, -1, 0)$ su dvije različite petorke realnih brojeva, ili dvije različite točke u $\mathbb{R}^5$.

1.3. Skupovi $\mathbb{R}^n$ javljaju se u geometriji i analizi. Skupove $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ možemo si predočiti geometrijski. Tako si, na primjer, skup $\mathbb{R}^2$ svih uređenih parova realnih brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ možemo zamisliti kao skup točaka a u euklidskoj ravnini s koordinatama α_1 i α_2 u odabranom Kartezijevom sustavu koordinata. Na sličan si način uređene trojke realnih brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ zamišljamo kao točke euklidskog prostora s koordinatama α_1, α_2 i α_3 u odabranom Kartezijevom sustavu koordinata. U slučaju $n > 3$ za skup $\mathbb{R}^n$ nemamo neposredne geometrijske predodžbe, no još uvijek neka svojstva tog skupa interpretiramo "geometrijski", po analogiji s $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

Skupovi $\mathbb{R}^n$ javljaju se prirodno u matematičkoj analizi i njenim primjenama kao skupovi parametara (o kojima ovise neke veličine). Tako je, na primjer, brzina vjetra (v_x, v_y, v_z) u trenutku t u točki prostora s koordinatama x, y, z "točka" $(v_x, v_y, v_z, t, x, y, z)$ u $\mathbb{R}^7$.

1.4. Zapisivanje uređenih n-torki brojeva. U matematičkoj analizi i geometriji je običaj uređene n-torke brojeva $a \in \mathbb{R}^n$ zvati točkama i zapisivati ih kao retke

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

a u linearnoj je algebri običaj uređene n-torke brojeva $a \in \mathbb{R}^n$ zvati vektorima i zapisivati ih kao stupce, kažemo *vektor-stupce*

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Mi ćemo, prema prilici, koristiti oba načina zapisivanja. Kasnije ćemo govoriti i o *vektor-recima*

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

što su također n-torke brojeva.

1.5. Primjer.

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

su dva različita vektora u $\mathbb{R}^5$.

1.6. Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Na skupu $\mathbb{R}^n$ definiramo operaciju zbrajanju po pravilu

$$a + b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

Također definiramo operaciju množenja vektora realnim brojem λ, obično kažemo *skalarom* λ, po pravilu

$$\lambda a = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ponekad je zgodno pisati $\lambda \cdot a$ umjesto λa, kao na primjer $1 \cdot a$ umjesto $1a$ kad želimo naglasiti da vektor a množimo brojem 1. Kada na skupu $\mathbb{R}^n$ koristimo operacije zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom, onda je običaj elemente od $\mathbb{R}^n$ zvati vektorima, a ne točkama. Da bismo u formulama odmah vidjeli zbrajamo li vektore ili brojeve, bit će zgodno vektore označavati malim latinskim slovima, na primjer a, b, c, ili malim latinskim slovima s indeksima, na primjer a_1, a_2, a_3, a brojeve i koordinate vektora malim grčkim slovima[1].

1.7. Primjer. U $\mathbb{R}^4$ imamo

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3\\-2+3\\0+5\\2+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\5\\1\end{pmatrix},\ 3\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1\\3\cdot(-2)\\3\cdot 0\\3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\0\\6\end{pmatrix}.$$

1.8. Algebarska svojstva zbrajanja i množenja skalarom. Budući da je operacija zbrajanja vektora $a+b$ definirana kao zbrajanje odgovarajućih koordinata $\alpha_i+\beta_i$, to iz svojstava asocijativnosti i komutativnosti za zbrajanje brojeva slijede svojstva *asocijativnosti*

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

i *komutativnosti*

$$a+b=b+a$$

za zbrajanje vektora. Na primjer, zbog komutativnosti zbrajanja brojeva vrijedi

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1+\alpha_1\\\beta_2+\alpha_2\\\vdots\\\beta_n+\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}.$$

To smo mogli kraće zapisati provjeravajući samo jednakost i-te koordinate

$$\alpha_i+\beta_i=\beta_i+\alpha_i$$

u vektorima $a+b$ i $b+a$ za svaki $i=1,2,\ldots,n$.

Vektor kojemu su sve koordinate nula zovemo *nul-vektorom* ili *nulom* u $\mathbb{R}^n$

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

[1]Mala grčka slova

α	alfa	ι	iota	σ, ς	sigma
β	beta	κ	kapa	τ	tau
γ	gama	λ	lambda	υ	ipsilon
δ	delta	μ	mi	φ, ϕ	fi
ε, ϵ	epsilon	ν	ni	χ	hi
ζ	zeta	ξ	ksi	ψ	psi
η	eta	π	pi	ω	omega
ϑ, θ	theta	ρ, ϱ	ro		

Tako je $0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ nula u $\mathbb{R}^2$, a $0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ je nula u $\mathbb{R}^3$. Očito je za vektore a i 0 iz $\mathbb{R}^n$

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Također je očito da svaki vektor a u $\mathbb{R}^n$ ima jedinstveni *suprotni element*

$$-a = -\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha_1\\ -\alpha_2\\ \vdots\\ -\alpha_n\end{pmatrix}$$

sa svojstvom

$$-a + a = a + (-a) = 0.$$

Kao i za brojeve, obično pišemo $a - b$ umjesto $a + (-b)$.

S druge strane, operacija množenja skalarom naslijeđuje neka svojstva množenja brojeva:

$$1 \cdot a = a, \qquad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,$$

te

$$0 \cdot a = \begin{pmatrix}0\cdot\alpha_1\\ 0\cdot\alpha_2\\ \vdots\\ 0\cdot\alpha_n\end{pmatrix} = 0, \quad (-1)\cdot a = \begin{pmatrix}(-1)\cdot\alpha_1\\ (-1)\cdot\alpha_2\\ \vdots\\ (-1)\cdot\alpha_n\end{pmatrix} = -a, \quad \lambda\cdot 0 = \begin{pmatrix}\lambda\cdot 0\\ \lambda\cdot 0\\ \vdots\\ \lambda\cdot 0\end{pmatrix} = 0.$$

Zbog distributivnosti množenja brojeva prema zbrajanju imamo dvije *distributivnosti množenja skalarom*: u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{R}$ i u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{R}^n$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

Zbog navedenih svojstava zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom skup $\mathbb{R}^n$ zovemo *vektorskim prostorom* $\mathbb{R}^n$. Grubo govoreći, s vektorima računamo "kao s brojevima".

1.9. Pitanje. Da li svojstvo komutativnosti zbrajanja vektora u $\mathbb{R}^n$ glasi da za neke vektore a i b u $\mathbb{R}^n$ vrijedi $a + b = b + a$? DA NE

1.10. Pitanje. Da li je 0 u $\mathbb{R}^2$ jednaka 0 u $\mathbb{R}^3$? DA NE

1.11. Pitanje. Da li za vektor a u $\mathbb{R}^n$ vrijedi $a = -(-a)$? DA NE

1.12. Višestruke sume vektora. Operacija zbrajanja vektora je binarna operacija, što znači da je definirano zbrajanje dva vektora. Imamo li više vektora $a_1, a_2, \dots a_k$ u $\mathbb{R}^n$, onda definiramo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = (\dots((a_1 + a_2) + a_3) + \dots + a_{k-1}) + a_k.$$

Budući da smo na isti način definirali i višestruke sume brojeva, sumu više vektora računamo tako da računamo odgovarajuće sume koordinata. Na primjer, za četiri vektora u $\mathbb{R}^2$ imamo

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1+1+5\\1-1+1+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}.$$

1.13. Asocijativnost za višestruke sume vektora. Za sve prirodne brojeve k i m i vektore $a_1,\dots,a_{k+m}\in\mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+\dots+a_k)+(a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_{k+m})\\&=a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_{k+m}.\end{aligned}$$

To svojstvo vrijedi zbog analognog svojstva brojeva. Na primjer

$$\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2+1\\1-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1+5\\1+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}.$$

1.14. Komutativnost za višestruke sume vektora. Za sve permutacije [2] σ skupa $\{1,2,\dots,k\}$ i vektore $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}^n$ vrijedi

$$a_{\sigma(1)}+a_{\sigma(2)}+\dots+a_{\sigma(k)}=a_1+a_2+\dots+a_k.$$

Tako je, na primjer,

$$a_2+a_3+a_1=a_1+a_2+a_3.$$

1.15. Oznaka za višestruke sume vektora. Kao i za brojeve, višestruke sume vektora možemo zapisati pomoću znaka sumacije $\sum$:

$$\sum_{j=1}^{k}a_j=a_1+a_2+\dots+a_k.$$

Podsjetimo se da nije važno koji indeks sumacije koristimo:

$$\sum_{i=1}^{k}a_i=a_1+a_2+\dots+a_k.$$

1.16. Distributivnost za višestruke sume. Za višestruke sume brojeva ili vektora vrijede svojstva distributivnosti množenja skalarom prema zbrajanju.

