Linearna algebra

Mirko Primc

Sadržaj

Dio 1

Linearna algebra 1

POGLAVLJE 1

Rješavanje sistema linearnih jednadžbi

U ovom je poglavlju opisan postupak rješavanja proizvoljnog sistema linearnih algebarskih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacija nepoznanica. Dokazano je da homogeni sistemi s više nepoznanica nego li jednadžbi uvijek imaju netrivijalno rješenje.

1. Sistemi linearnih jednadžbi

1.1. Sistem linearnih jednadžbi. Neka je zadano $m \times n$ realnih brojeva α_{ij} za $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$ i još m realnih brojeva $\beta_1, \dots, \beta_m$. *Sistem* ili *sustav jednadžbi*

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= \beta_1 \,, \\
\alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2 \,, \\
\cdots \\
\alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= \beta_m
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

je problem kod kojeg treba naći **sve** n-torke realnih brojeva $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ takve da vrijedi relacija (1.1). Obično govorimo da su $\xi_1, \dots, \xi_n$ *nepoznanice sistema*[1], premda je u stvari nepoznata n-torka brojeva $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Ponekad sistem od m jednadžbi s n nepoznanica zovemo kraće *sistemom tipa* $m \times n$.

1.2. Pitanje. Da li je sistem jednadžbi $\xi_1 - \xi_2 = 1$, $\xi_2 - \xi_3 = 1$, $\xi_3 - \xi_4 = 1$, $\xi_4 - \xi_5 = 1$ tipa 5×4? DA NE

1.3. Primjer. Sustav jednadžbi

$$
\begin{aligned}
3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 5, \\
-\xi_1 + \xi_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

[1]Nepoznanice sistema se vrlo često pišu kao $x_1, \dots, x_n$ i sistem se zapisuje kao

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \,, \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \,, \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \,,
\end{aligned}
$$

no mi ćemo realne brojeve obično označavati malim grčkim slovima, kao što smo u (1.1) koristili alfa α, beta β i ksi ξ s jednim ili dva indeksa.

ima dvije jednadžbe s tri nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3. Očito trojke $x = (1, 3, 1)$ i $x = (2, 1, 2)$ zadovoljavaju uvjet (1.2). No da bismo riješili sustav jednadžbi (1.2) trebamo naći **sve** trojke $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ tako da vrijedi (1.2).

Dok sustav jednadžbi (1.2) ima barem dva rješenja, sustav

$$\begin{aligned} 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 5, \\ 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 6 \end{aligned} \tag{1.3}$$

očito **nema ni jedno rješenje** jer ne postoji trojka brojeva $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ takva da bi jedan te isti izraz jednom bio jednak 5, a drugi put 6. No ovaj smo put sustav **riješili**: skup svih rješenja sustava (1.3) je prazan skup!

1.4. Homogeni sistemi jednadžbi. Kažemo da je sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= 0\,, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= 0\,, \\ \cdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

homogen sistem. Uočimo da je $x = (0, \ldots, 0)$ rješenje homogenog sistema, zovemo ga *trivijalnim rješenjem.* Rješenje $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ homogenog sistema zovemo *netrivijalnim* ako je $\xi_i \neq 0$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1.5. Primjer. $(0, 0, 0, 0)$ je trivijalno rješenje homogene jednadžbe

$$3\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + 0\xi_4 = 0,$$

a $(1, 3, 0, 0)$ je jedno netrivijalno rješenje.