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)a=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a,\qquad \lambda\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda a_i.$$

---

[2]Permutacija σ skupa $\{1,2,\dots,k\}$ je bijekcija $\sigma\colon\{1,2,\dots,k\}\to\{1,2,\dots,k\}$. Na primjer, $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=3$ i $\sigma(3)=1$ je permutacija skupa $\{1,2,3\}$ koju obično zapisujemo kao niz brojeva 231.

2. Geometrijska interpretacija vektorskih prostora $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

2.1. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^1$. Vektorski si prostor $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ zamišljamo kao pravac u euklidskoj ravnini s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja realnih brojeva. Obično si broj α zamišljamo kao vektor-strelicu $\overrightarrow{0\alpha}$, zbrajanje brojeva $\alpha + \beta$ kao zbrajanje vektor-strelica $\overrightarrow{0\alpha} + \overrightarrow{0\beta}$, a množenje skalarom λ kao "produljivanje strelice λ puta".

2.2. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^2$. Vektorski si prostor $\mathbb{R}^2$ zamišljamo kao euklidsku ravninu u kojoj smo izabrali pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, pa uređeni par brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ predstavlja koordinate točke a u ravnini. Obično si točku a u ravnini zamišljamo kao vektor-strelicu $\overrightarrow{0a}$. Tada zbrajanje vektora $a + b$ u $\mathbb{R}^2$ odgovara zbrajanju vektor-strelica $\overrightarrow{0a} + \overrightarrow{0b}$ u ravnini po "pravilu paralelograma", a množenje skalarom λ kao "produljivanje strelice λ puta". Tako je, na primjer, zbroj vektora u ravnini

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dobiven konstrukcijom paralelograma s vrhovima

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

S druge strane, množenje vektora $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ skalarom 3 geometrijski interpretiramo kao produljivanje tog vektora za faktor 3 :

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.3. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^3$. Vektorski si prostor $\mathbb{R}^3$ zamišljamo kao euklidski prostor u kojem smo izabrali pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, pa uređena trojka brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ predstavlja koordinate točke a u prostoru. Obično si točku a u prostoru zamišljamo kao vektor-strelicu $\overrightarrow{0a}$. Tada zbrajanje vektora $a + b$ u $\mathbb{R}^3$ odgovara zbrajanju vektor-strelica $\overrightarrow{0a} + \overrightarrow{0b}$ u prostoru po "pravilu paralelograma", a množenje skalarom λ kao "produljivanje strelice λ puta".

3. Linearne kombinacije vektora u $\mathbb{R}^n$

3.1. Linearne kombinacije vektora u $\mathbb{R}^n$. Ako su zadani vektori a_1, a_2, ..., a_s u $\mathbb{R}^n$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, onda možemo računati vektor

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s.$$

Takav izraz ili vektor zovemo *linearnom kombinacijom vektora* $a_1, a_2, \dots, a_s$ s *koeficijentima* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Tako je, na primjer, vektor

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linearna kombinacija vektora

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

u $\mathbb{R}^2$ s koeficijentima 2, 1, -1 i 0. U ovoj kombinaciji (namjerno) nismo pisali sumand $0 \cdot \left(\begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix}\right) = 0$.

3.2. Zadatak. Izračunajte linearnu kombinaciju vektora

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

s koeficijentima 0, 0, 2 i 2.

3.3. Trivijalna linearna kombinacija vektora. Linearnu kombinaciju

$$0a_1 + \cdots + 0a_s$$

vektora $a_1, \ldots, a_s$ u kojoj su svi koeficijenti nula zovemo *trivijalnom linearnom kombinacijom vektora* $a_1, \ldots, a_s$. Očito je trivijalna kombinacija vektora jednaka nuli, tj.

$$0a_1 + \cdots + 0a_s = 0.$$

3.4. Netrivijalna linearna kombinacija vektora. Kažemo da je linearna kombinacija vektora

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s.$$

netrivijalna ako je barem jedan od skalara $\lambda_i \neq 0$. Tako je, na primjer,

$$1a_1 + 0a_2 \cdots + 0a_s$$

netrivijalna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

3.5. Pitanje. Da li je linearna kombinacija

$$0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

netrivijalna? DA NE

3.6. Primjer. Može se dogoditi da netrivijalna linearna kombinacija vektora bude jednaka nuli:

$$2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

4. Kanonska baza u $\mathbb{R}^n$ i pojam baze u $\mathbb{R}^n$

4.1. Kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Skup vektora u $\mathbb{R}^n$ oblika

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

zovemo *kanonskom bazom vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$. Primijetimo da vektor kanonske baze e_j ima j-tu koordinatu 1, a sve ostale 0. Na primjer, skup vektora

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je kanonska baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Svaki vektor x u $\mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

Koeficijente $\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_n$ u toj linearnoj kombinaciji – zapravo koordinate od x – zovemo još i *koordinatama vektora x u kanonskoj bazi. Kraće kažemo da smo vektor x prikazali ili zapisali u kanonskoj bazi.*

Na primjer, vektor x u $\mathbb{R}^3$ možemo zapisati u kanonskoj bazi kao

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \\ &= \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3. \end{aligned}$$

4.2. Primjer.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2 + 0e_3 + 2e_4,$$

pa je u kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3, e_4 od $\mathbb{R}^4$ prva koordinata vektora a jednaka 1, druga koordinata je -2, treća koordinata je 0 i četvrta koordinata je 2.

4.3. Zadatak. Prikažite vektor

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{R}^5$.

4.4. Definicija baze u $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je skup vektora $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *baza u* $\mathbb{R}^n$ ako svaki vektor x u $\mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}.$$

Pokazat ćemo (teorem 9.2) da svaka baza u $\mathbb{R}^n$ ima n elemenata, tj. da mora biti $s = n$.

4.5. Primjer. Vektori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

čine bazu u $\mathbb{R}^2$. Naime, za vektor $x \in \mathbb{R}^2$ uvjet $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Zapisano po koordinatama to je sistem jednadžbi

$$\xi_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \xi_2 = \lambda_1 - \lambda_2$$

s nepoznanicama λ_1 i λ_2 koji za svaki izbor koordinata ξ_1 i ξ_2 ima jedinstveno rješenje

$$\lambda_1 = (\xi_1 + \xi_2)/2, \qquad \lambda_2 = (\xi_1 - \xi_2)/2.$$

Tako, na primjer, imamo jedinstveni zapis vektora $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2} a_1 + \frac{5}{2} a_2$.

4.6. Zadatak. Pokažite da vektori $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ čine bazu u $\mathbb{R}^2$.

4.7. Uređena baza u $\mathbb{R}^n$. Ako je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ baza u $\mathbb{R}^n$, onda su svi vektori baze međusobno različiti. Naime, da je, na primjer, $a_1 = a_2$, onda bi za vektor $a = a_1 = a_2$ imali više od jednog prikaza

$$a = 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 + \cdots + 0a_n = 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 + \cdots + 0a_n,$$

suprotno pretpostavci da za svaki element u $\mathbb{R}^n$ imamo jedinstveni prikaz. *Uređena baza u* $\mathbb{R}^n$ je je baza shvaćena kao niz vektora, tj. kao kao skup vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ u kojem a_1 zovemo *prvim elementom baze*, a_2 zovemo *drugim elementom baze* itd. Koeficijente λ_i u jedinstvenom prikazu vektora x kao linearne kombinacije

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

zovemo *koordinatama vektora x u bazi* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pri čemu λ_1 zovemo *prvom koordinatom*, λ_2 zovemo *drugom koordinatom* itd. Tako su, na primjer, koordinate vektora

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

u bazi

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

jednake $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{5}{2}$.

5. Konačni nizovi vektora u $\mathbb{R}^n$ i matrice tipa $n \times k$

5.1. Konačni nizovi vektora u $\mathbb{R}^n$. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_k$ niz vektora u $\mathbb{R}^n$. Običaj je da koordinate tih vektora (u kanonskoj bazi) pišemo koristeći (odgovarajuće) malo grčko slovo s dva indeksa

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad a_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Dogovor je da α_{ij} označava i-tu koordinatu j-tog člana niza a_j.

5.2. Matrica tipa $n \times k$. Konačan niz vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ u $\mathbb{R}^n$, ili, što je isto, k-torku vektora

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

zovemo i *matricom realnih brojeva tipa* $n \times k$. Zapisujući koordinate vektora imali bismo previše (suvišnih) zagrada i zareza

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad, \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix} \right),$$

pa radije pišemo samo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Kažemo da matrica $(a_1, \ldots, a_k)$ ima n redaka i k stupaca. Ponekad matricu $(a_1, \ldots, a_k)$ kraće zapisujemo kao

$$(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,k}} \quad \text{ili samo} \quad (\alpha_{ij}).$$

Za i-tu koordinatu α_{ij} vektor-stupca a_j obično kažemo da je *element* matrice u i-tom retku i j-tom stupcu. Obično ćemo matrice označavati velikim latinskim slovima, na primjer

$$A = (a_1, \ldots, a_k)$$

ili

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

5.3. Pitanje. Da li je matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

tipa 4×3? DA NE

5.4. Jednakost matrica. Za dvije matrice $A = (a_1, \dots, a_k)$ i $B = (b_1, \dots, b_k)$ istoga tipa $n \times k$ kažemo da su jednake i pišemo $A = B$ ako su im pripadni vektor-stupci jednaki:

$$a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k.$$

5.5. Nul-matrica. Matricu $(0, \dots, 0)$ kojoj su svi stupci nul-vektori zovemo *nul-matrica* ili *nula* i označavamo je s 0:

$$0 = (0, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

5.6. Kvadratne matrice. Matrice tipa $n \times n$ zovemo *kvadratnim matricama*. Elemente $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}$ kvadratne matrice $A = (\alpha_{ij})$ zovemo *dijagonalom* od A, elemente α_{ij}, $i < j$ *gornjim trokutom* od A, a elemente α_{ij}, $i > j$ *donjim trokutom* od A. Elemente donjeg trokuta, dijagonale i gornjeg trokuta 4×4 matrice možemo si predočiti kao zvjezdice

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & * \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cdot & * & * & * \\ \cdot & \cdot & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

6. Elementarne transformacije

Na konačnim nizovima vektora iz $\mathbb{R}^n$ možemo provoditi *elementarne transformacije*

$$v_1, \dots, v_m \mapsto v_1', \dots, v_m'$$

definirane na sljedeći način:

6.1. Zamjena mjesta dvaju vektora. Za proizvoljne indekse $i < j$ definiramo transformaciju

$$\begin{aligned}&v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m\\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \dots, v_m,\end{aligned}$$

gdje smo stavili $a = v_i$ i $b = v_j$. Ova transformacija je sama svoj inverz; dva puta primijenjena daje identitetu.

6.2. Množenje jednog vektora skalarom različitim od nule. Za proizvoljni indeks i i skalar $\lambda \neq 0$ definiramo transformaciju

$$v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_m \mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda a, v_{i+1}, \dots, v_m,$$

gdje smo stavili $a = v_i$. Ova transformacija ima inverznu istoga tipa; za isti indeks biramo skalar $\frac{1}{\lambda}$, pa sa čime smo prije množili, s time sada dijelimo:

$$v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_m \mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, \tfrac{1}{\lambda} a, v_{i+1}, \dots, v_m.$$

6.3. Pribrajanje jednog vektora pomnoženog skalarom drugom vektoru. Za proizvoljne indekse $i \neq j$ i skalar λ definiramo transformaciju

$$\begin{aligned}&v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m\\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b + \lambda a, v_{j+1}, \dots, v_m,\end{aligned}$$

gdje smo stavili $a = v_i$ i $b = v_j$. Ova transformacija ima inverznu istoga tipa; za iste indekse biramo skalar $-\lambda$, pa što smo prije dodali sada oduzmemo:

$$\begin{aligned}&v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m\\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b - \lambda a, v_{j+1}, \dots, v_m.\end{aligned}$$

6.4. Elementarne transformacije na stupcima matrice. Budući da je matrica tipa $n \times m$ niz od m vektora iz $\mathbb{R}^n$, elementarne transformacije možemo primijeniti i na stupce matrice. Tako, na primjer, imamo elementarnu transformaciju zamjene prvog i trećeg stupca matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

6.5. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

elementarna transformacija? DA NE

6.6. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

elementarna transformacija? DA NE

6.7. Primjer. Elementarna transformacija $(a,b,c,d) \mapsto (a-c,b,c,d)$ daje

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0&1\\-1&1&1&0\\-2&2&3&1\end{pmatrix},$$

a njoj inverzna transformacija $(a,b,c,d) \mapsto (a+c,b,c,d)$ daje

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\-1&1&1&0\\-2&2&3&1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix}.$$

6.8. Kompozicija elementarnih transformacija. Za početni niz vektora $(v_1,\dots,v_m)$ uzastopnom primjenom elementarnih transformacija dobivamo novi niz vektora $(w_1,\dots,w_m)$:

$$(v_1,\dots,v_m) \mapsto (v_1',\dots,v_m') \mapsto \dots \mapsto (w_1,\dots,w_m).$$

Činjenicu da je $(w_1,\dots,w_m)$ dobiven iz $(v_1,\dots,v_m)$ kompozicijom elementarnih transformacija zapisujemo kraće kao relaciju

$$(v_1,\dots,v_m) \sim (w_1,\dots,w_m).$$

Očito vrijedi svojstvo *tranzitivnosti* relacije $\sim$

$$(v_1,\dots,v_m) \sim (w_1,\dots,w_m) \quad \text{i} \quad (w_1,\dots,w_m) \sim (u_1,\dots,u_m)$$
$$\text{povlači} \quad (v_1,\dots,v_m) \sim (u_1,\dots,u_m).$$

Budući da elementarne transformacije oblika 6.2 za $\lambda = 1$ i transformacije oblika 6.3 za $\lambda = 0$ daju identitetu[3], to relacija $\sim$ ima svojstvo *refleksivnosti*

$$(v_1,\dots,v_m) \sim (v_1,\dots,v_m),$$

a zbog toga što svaka elementarna transformacija ima inverznu, vrijedi i svojstvo *simetričnosti* relacije $\sim$

$$(v_1,\dots,v_m) \sim (w_1,\dots,w_m) \quad \text{povlači} \quad (w_1,\dots,w_m) \sim (v_1,\dots,v_m).$$

6.9. Svođenje matrice na trokutastu formu primjenom elementarnih transformacija. Kod rješavanja niza problema u linearnoj algebri primijenjivat ćemo kompozicije elementarnih transformacija tako da konačan rezultat bude "trokutasta matrica", kao što je kompozicija elementarnih transformacija iz primjera 7.5

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&1\\1&-1&2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&2\\2&-3&1\\1&-2&2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&-3\\1&-2&0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

[3]Zbog toga je na pitanje 6.5 odgovor DA, a u tom primjeru je odgovor DA i zbog transformacije oblika 6.1.

Za $n \times k$ matricu

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}$$

je postupak sljedeći:

1) Ako je $\alpha_{11} \neq 0$, onda prvi stupac matrice množimo s $1/\alpha_{11}$ i dobivamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} = (a'_1, a_2, \dots, a_k).$$

Nakon toga, koristeći 1 iz prvog stupca, "eliminiramo" redom sve preostale elemente iz prvog retka dodavanjem $-\alpha_{12}a'_1$ drugom stupcu, $-\alpha_{13}a'_1$ trećem stupcu, $\dots$, $-\alpha_{1k}a'_1$ zadnjem stupcu:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha'_{n2} & \dots & \alpha'_{nk} \end{pmatrix} = (a'_1, a'_2, \dots, a'_k).$$

Sada postupak nastavljamo na $n \times (k-1)$ matrici

$$(a'_2, \dots, a'_k) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n2} & \dots & \alpha'_{nk} \end{pmatrix}.$$

Valja primijetiti da elementarne transformacije na stupcima $a'_2, \dots, a'_k$ neće "kvariti" već dobivene nule u prvoj koordinati.