1.6. Ekvivalentni sistemi. Za dva sistema jednadžbi od n nepoznanica kažemo da su *ekvivalentni sistemi* ako imaju iste skupove rješenja. Na primjer, ako drugu jednadžbu $\xi_1 = \xi_3$ sistema (1.2) uvrstimo u prvu, dobivamo ekvivalentni sistem

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + \xi_2 &= 5, \\ -\xi_1 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

1.7. Matrica sistema. Brojeve α_{ij} zovemo *koeficijentima sistema*, a zapisane u pravokutnom obliku

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

zovemo *matricom sistema* (1.1). Obično kažemo da je matrica sistema tipa $m \times n$. Brojeve $\beta_1, \ldots, \beta_m$ zovemo *slobodnim članovima sistema.* Koeficijente sistema i desnu stranu obično zapisujemo u pravokutnom obliku, kako se i pojavljuju u zapisu jednadžbi,

$$(A,b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

i zovemo ih *proširenom matricom sistema* i *desnom stranom sistema* (1.1). Često sistem kraće zapisujemo kao

$$Ax = b,$$

misleći pritom da je A matrica sistema, $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ zapisan kao stupac

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

i b desna strana sistema. Matricu sistema u kojoj su svi koeficijenti sistema jednaki nuli zapisujemo kratko kao $A = 0$, a slično i za desnu stranu homogenog sistema pišemo kratko $b = 0$. Za matricu $A = 0$ kažemo da je *nul-matrica*. Ako su svi koeficijenti nekog retka matrice jednaki nuli, onda ćemo reći da je to *nul-redak*. Isto tako za stupac kojemu su svi koeficijenti nula kažemo da je *nul-stupac*.

1.8. Primjer. Matrica, proširena matrica i desna strana sistema (1.2) su

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.9. Zadatak. Napišite proširenu matricu sustava jednadžbi

$$\xi_1 + \xi_2 = 1, \quad \xi_2 + \xi_3 = 1, \quad \xi_3 + \xi_4 = 1, \quad \xi_4 + \xi_1 = 1.$$

1.10. Zadatak. Napišite sustav jednadžbi kojemu je proširena matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da li je to sustav tipa 4×4?

2. Trokutasti sistemi jednadžbi

Neke posebne tipove sistema linearnih jednadžbi lako je riješiti, a posebno su važni trokutasti i stepenasti sistemi.

2.1. Jedna jednadžba s jednom nepoznanicom. Najjednostavniji je 1×1 "sistem"

$$\alpha\xi = \beta$$

od jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Ako je $\alpha \neq 0$, onda imamo jedinstveno rješenje $\xi = -\beta/\alpha$. Ako je $\alpha = 0$, onda za svaki ξ imamo $\alpha\xi = 0$ i svaki broj ξ je rješenje u slučaju $\beta = 0$, a ni jedan broj ξ nije rješenje u slučaju $\beta \neq 0$.

2.2. Zadatak. Riješite jednadžbe
a) $1\xi = 1$, b) $1\xi = 0$, c) $0\xi = 1$ i d) $0\xi = 0$.

2.3. Sistem jednadžbi s jednom nepoznanicom. Kao i u prethodnom slučaju, lako je riješiti $m \times 1$ sistem od m jednadžbi

$$\alpha_i\xi = \beta_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

s jednom nepoznanicom ξ. Na primjer, od tri sistema tipa 2×1

$$\begin{aligned} 0\xi &= 0, & 0\xi &= 0, & 0\xi &= 2, \\ 2\xi &= 2, & 0\xi &= 0, & 2\xi &= 0, \end{aligned}$$

prvi ima jedinstveno rješenje $\xi = 1$, drugi ima beskonačno rješenja $\xi \in \mathbb{R}$, a treći nema ni jedno rješenje.

2.4. Jedna jednadžba s više nepoznanica. Promatrajmo $1 \times n$ "sistem" od jedne jednadžbe s n nepoznanica

$$\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_{j-1}\xi_{j-1} + \alpha_j\xi_j + \alpha_{j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_n\xi_n = \beta$$

i pretpostavimo da je $\alpha_j \neq 0$. Tada *rješavanjem po j-toj nepoznanici* dobivamo

$$\xi_j = \frac{1}{\alpha_j}\left(\beta - (\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_{j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_n\xi_n)\right),$$

pa za svaki izbor brojeva $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1} \dots, \xi_n$ možemo odrediti ξ_j da jednadžba bude zadovoljena. Tako dobivamo sva rješenja jednadžbe.