2) Ako je $\alpha_{11} = 0$ i $\alpha_{1j} \neq 0$ za neki indeks stupca j, onda zamijenimo prvi i j-ti stupac i nastavimo kao pod 1).

3) Ako je čitav prvi redak nula, tj.

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix},$$

onda smo gotovi ako je matrica nula, a ako $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nije nul-matrica, onda postupak provodimo za prvi netrivijalni redak kao u 1) ili 2).

Konačni će rezultat biti u *trokutastoj formi* (β_{ij}) kod koje je $\beta_{ij} = 0$ za $i < j$.

6.10. Primjer svođenja 2×4 matrice na trokutastu formu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.11. Primjer svođenja 4×2 matrice na trokutastu formu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Izvodnice vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$

7.1. Izvodnice vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Za vektore[4] $v_1, \ldots, v_m$ kažemo da *razapinju vektorski prostor* $\mathbb{R}^n$, ili da su *izvodnice* ili *generatori* vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, ako je svaki vektor v iz $\mathbb{R}^n$ linearna kombinacija vektora $v_1, \ldots, v_m$, tj.

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$$

za neke koeficijente λ_1, ..., λ_m, pri čemu taj zapis nije nužno jedinstven.

7.2. Baza i izvodnice od $\mathbb{R}^n$. Po definiciji je baza skup izvodnica koji ima dodatno svojstvo: jedinstvenost zapisa

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$$

za svaki vektor v. Vidjet ćemo da je baza "najmanji mogući" skup izvodnica i da za bazu mora biti $m = n$.

7.3. Proširivanje skupa izvodnica. Ako su vektori $v_1, \ldots, v_m$ izvodnice od $\mathbb{R}^n$ i a proizvoljan vektor u $\mathbb{R}^n$, onda i vektori

$$v_1, \ldots, v_m, a$$

razapinju $\mathbb{R}^n$ jer za svaki vektor v imamo prikaz

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + 0a.$$

Znači da je lako proširiti skup izvodnica. Nama će posebno zanimljiv slučaj biti kad kanonsku bazu proširimo nulama do niza izvodnica:

$$e_1, \ldots, e_n, 0, \ldots, 0.$$

[4]Bilo bi bolje reći: za skup vektora $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ili niz vektora $(v_1, \ldots, v_m)$, jer ćemo nekad misliti na skup vektora $v_1, \ldots, v_m$, a nekad na niz vektora $v_1, \ldots, v_m$.

7.4. Lema o izvodnicama od $\mathbb{R}^n$ i elementarnim transformacijama. *Neka je niz vektora $v_1', \dots, v_m'$ u $\mathbb{R}^n$ dobiven elementarnom transformacijom iz niza $v_1, \dots, v_m$. Tada vektori $v_1', \dots, v_m'$ razapinju $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako vektori $v_1, \dots, v_m$ razapinju $\mathbb{R}^n$.*

DOKAZ. Pretpostavimo da su vektori $v_1, \dots, v_m$ izvodnice od $\mathbb{R}^n$ i da smo proveli elementarnu transformaciju oblika

$$v_1' = v_1 + \mu v_2,\ v_2' = v_2, \dots,\ v_m' = v_m.$$

Tada je

$$v_1 = v_1' - \mu v_2',\ v_2 = v_2', \dots,\ v_m = v_m',$$

pa za svaki vektor $v \in \mathbb{R}^n$ imamo zapis

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \\ &= \lambda_1 (v_1' - \mu v_2') + \lambda_2 v_2' + \cdots + \lambda_m v_m' \\ &= \lambda_1 v_1' + (\lambda_2 - \lambda_1 \mu) v_2' + \cdots + \lambda_m v_m'. \end{aligned}$$

Znači da vektori $v_1', \dots, v_m'$ razapinju $\mathbb{R}^n$. Na sličan način i za elementarne transformacije tipa 6.1 i 6.2 dokazujemo da su vektori $v_1', \dots, v_m'$ izvodnice ako su $v_1, \dots, v_m$ izvodnice. Budući da svaka elementarna transformacija ima inverznu, to su vektori $v_1, \dots, v_m$ dobiveni elementarnim transformacijama iz niza $v_1', \dots, v_m'$, pa su vektori $v_1, \dots, v_m$ izvodnice ako su $v_1', \dots, v_m'$ izvodnice. □

7.5. Primjer. Možemo se zapitati da li vektori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

razapinju $\mathbb{R}^3$? U ovom primjeru niz vektora v_1, v_2, v_3 možemo elementarnim transformacijama prevesti u kanonsku bazu e_1, e_2, e_3. Jedan od načina je da prvo poništavamo elemente u gornjem trokutu matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

U prvom i drugom koraku izvodimo elementarne transformacije $(a, b, c) \mapsto (a, b - a, c)$ i $(a, b, c) \mapsto (a, b, c - 2a)$ koristeći prvi stupac da bismo dobili nule u prvom retku. U trećem koraku izvodimo transformaciju $(a, b, c) \mapsto (a, b, c - b)$ koristeći drugi stupac da bismo dobili nulu u drugom retku, ne "kvareći" pritom već dobivene nule u prvom retku. Zatim nastavljamo s elementarnim transformacijama, prvo "popravljajući" treći stupac transformacijom tipa 6.2, a potom poništavajući elemente u donjem trokutu matrice u trećem retku koristeći treći stupac

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomoću drugog stupca dovršimo postupak

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Budući da e_1, e_2, e_3 razapinju $\mathbb{R}^3$, to prema točki 7.4 i v_1, v_2, v_3 razapinju $\mathbb{R}^3$.

7.6. Lema. *Vektori $b_1, \dots, b_m$ su izvodnice od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako su elementi kanonske baze $e_1, \dots, e_n$ linearne kombinacije vektora $b_1, \dots, b_m$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je

$$e_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(1)} b_i, \quad \dots, \quad e_n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(n)} b_i.$$

Svaki vektor x možemo zapisati u kanonskoj bazi, pa imamo

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \\ &= \xi_1 \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(1)} b_i + \cdots + \xi_n \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(n)} b_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\xi_1 \lambda_i^{(1)} + \cdots + \xi_n \lambda_i^{(n)}) b_i. \end{aligned}$$

Znači da je svaki x linearna kombinacija vektora $b_1, \dots, b_m$.

Obrat. Ako su vektori $b_1, \dots, b_m$ izvodnice, onda se svaki vektor u $\mathbb{R}^n$ može izraziti kao linearna kombinacija vektora $b_1, \dots, b_m$, pa onda i svi vektori kanonske baze. □

7.7. Teorem. *Neka su $b_1, \dots, b_m$ izvodnice od $\mathbb{R}^n$. Tada je*

$$m \geq n.$$

Dokaz. Indukcijom po n dokazat ćemo više:

(1) Ako su $b_1, \dots, b_m$ izvodnice od $\mathbb{R}^n$, onda je $m \geq n$ i $(b_1, \dots, b_m) \sim (e_1, \dots, e_n, 0, \dots, 0)$.
(2) Ako $b_1, \dots, b_m$ nisu izvodnice od $\mathbb{R}^n$, onda je $(b_1, \dots, b_m) \sim (c_1, \dots, c_k, 0, \dots, 0)$ za neke $c_1, \dots, c_k$, $k < n$.

U slučaju $n = 1$ izvodnice $b_1, \dots, b_m$ su brojevi i očito bar jedan od njih nije nula. Znači da je $m \geq 1$. Koristeći broj $b_i \neq 0$ i elementarne transformacije dobivamo

$$(b_1, \dots, b_m) \sim (e_1, 0, \dots, 0),$$

gdje je $e_1 = 1$. Znači da tvrdnja (1) vrijedi za $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Ako $b_1, \dots, b_m$ nisu izvodnice od $\mathbb{R}$, onda mora biti

$$(b_1, \dots, b_m) = (0, \dots, 0),$$

pa vrijedi i tvrdnja (2).

Pretpostavimo sada da tvrdnja (1) vrijedi za $\mathbb{R}^{n-1}$. Neka su $b_1, \ldots, b_m$ izvodnice od $\mathbb{R}^n$; zapišimo taj niz vektora kao matricu

$$(b_1, \ldots, b_m) = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \ldots & \beta_{1,m-1} & \beta_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1,1} & \ldots & \beta_{n-1,m-1} & \beta_{n-1,m} \\ \beta_{n,1} & \ldots & \beta_{n,m-1} & \beta_{n,m} \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Budući da je vektor e_n linearna kombinacija vektora $b_1, \ldots, b_m$ i da je njegova n-ta koordinata 1, to n-ta kordinata $\beta_{n,j}$ barem jednog vektora b_j mora biti različita od nule. Zbog jednostavnijeg zapisivanja pretpostavimo da je $\beta_{n,m} \neq 0$. Koristeći elementarnu transformaciju tipa 6.2 za m-ti stupac, dobivamo

$$(b_1, \ldots, b_m) \mapsto \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \ldots & \beta_{1,m-1} & \beta'_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1,1} & \ldots & \beta_{n-1,m-1} & \beta'_{n-1,m} \\ \beta_{n,1} & \ldots & \beta_{n,m-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Koristeći kompoziciju elementarnih transformacija tipa 6.3 za m-ti stupac i poništavajući elemente u n-tom retku dobivamo

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \ldots & \beta_{1,m-1} & \beta'_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1,1} & \ldots & \beta_{n-1,m-1} & \beta'_{n-1,m} \\ \beta_{n,1} & \ldots & \beta_{n,m-1} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \beta'_{1,1} & \ldots & \beta'_{1,m-1} & \beta'_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta'_{n-1,1} & \ldots & \beta'_{n-1,m-1} & \beta'_{n-1,m} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

označimo dobivene vektore s $b'_1, \ldots, b'_m$. Prema lemi 7.4 ti vektori razapinju $\mathbb{R}^n$, pa za svaki $j = 1, \ldots, n-1$ imamo linearnu kombinaciju

$$e_j = \lambda_1^{(j)} b'_1 + \cdots + \lambda_{m-1}^{(j)} b'_{m-1} + \lambda_m^{(j)} b'_m \,.$$

No n-te koordinate vektora e_j i $b'_1, \ldots, b'_{m-1}$ su nula, pa relacija

$$0 = \lambda_1^{(j)} \cdot 0 + \cdots + \lambda_{m-1}^{(j)} \cdot 0 + \lambda_m^{(j)} \cdot 1$$

daje $\lambda_m^{(j)} = 0$. Znači da za svaki $j = 1, \ldots, n-1$ imamo linearnu kombinaciju

$$e_j = \lambda_1^{(j)} b'_1 + \cdots + \lambda_{m-1}^{(j)} b'_{m-1} \,.$$

Odavle slijedi da su elementi kanonske baze $e_1, \ldots, e_{n-1}$ u $\mathbb{R}^{n-1}$ linearne kombinacije vektora

$$\begin{pmatrix} \beta'_{1,1} & \ldots & \beta'_{1,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta'_{n-1,1} & \ldots & \beta'_{n-1,m-1} \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

pa iz leme 7.6 slijedi da ti vektori razapinju $\mathbb{R}^{n-1}$. Sada po pretpostavci indukcije imamo $m-1 \geq n-1$, odnosno

$$m \geq n.$$

Štoviše, po pretpostavci indukcije imamo

$$\begin{pmatrix} \beta'_{1,1} & \dots & \beta'_{1,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta'_{n-1,1} & \dots & \beta'_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \sim (e_1, \dots, e_{n-1}, 0, \dots, 0),$$

pa primjenjujući istu kompoziciju elementarnih transformacija na prvih $m-1$ stupaca matrice $(b'_1, \dots, b'_{m-1}, b'_m)$ dobivamo

$$(b'_1, \dots, b'_{m-1}, b'_m) \sim (e_1, \dots, e_{n-1}, 0, \dots, 0, b'_m).$$

Na kraju, koristeći jedinice u prvih $n-1$ redaka i stupaca, možemo poništiti prvih $n-1$ elemenata u m-tom stupcu

$$(e_1, \dots, e_{n-1}, 0, \dots, 0, b'_m) \sim (e_1, \dots, e_{n-1}, 0, \dots, 0, e_n).$$

Elementarnom transformacijom tipa 6.1 dobivamo

$$(e_1, \dots, e_{n-1}, 0, \dots, 0, e_n) \sim (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n, 0, \dots, 0)$$

i tvrdnja (1) slijedi iz tranzitivnosti relacije $\sim$.
Time je dokazana i tvrdnja teorema.

Pretpostavimo sada da tvrdnje (1) i (2) vrijede za $\mathbb{R}^{n-1}$ i da $b_1, \dots, b_m$ nisu izvodnice od $\mathbb{R}^n$. Zapišimo taj niz vektora kao matricu (7.1).

Ako je zadnji redak matrice (7.1) nula, onda brisanjem tog retka dobivamo $(n-1) \times m$ matricu $(b^\circ_1, \dots, b^\circ_m)$ za koju vrijedi, bilo zbog (1) ili zbog (2),

$$(b^\circ_1, \dots, b^\circ_m) \sim (c^\circ_1, \dots, c^\circ_k, 0, \dots, 0), \quad k \le n-1.$$

No primjenjujući istu kompoziciju elementarnih transformacija na matricu $(b_1, \dots, b_m)$ dobivamo

$$(b_1, \dots, b_m) \sim (c_1, \dots, c_k, 0, \dots, 0), \quad k \le n-1,$$

pa vrijedi tvrdnja (2).

Ako zadnji redak matrice (7.1) nije nula, onda je elementarnim transformacijama možemo prevesti u matricu (7.2) i potom “eliminirati” prvih $m-1$ elemenata u zadnjem retku. Stupci dobivene matrice (7.3)

$$(b^\circ_1, \dots, b^\circ_{m-1}) = \begin{pmatrix} \beta'_{1,1} & \dots & \beta'_{1,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta'_{n-1,1} & \dots & \beta'_{n-1,m-1} \end{pmatrix}$$

ne razapinju $\mathbb{R}^{n-1}$. Naime, u suprotnom bi, zaključujući kao gore, dobili

$$(b_1, \dots, b_m) \sim (e_1, \dots, e_n, 0, \dots, 0)$$

i prema lemi 7.4 bi vektori $b_1, \dots, b_m$ bili izvodnice, suprotno pretpostavci. Budući da $(b^\circ_1, \dots, b^\circ_{m-1})$ ne razapinju $\mathbb{R}^{n-1}$, po pretpostavci indukcije (2) imamo

$$(b^\circ_1, \dots, b^\circ_{m-1}) \sim (c^\circ_1, \dots, c^\circ_{k-1}, 0, \dots, 0), \quad k-1 < n-1.$$

No primjenjujući istu kompoziciju elementarnih transformacija na prvih $m-1$ stupaca matrice $(b'_1, \dots, b'_m)$ dobivamo

$$(b'_1, \dots, b'_{m-1}, b'_m) \sim (c_1, \dots, c_{k-1}, 0, \dots, 0, b'_m), \quad k-1 \leq n-1,$$

pa vrijedi tvrdnja (2). □

Napomena. U dokazu teorema opisan je i postupak kojim možemo utvrditi da li dani niz vektora $b_1, \dots, b_m$ razapinje ili ne razapinje $\mathbb{R}^n$.

7.8. Pitanje. Jesu li vektori

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

izvodnice od $\mathbb{R}^3$? DA NE

7.9. Primjer. Možemo se zapitati jesu li vektori

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

izvodnice od $\mathbb{R}^3$? Postupamo kao u postupku opisanom u dokazu prethodnog teorema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Znači da je $(b_1, b_2, b_3) \sim (c_1, c_2, 0)$. No prema teoremu dva vektora c_1, c_2 ne mogu razapinjati $\mathbb{R}^3$, pa iz leme 7.4 slijedi da (b_1, b_2, b_3) ne razapinju $\mathbb{R}^3$.