2.5. Primjer. Homogenu jednadžbu

$$3\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + 0\xi_4 = 0$$

možemo rješavati po prvoj nepoznanici ξ_1 tako da po volji biramo vrijednosti za ξ_2, ξ_3, ξ_4 i onda izračunamo

$$\xi_1 = (\xi_2 - \xi_3)/3.$$

Znači da je skup svih rješenja jednadžbe jednak

$$\{(\tfrac{1}{3}(\xi_2 - \xi_3), \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Jednadžbu možemo rješavati i po drugoj nepoznanici ξ_2 tako da po volji biramo vrijednosti za ξ_1, ξ_3, ξ_4 i onda izračunamo

$$\xi_2 = 3\xi_1 + \xi_3.$$

Tako opet dobijemo sva rješenja, samo je sada skup svih rješenja jednadžbe drugačije zapisan:

$$\{(\xi_1, 3\xi_1 + \xi_3, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Jasno je da jednadžbu ne možemo riješiti po nepoznanici ξ_4.

2.6. Zadatak. Riješite jednadžbu $\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 1$.

2.7. Matrica sistema je nul-matrica. Sistem

$$0x = b$$

nema rješenja kada sistem nije homogen, a svaki n-torka $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ realnih brojeva jest rješenje kad je $b = 0$. Na primjer, sistem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nema rješenja.

2.8. Trokutaste matrice. Kažemo da je $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$ *donja trokutasta matrica* ako je $\alpha_{ij} = 0$ za $i < j$. Na primjer, svaka od matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je donja trokutasta jer je za svaku $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$. Kažemo da je $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$ *gornja trokutasta matrica* ako je $\alpha_{ij} = 0$ za $i > j$. Tako imamo 4×4 gornje trokutaste matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

2.9. Sistemi jednadžbi s trokutastom matricom sistema. Sisteme jednadžbi kojima su matrice sistema gornje trokutaste zovemo *trokutastim sistemima.* Rješavanje $n \times n$ trokutastog sistema svodi se, u n koraka, na rješavanje jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Kada je, na primjer, matrica sistema gornja trokutasta kojoj su dijagonalni elementi različiti od nule, tj.

$$\alpha_{11} \neq 0, \quad \alpha_{22} \neq 0, \quad \dots, \quad \alpha_{nn} \neq 0,$$

rješavanje sistema

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{1,n}\xi_n &= \beta_1\,, \\ \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2\,, \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{n-1,n}\xi_n &= \beta_{n-1}\,, \\ \alpha_{nn}\xi_n &= \beta_n \end{aligned}$$

započinjemo rješavanjem zadnje jednadžbe

$$\alpha_{nn}\xi_n = \beta_n.$$

Ta jednadžba ima jedinstveno rješenja ξ_n koje uvrštavamo u predzadnju jednadžbu i rješavamo jednadžbu s nepoznanicom ξ_{n-1}

$$\alpha_{n-1,n-1}\xi_{n-1} = -\alpha_{n-1,n}\xi_n + \beta_{n-1}.$$

Nastavljajući taj postupak do prve jednadžbe dobivamo jedinstveno rješenje sistema. Na primjer, rješavanje sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

započinjemo rješavanjem treće jednadžbe

$$2\xi_3 = 2.$$

Jedinstveno rješenje $\xi_3 = 1$ uvrštavamo u drugu jednadžbu i dobivamo

$$2\xi_2 = \xi_3 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Jedinstveno rješenje $\xi_2 = 2$ uvrštavamo u prvu jednadžbu i dobivamo jednadžbu

$$\xi_1 = \xi_2 - 2\xi_3 - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$$

koja ima jedinstveno rješenje $\xi_1 = -1$. Sada zaključujemo da sistem ima jedinstveno rješenje $x = (-1, 2, 1)$.