8. Linearna nezavisnost vektora u $\mathbb{R}^n$

8.1. Definicija linearne nezavisnosti vektora u $\mathbb{R}^n$. *Kažemo da su vektori $v_1, \dots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$ linearno nezavisni ako je samo trivijalna kombinacija tih vektora jednaka nuli, tj. ako*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

povlači

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0.$$

Kažemo da su vektori $v_1, \dots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$ linearno zavisni ako nisu linearno nezavisni.

8.2. Neposredne posljedice definicije linearne nezavisnosti. Vezano uz definiciju primijetimo sljedeće:

1. Ako je $v \neq 0$, onda je v linearno nezavisan. Naime, $\lambda v = 0$ za netrivijalnu linearnu kombinaciju, tj. $\lambda \neq 0$, daje

$$v = 1 \cdot v = (\tfrac{1}{\lambda}\lambda)v = \tfrac{1}{\lambda}(\lambda v) = \tfrac{1}{\lambda}0 = 0,$$

što je suprotno pretpostavci $v \neq 0$.

2. Ako su vektori $v_1, \dots, v_m$ linearno nezavisni, onda su i vektori $v_1, \dots, v_p$ linearno nezavisni za $p < m$. Treba samo provjeriti da

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

povlači $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$. No iz gornje jednakosti "dodavanjem nule" dobivamo

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + 0 v_{p+1} + \cdots + 0 v_m = 0,$$

pa sad iz pretpostavke da su vektori $v_1, \dots, v_m$ linearno nezavisni slijedi da su svi koeficijenti u kombinaciji nula, posebno $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$.

3. Vektori $0, v_1, \dots, v_m$ nisu linearno nezavisni. Naime, imamo netrivijalnu kombinaciju

$$1 \cdot 0 + 0 v_1 + \cdots + 0 v_m = 0.$$

Posebno, ako su $v_1, \dots, v_m$ linearno nezavisni, onda je $v_j \neq 0$ za sve $j = 1, \dots, m$.

8.3. Baza i linearna nezavisnost vektora. Svaka baza $v_1, \dots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$ je linearno nezavisan skup. Naime, iz relacija

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \quad \text{i} \quad 0 v_1 + \cdots + 0 v_p = 0$$

i jedinstvenosti zapisa vektora 0 slijedi $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$. Vidjet ćemo da je baza "najveći mogući" linearno nezavisan skup i da za bazu mora biti $p = n$.

8.4. Primjer linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^3$. Pitanje da li su vektori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni svodi se na pitanje da li relacija

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

povlači $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, ili drugim riječima, da li sistem linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

ima jedinstveno trivijalno rješenje $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$? Rješavanjem tog sistema može se vidjeti da je odgovor potvrdan.

8.5. Lema o linearnoj nezavisnosti vektora i elementarnim transformacijama. *Neka je niz vektora $v_1', \dots, v_p'$ u $\mathbb{R}^n$ dobiven elementarnim transformacijama iz niza $v_1, \dots, v_p$. Tada je $v_1', \dots, v_p'$ linearno nezavisan ako i samo ako je $v_1, \dots, v_p$ linearno nezavisan.*

DOKAZ. Pretpostavimo da su vektori $v_1, \dots, v_p$ linearno nezavisni i da smo proveli elementarnu transformaciju oblika

$$v_1' = v_1 + \mu v_2,\ v_2' = v_2, \dots,\ v_p' = v_p.$$

Neka je

$$\lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \cdots + \lambda_p v_p' = 0,$$

odnosno

$$\lambda_1 v_1 + (\lambda_1 \mu + \lambda_2) v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + \lambda_p v_p = 0.$$

Sada linearna nezavisnost $v_1, \dots, v_p$ povlači

$$\lambda_1 = \lambda_1 \mu + \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

No tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, što dokazuje linearnu nezavisnost vektora $v_1', \dots, v_p'$. Na sličan način i za druge elementarne transformacije dokazujemo da linearna nezavisnost vektora $v_1, \dots, v_p$ povlači linearnu nezavisnost vektora $v_1', \dots, v_p'$. Budući da svaka elementarna transformacija ima inverznu, to su vektori $v_1, \dots, v_p$ dobiveni elementarnim transformacijama iz niza $v_1', \dots, v_p'$, pa linearna nezavisnost $v_1', \dots, v_p'$ povlači linearnu nezavisnost $v_1, \dots, v_p$. $\square$

8.6. Primjer. Napišimo vektore v_1, v_2, v_3 u 8.4 kao stupce u matrici i provedimo elementarne transformacije na stupcima

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Za vektore stupce na desnoj strani lako je ustanoviti da, pri utvrđivanju njihove linearne nezavisnosti, odgovarajući sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0, \\ &2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \\ &\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \end{aligned}$$

ima jedinstveno trivijalno rješenje $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Znači da su vektori stupci na desnoj strani linearno nezavisni. Iz leme 8.5 slijedi da su vektori v_1, v_2, v_3 u našem primjeru 8.4 linearno nezavisni.

8.7. Teorem. *Neka su $a_1, \ldots, a_p$ linearno nezavisni vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada je*

$$p \leq n.$$

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ je tvrdnja istinita, jer bi inače imali bar dva linearno nezavisna elementa a_1, a_2 u $\mathbb{R}$, $a_i \neq 0$ za $i = 1, 2$, (vidi primjedbu 8.2) i netrivijalnu linearnu kombinaciju $a_2 a_1 - a_1 a_2 = 0$, suprotno pretpostavci.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za $\mathbb{R}^{n-1}$. Zapišimo linearno nezavisne vektore $a_1, \ldots, a_p$ u $\mathbb{R}^n$ kao matricu

$$(a_1, \ldots, a_p) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,p-1} & \alpha_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \ldots & \alpha_{n-1,p-1} & \alpha_{n-1,p} \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,p-1} & \alpha_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Ako su svi elementi u n-tom retku nula, tj.

$$\alpha_{n,1} = \cdots = \alpha_{n,p-1} = \alpha_{n,p} = 0,$$

onda se lako vidi da su vektori

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,p-1} & \alpha_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \ldots & \alpha_{n-1,p-1} & \alpha_{n-1,p} \end{pmatrix}$$

u $\mathbb{R}^{n-1}$ linearno nezavisni, pa po pretpostavci indukcije vrijedi $p \leq n - 1$. Preostaje slučaj kad nisu svi elementi u n-tom retku nula. Zbog jednostavnosti zapisa pretpostavimo da je $\alpha_{n,p} \neq 0$. Koristeći elementarnu transformaciju tipa 6.2 za p-ti stupac, dobivamo

$$(a_1, \ldots, a_p) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,p-1} & \alpha'_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \ldots & \alpha_{n-1,p-1} & \alpha'_{n-1,p} \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,p-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Koristeći kompoziciju elementarnih transformacija tipa 6.3 za p-ti stupac i poništavajući elemente u n-tom retku, dobivamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,p-1} & \alpha'_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \ldots & \alpha_{n-1,p-1} & \alpha'_{n-1,p} \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,p-1} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha'_{1,1} & \ldots & \alpha'_{1,p-1} & \alpha'_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha'_{n-1,1} & \ldots & \alpha'_{n-1,p-1} & \alpha'_{n-1,p} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

označimo dobivene vektore s $a'_1, \ldots, a'_{p-1}, a'_p$. Prema lemi 8.5 ti su vektori linearno nezavisni, a onda su, prema primjedbi 8.2, i vektori $a'_1, \ldots, a'_{p-1}$

linearno nezavisni. Lako se vidi da su onda i vektori

$$\begin{pmatrix} \alpha'_{1,1} & \dots & \alpha'_{1,p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n-1,1} & \dots & \alpha'_{n-1,p-1} \end{pmatrix}$$

u $\mathbb{R}^{n-1}$ linearno nezavisni, pa po pretpostavci indukcije vrijedi $p-1 \leq n-1$. To povlači tvrdnju teorema $p \leq n$. □

8.8. Pitanje. Jesu li vektori

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni? DA NE

9. Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$

9.1. Druga definicija baze prostora $\mathbb{R}^n$. *Skup vektora $v_1, \dots, v_s$ je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako*

(1) *$v_1, \dots, v_s$ razapinju $\mathbb{R}^n$ i*
(2) *$v_1, \dots, v_s$ je linearno nezavisan skup.*

Dokaz. Ako vrijedi (1), onda svaki vektor $v \in \mathbb{R}^n$ možemo zapisati kao neku linearnu kombinaciju

$$v = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_s v_s. \tag{9.1}$$

Zbog linearne nezavisnosti (2) taj je prikaz jedinstven. Naime,

$$v = \eta_1 v_1 + \cdots + \eta_s v_s = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_s v_s$$

povlači

$$(\eta_1 - \xi_1)v_1 + \cdots + (\eta_s - \xi_s)v_s = 0,$$

pa pretpostavka da su vektori linearno nezavisni daje $\eta_1 = \xi_1, \dots, \eta_s = \xi_s$.

Obrat. Već smo primijetili da baza razapinje $\mathbb{R}^n$ i da je linearno nezavisan skup. □

9.2. Teorem. *Svaka baza u $\mathbb{R}^n$ ima n elemenata.*

Dokaz. Neka je $v_1, \dots, v_s$ baza u $\mathbb{R}^n$. Budući da je to skup izvodnica, prema teoremu 7.7 imamo

$$s \geq n.$$

No to je i linearno nezavisan skup, pa prema teoremu 8.7 imamo

$$s \leq n.$$

Znači da je $s = n$. □

9.3. Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Budući da je broj elemenata svake baze u $\mathbb{R}^n$ jednak n, taj broj n zovemo *dimenzijom vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$ i pišemo

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

Osnovno je svojstvo dimenzije da je broj elemenata svakog linearno nezavisnog skupa vektora manji ili jednak od dimenzije n i da je broj elemenata svakog skupa izvodnica veći ili jednak od dimenzije n. U tom je smislu svaka baza "najveći mogući" linearno nezavisni skup i "najmanji mogući" skup izvodnica. Vidjet ćemo da teoremi 7.7, 8.7 i 9.2 imaju niz važnih posljedica.

9.4. Teorem. *Neka je $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Tada je ekvivalentno:*

(1) *$v_1, \dots, v_n$ razapinju $\mathbb{R}^n$ i*
(2) *$v_1, \dots, v_n$ je linearno nezavisan skup.*

DOKAZ. (1) povlači (2): Neka su vektori $v_1, \dots, v_n$ izvodnice od $\mathbb{R}^n$. Tada pretpostavka da ti vektori nisu linearno nezavisni vodi do kontradikcije: ako postoji netrivijalna linearna kombinacija

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

recimo da je $\lambda_1 \neq 0$, onda je

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n).$$

Izrazimo li proizvoljan vektor x kao linearnu kombinaciju izvodnica $v_1, v_2, \dots, v_n$ dobivamo

$$x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n = \xi_1 \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n) + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n.$$

Iz tog izraza vidimo da se vektor x može izraziti kao linearna kombinacija vektora $v_2, \dots, v_n$, pa slijedi da $n-1$ vektora razapinje $\mathbb{R}^n$, suprotno tvrdnji teorema 7.7.

(2) povlači (1): Neka su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni. Tada pretpostavka da ti vektori nisu izvodnice od $\mathbb{R}^n$ vodi do kontradikcije: ako postoji vektor v u $\mathbb{R}^n$ koji nije linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_n$, onda su vektori

$$v, v_1, \dots, v_n$$

linearno nezavisni. Naime, ako je

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

onda mora biti $\lambda = 0$, jer bi u suprotnom imali da je v linearna kombinacija

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n.$$

No $\lambda = 0$ daje

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $v_1, \dots, v_n$ slijedi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Znači da imamo $n+1$ linearno nezavisnih vektora $v, v_1, \dots, v_n$, suprotno tvrdnji teorema 8.7. $\square$

10. Kompleksni brojevi

10.1. Skup kompleksnih brojeva. Kompleksni brojevi su uređeni parovi (α, β) realnih brojeva koje zapisujemo kao

$$z = \alpha + i\beta.$$

Također pišemo $\alpha = \alpha + i \cdot 0$, $i = 0 + i \cdot 1$ te $i\beta = 0 + i \cdot \beta$. Prvi član α zovemo realnim dijelom kompleksnog broja z, a drugi član para β zovemo imaginarnim dijelom kompleksnog broja z. Skup svih kompleksnih brojeva je $\mathbb{R}^2$.

10.2. Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva. Operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva definirane su formulama

$$(\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta') = (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta'),$$
$$(\alpha + i\beta) \cdot (\alpha' + i\beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \beta\alpha').$$

Produkt $z \cdot w$ kompleksnih brojeva z i w obično zapisujemo kao zw. Skup svih kompleksnih brojeva s tako definiranim operacijama zbrajanja i množenja označavamo sa $\mathbb{C}$.

10.3. Svojstva zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva. Iz definicije zbrajanja vidimo da se radi o zbrajanju vektora u $\mathbb{R}^2$, pa je operacija zbrajanja asocijativna i komutativna, imamo nulu

$$0 = 0 + i \cdot 0$$

i svaki kompleksni broj $z = \alpha + i\beta$ ima suprotni

$$-z = -\alpha + i(-\beta)$$

kojeg zapisujemo kao $-z = -\alpha - i\beta$.

Lako je provjeriti da je operacija množenja asocijativna i komutativna, imamo jedinicu

$$1 = 1 + i \cdot 0$$

i svaki kompleksni broj $z \neq 0$ ima recipročni ili inverzni element kojeg zapisujemo kao $\frac{1}{z}$ ili z^{-1}. Operacija množenja je distributivna prema zbrajanju

$$z(u + v) = zu + zv.$$

Znači da operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva imaju **ista svojstva**[5] kao i operacije zbrajanja i množenja realnih brojeva.

[5]Da bi bilo sasvim jasno na koja svojstva mislimo uvodi se pojam polja: Kažemo da je skup K *polje* ako na tom skupu imamo definirane dvije binarne operacije, *zbrajanje* i *množenje*,

$$+ \colon K \times K \to K, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta,$$

10.4. Realni brojevi kao kompleksni brojevi. Ako realan broj α identificiramo s kompleksnim brojem $\alpha + i \cdot 0$, onda je

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

i operacije zbrajanja i množenja na $\mathbb{C}$ proširuju operacije zbrajanja i množenja na $\mathbb{R}$.

10.5. Konjugiranje kompleksnog broja. Za kompleksan broj $z = \alpha + i\beta$ definiramo kompleksno konjugirani broj $\overline{z} = \alpha - i\beta$. Osnovna svojstva kompleksnog konjugiranja su:

(1) $\overline{\overline{z}} = z$,
(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
(3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
(4) $z \cdot \overline{z} = \alpha^2 + \beta^2$.

10.6. Apsolutna vrijednost realnog ili kompleksnog broja. Apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $z = \alpha + i\beta$ definiramo kao

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Imajući u vidu identifikaciju u točki 10.4, apsolutna vrijednost realnog broja α je

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha^2}.$$

Ovdje drugi korijen označava nenegativan realan broj. Osnovna svojstva apsolutne vrijednosti su:

(1) $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ ako i samo ako je $z = 0$,
(2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
(3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nejednakost trokuta).

$$\cdot : K \times K \to K, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta,$$

takve da vrijede sljedeća svojstva za sve elemente $\alpha, \beta, \gamma \in K$:

(1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (asocijativnost zbrajanja),
(2) postoji jedinstveni element $0 \in K$ takav da je
$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ (neutralni element za zbrajanje),
(3) za svaki α postoji jedinstveni element $-\alpha \in K$ takav da je
$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ (suprotni element za zbrajanje),
(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (komutativnost zbrajanja),
(5) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (asocijativnost množenja),
(6) postoji jedinstveni element $1 \in K$, $1 \neq 0$, takav da je
$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ (neutralni element za množenje),
(7) za svaki $\alpha \neq 0$ postoji jedinstveni element $\alpha^{-1} \in K$ takav da je
$\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = (\alpha^{-1}) \cdot \alpha = 1$ (recipročni element za množenje),
(8) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (komutativnost množenja),
(9) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, \qquad (\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$
(distributivnost množenja prema zbrajanju).