Kod gornje trokutastog sistema određivali smo redom što su vrijednosti nepoznanica ξ_n, ξ_{n-1}, ..., ξ_1. Kod trokutastih sistema kojima su neki dijagonalni elementi nula može se desiti da tek u kasnijoj fazi rješavanja ustanovimo da sistem nema rješenja ili da neke nepoznanice nemaju proizvoljne vrijednosti. Na primjer, kod trokutastih sistema za $\beta = 0$ i $\beta = 1$

$$\begin{aligned} 0\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= -1, \\ 0\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 &= \beta, \\ \xi_3 + \xi_4 &= 2, \\ 2\xi_4 &= 2, \end{aligned}$$

iz zadnje jednadžbe jednoznačno dobivamo $\xi_4 = 1$, a onda iz predzadnje $\xi_3 = 1$. Sada u slučaju $\beta = 1$ vidimo da sistem nema rješenja, a u slučaju $\beta = 0$ je ξ_2 proizvoljan, no onda iz prve jednadžbe zaključujemo $\xi_2 = 1$

i ξ_1 proizvoljan. Takav nedostatak nema stepenasti sistem kojeg u našem primjeru dobijemo oduzimanjem druge jednadžbe od treće

$$\begin{aligned} -\xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= -1, \\ \xi_3 - \xi_4 &= \beta, \\ 2\xi_4 &= 2 - \beta, \\ 2\xi_4 &= 2 \end{aligned}$$

i onda oduzimanjem treće jednadžbe od četvrte

$$\begin{aligned} -\xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= -1, \\ \xi_3 - \xi_4 &= \beta, \\ 2\xi_4 &= 2 - \beta, \\ 0 &= \beta. \end{aligned}$$

Zadnja jednadžba tog sistema u stvari glasi

$$0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3 + 0\xi_4 = \beta,$$

pa za $\beta = 1$ jednadžba (i sistem) nema rješenja, a za $\beta = 0$ to nije nikakav uvjet na nepoznanice, treća jednadžba daje $\xi_4 = 1$, druga $\xi_3 = 1$, te na kraju prva $\xi_2 = 1$ i ξ_1 po volji.

2.10. Stepenaste matrice. Za $m \times n$ matricu kažemo da je *gornja stepenasta po recima* ako je svaki nul-redak niže od svih redaka koji nisu nula i u svakom retku prvi element različit od nule stoji desno od prvog elementa različitog od nule u prethodnom retku. To za matricu $A = (\alpha_{ij})$ možemo zapisati kao uvjet da za svaki $i = 1, \ldots, m-1$ i svaki $k = 1, \ldots, n$

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{za sve} \quad 1 \leq j < k \quad \text{povlači} \quad \alpha_{i+1,j} = 0 \quad \text{za sve} \quad 1 \leq j \leq k.$$

Prvi element u retku koji je različit od nule zove se *ugaoni* ili *stožerni element* matrice.

Na primjer, imamo 3×4 gornje stepenaste matrica kod kojih su svi ugaoni elementi 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a u prethodnoj smo točki imali primjer sistema sa stepenastom proširenom matricom sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

2.11. Stepenasti sistemi jednadžbi. Sisteme kojima su matrice sistema stepenaste po recima zovemo *stepenastim sistemima.* Takve sisteme rješavamo na sličan način kao i trokutaste sisteme. Na primjer, od dva stepenasta sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2, \\ 0\xi_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2, \\ 0\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

prvi nema rješenja jer jednadžba $0\xi_3 = 1$ nema rješenja, a drugi ima jedinstveno rješenje $x = (-1, 2, 1)$ jer je zadnja jednadžba $0\xi_3 = 0$ zadovoljena za svaki ξ_3, a iz prethodnog primjera (2.1) znamo jedinstveno rješenje preostale tri jednadžbe.