10.7. Inverz kompleksnog broja različitog od nule. Budući da za kompleksan broj $z \neq 0$ imamo $|z| > 0$, to iz formule $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ slijedi

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

Znači da je recipročni element dan formulom $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.

10.8. Eksponencijalni zapis kompleksnog broja. Običaj je pisati

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Tada iz definicije množenja kompleksnih brojeva i adicionih teorema za funkcije sinus i kosinus slijedi

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}.$$

11. Vektorski prostor $\mathbb{C}^n$

11.1. Skup $\mathbb{C}^n$. Skup svih n-torki kompleksnih brojeva

$$(z_1, \dots, z_n)$$

označavamo sa $\mathbb{C}^n$. Obično kažemo da je $(z_1, \dots, z_n)$ *točka u* $\mathbb{C}^n$, a kompleksne brojeve $z_1, \dots, z_n$ zovemo *koordinatama točke*. Budući da su kompleksni brojevi $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ u stvari parovi realnih brojeva (α_k, β_k), to n-torku kompleksnih brojeva

$$(\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_n + i\beta_n)$$

možemo shvatiti i kao $2n$-torku realnih brojeva

$$(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n).$$

Znači da skup $\mathbb{C}^n$ možemo shvatiti i kao skup $\mathbb{R}^{2n}$.

11.2. Primjer. Točku $(1, 3 - i\sqrt{2})$ u $\mathbb{C}^2$ možemo shvatiti i kao točku $(1, 0, 3, -\sqrt{2})$ u $\mathbb{R}^4$.

11.3. Zbrajanje u $\mathbb{C}^n$ i množenje kompleksnim brojem. Na skupu $\mathbb{C}^n$ definiramo operacije zbrajanja

$$(z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$$

i množenja kompleksnim brojem

$$w(z_1, \dots, z_n) = (wz_1, \dots, wz_n).$$

11.4. Primjer. U $\mathbb{C}^2$ imamo sumu vektora

$$(1, 3 - i\sqrt{2}) + (-2 + i, 1) = (-1 + i, 4 - i\sqrt{2})$$

i vektor $(-2 + i, 1)$ pomnožen kompleksnim brojem $1 - i$

$$(1 - i) \cdot (-2 + i, 1) = (-1 + 3i, 1 - i).$$

11.5. Vektorski prostor $\mathbb{C}^n$. Operacije zbrajanja u $\mathbb{C}^n$ i množenja kompleksnim brojem nasljeđuju neka svojstva operacija zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva: zbrajanje je komutativno i asocijativno, ima nulu

$$0 = (0, \dots, 0)$$

i svaka n-torka $a = (z_1, \dots, z_n)$ ima suprotni element

$$-a = (-z_1, \dots, -z_n).$$

Operacija množenja kompleksnim brojem ima svojstva

$$1(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n), \quad v(w((z_1, \dots, z_n))) = (vw)(z_1, \dots, z_n)$$

i imamo distributivnosti množenja prema zbrajanju brojeva i zbrajanju n-torki

$$(v + w)(z_1, \dots, z_n) = v(z_1, \dots, z_n) + w(z_1, \dots, z_n),$$
$$v((z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n)) = v(z_1, \dots, z_n) + v(w_1, \dots, w_n).$$

Zbog tih svojstava operacija zbrajanja i množenja kompleksnim brojem kažemo da je $\mathbb{C}^n$ *kompleksni vektorski prostor*.

Kada na skupu $\mathbb{C}^n$ koristimo operacije zbrajanja i množenja kompleksnim brojem, onda je običaj njegove elemente zvati *vektorima u* $\mathbb{C}^n$, a ne točkama. Isto tako je običaj kompleksne brojeve zvati *skalarima*.

Znači da operacije zbrajanja i množenja skalarom na $\mathbb{C}^n$ imaju **ista svojstva**[6] koja imaju operacije zbrajanja i množenja skalarom na $\mathbb{R}^n$.

11.6. Zapisivanja vektora u $\mathbb{C}^n$ i skalara u $\mathbb{C}$. Da bismo u formulama odmah vidjeli zbrajamo li vektore ili brojeve, vektore u $\mathbb{C}^n$ označavamo malim latinskim slovima, a skalare malim grčkim slovima. Kao i u slučaju n-torki realnih brojeva, vektore u $\mathbb{C}^n$ zapisujemo kao stupce.

---

[6] Da bi bilo sasvim jasno na koja svojstva mislimo uvodi se pojam vektorskog prostora nad danim poljem: Kažemo da je skup V *vektorski (ili linearni) prostor nad poljem* K ako na V imamo zadanu binarnu operaciju *zbrajanja*

$$+\colon V \times V \to V, \qquad (f, g) \mapsto f + g,$$

i *operaciju množenja skalarom*

$$\cdot\colon K \times V \to V, \qquad (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f,$$

za koje vrijede sljedeća svojstva za sve $f, g, h \in V$ i $\lambda, \mu \in K$:

(1) $(f + g) + h = f + (g + h)$ (asocijativnost zbrajanja),
(2) postoji element $0 \in V$ takav da je
$f + 0 = 0 + f = f$ (neutralni element za zbrajanje),
(3) za svaki f postoji element $-f \in V$ takav da je
$f + (-f) = (-f) + f = 0$ (suprotni element za zbrajanje),
(4) $f + g = g + f$ (komutativnost zbrajanja),
(5) $1 \cdot f = f$ (množenje jedinicom iz polja),
(6) $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f$ (kvazi-asocijativnost množenja skalarom),
(7) $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g, \qquad (\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$
(distributivnost množenja prema zbrajanju).

Tada formule za zbrajanje vektora u $\mathbb{C}^n$ i množenje vektora skalarom izgledaju **isto** kao formule u točki 1.6 za zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom u $\mathbb{R}^n$

$$a+b=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix},\quad \lambda a=\lambda\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n\end{pmatrix},$$

jedina je razlika što su sada koordinate vektora i skalar λ kompleksni brojevi.

11.7. Linearna algebra za $\mathbb{C}^n$. Budući da u dosadašnjem proučavanju vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ nigdje nismo koristili "prirodu" realnih brojeva, već samo **svojstva**[7] zbrajanja i množenja realnih brojeva i **svojstva**[8] zbrajanja i množenja skalarom na $\mathbb{R}^n$, to isto možemo ponoviti i za $\mathbb{C}^n$ jer kompleksni brojevi imaju **ista svojstva**[9] zbrajanja i množenja, a $\mathbb{C}^n$ **ista svojstva**[10] zbrajanja i množenja skalarom. Na primjer, imamo **istu** definiciju baze:

Kažemo da su vektori $a_1, a_2, \ldots, a_s$ baza u $\mathbb{C}^n$ ako svaki vektor x u $\mathbb{C}^n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_s a_s,\quad \lambda_1,\ldots,\lambda_s\in\mathbb{C}.$$

i imamo **isti** teorem 9.2:

Svaka baza u $\mathbb{C}^n$ ima n elemenata.

[7] mislimo na svojstva polja

[8] mislimo na svojstva vektorskog prostora

[9] mislimo na svojstva polja

[10] mislimo na svojstva vektorskog prostora

Bibliografija

[B] D. Blanuša, *Viša matematika*, I. dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963.

[E] Neven Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2001.

[H1] Krešimir Horvatić, *Linearna algebra*, I. dio, Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1995.

[H2] Krešimir Horvatić, *Linearna algebra*, II. dio, Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1995.

[H3] Krešimir Horvatić, *Linearna algebra*, III. dio, Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1995.

[Kr] Hrvoje Kraljević, *Vektorski prostori*, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004.

[K1] Svetozar Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[K2] Svetozar Kurepa, *Matematička analiza (diferenciranje i integriranje)*, I. dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[K3] Svetozar Kurepa, *Funkcionalna analiza (elementi teorije operatora)*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[Md] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, I. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[Mk] Ž. Marković, *Uvod u višu analizu*, I. dio, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1961.