Kod rješavanja stepenastih sistema može se dogoditi da u pojedinom koraku trebamo riješiti jednadžbu s više nepoznanica. Na primjer, rješavanje stepenastog sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3 \end{aligned}$$

započinjemo rješavanjem druge jednadžbe

$$2\xi_2 - \xi_3 = 3.$$

Rješavanjem te jednadžbe po nepoznanici ξ_2 vidimo da imamo rješenje

$$\xi_2 = (\lambda + 3)/2$$

za svaki izbor realnog broja $\xi_3 = \lambda$. Uvrštavanjem rješenja u prvu jednadžbu dobivamo

$$\xi_1 = \xi_2 - 2\xi_3 - 1 = (\lambda + 3)/2 - 2\lambda - 1 = -3\lambda/2 + 1/2.$$

2.12. Zadatak. Riješite stepenasti sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 &= 6, \\ \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 &= 4, \\ \xi_5 + \xi_6 &= 2. \end{aligned}$$

3. Gaussova metoda eliminacije

3.1. Gaussove eliminacije. Pretpostavimo da matrica sistema (1.1) nije nul-matrica. To znači da u bar jednom retku matrice sistema postoji bar jedan element različit od nule. Smijemo pretpostaviti da je za neki j element α_{1j} iz prvog retka različit od nule (jer inače promijenimo redoslijed pisanja jednadžbi, ne mijenjajući pritom skup svih rješenja sistema). Budući da je $\alpha_{1j} \neq 0$, prvu jednadžbu možemo rješavati po nepoznanici ξ_j:

(3.1)
$$\xi_j = \frac{1}{\alpha_{1j}} \left(\beta_1 - (\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1,j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n)\right).$$

Uvrstimo li ξ_j u preostale jednadžbe, dobivamo sistem:
(3.2)
$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1,j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1j}\xi_j + \alpha_{1,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1\,,\\
&\alpha'_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{2,j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{2,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{2n}\xi_n = \beta'_2\,,\\
&\alpha'_{31}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{3,j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{3,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{3n}\xi_n = \beta'_3\,,\\
&\quad\dots\\
&\alpha'_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{m,j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{m,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{mn}\xi_n = \beta'_m\,.
\end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo da su za $i > 1$ i $k \neq j$ koeficijenti α'_{ik} (uz nepoznanicu ξ_k) i β'_i u i-toj jednadžbi dani formulom

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} - \alpha_{ij}\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{1j}}, \qquad \beta'_i = \beta_i - \alpha_{ij}\frac{\beta_1}{\alpha_{1j}},$$

odnosno

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + \lambda_i\alpha_{1k} \quad \text{i} \quad \beta'_i = \beta_i + \lambda_i\beta_1 \qquad \text{za} \quad \lambda_i = -\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{1j}}. \tag{3.3}$$

Ovaj rezultat interpretiramo na sljedeći način: *Pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (1.1) prve jednadžbe pomnožene s λ_i dobivamo novu jednadžbu u kojoj nema nepoznanice ξ_j; kažemo da smo eliminirali nepoznanicu ξ_j. U Gaussovom postupku eliminacije na ovaj način eliminiramo jednu te istu nepoznanicu ξ_j u svim jednadžbama za $i = 2, \dots, m$.*

3.2. Primjer. Neka je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica sistema jednadžbi s nepoznanicama $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Kao prvo vidimo da se nepoznanica ξ_1 "zapravo ne pojavljuje" u sistemu jednadžbi, pa sve ovisi o rješenju sistema s nepoznanicama ξ_2, ξ_3, ξ_4 i matricom sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koristeći prvu jednadžbu mogli bismo eliminirati nepoznanicu ξ_3 u ostalim jednadžbama. No, kako se često radi, možemo treću jednadžbu premjestiti na prvo mjesto, dobivši novi sistem s matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a onda u ostalima jednadžbama eliminirati nepoznanicu ξ_2.

3.3. Gaussove eliminacije daju ekvivalentni sistem jednadžbi. Ako je x rješenje početnog sistema jednadžbi (1.1), onda je jasno da je x rješenje i novog sistema (3.2) dobivenog pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (1.1) prve jednadžbe pomnožene s λ_i. No početni sistem jednadžbi (1.1) možemo rekonstruirati iz novog sistema pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (3.2) prve jednadžbe pomnožene s $-\lambda_i$. To znači da je svako rješenje x novog sistema (3.2) ujedno i rješenje početnog sistema (1.1). Znači da početni sistem (1.1) i novi sistem (3.2) imaju isti skup rješenja.

3.4. Elementarne transformacije sistema jednadžbi. Na sistemima jednadžbi možemo izvoditi tako zvane elementarne transformacije.

Prvi tip elementarne transformacije sistema je zamjena redosljeda pisanja dviju jednadžbi u sistemu. Takva je transformacija razmatrana u primjeru 3.2. Jasno je da je takvom transformacijom dobiven ekvivalentan sistem.

Drugi tip elementarne transformacije sistema je množenje jedne jednadžbe sistema brojem $\lambda \neq 0$. Očito je da "staru" jednadžbu možemo rekonstruirati iz "nove" množenjem brojem λ^{-1}, pa je zato "novi" sistem ekvivalentan "starom". Takvu transformaciju obično izvodimo kada želimo da koeficijent $\alpha_{ij} \neq 0$ u i-toj jednadžbi uz j-tu nepoznanicu "postane" 1, pa onda i-tu jednadžbu množimo s $\frac{1}{\alpha_{ij}}$.

Treći tip elementarne transformacije sistema je dodavanje jednoj jednadžbi sistema neke druge jednadžbe pomnožene s nekim brojem λ. Upravo taj tip transformacije koristimo u Gaussovom postupku eliminacije nepoznanica opisanom u prethodnoj točki.

3.5. Obratni hod u Gaussovoj metodi. Ponekad se opisani postupak eliminacija nepoznanica zove *direktni hod u Gaussovoj metodi*, a postupak nalaženja rješenja početnog sistema (1.1) iz novog sistema (3.2) zove se *obratni hod u Gaussovoj metodi.* Tu valja primijetiti da je $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ rješenje novog sistema (3.2) ako i samo ako je $(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$ rješenje sistema

$$
\begin{aligned}
&\alpha'_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{2,j-1}\xi_{j-1} \quad + \alpha'_{2,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{2n}\xi_n = \beta'_2\,, \\
&\alpha'_{31}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{3,j-1}\xi_{j-1} \quad + \alpha'_{3,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{3n}\xi_n = \beta'_3\,, \\
&\dots \\
&\alpha'_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{m,j-1}\xi_{j-1} \quad + \alpha'_{m,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{mn}\xi_n = \beta'_m
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

i ako je

$$
\xi_j = \frac{1}{\alpha_{1j}} \left(\beta_1 - (\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1,j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n)\right).
$$

Znači da iz rješenja sistema (3.4) možemo naći rješenje početnog sistema (1.1). *Time je problem rješavanja sistema od m jednadžbi s n nepoznanica sveden na problem rješavanja sistema od $m-1$ jednadžbi s $n-1$ nepoznanica.*

3.6. Gaussova metoda. Kada matrica sistema nije nula, primjenom Gaussovih eliminacija problem rješavanja sistema od m jednadžbi s n nepoznanica svodimo na problem rješavanja sistema od $m-1$ jednadžbi s $n-1$ nepoznanica. Ako je matrica manjeg sistema nula, onda sistem znamo riješiti. Ako matrica manjeg sistema nije nula, onda ponovo primijenimo Gaussove eliminacije. Na kraju postupka dobivamo ili matricu sistema nula, ili sistem s jednom nepoznanicom, ili jednu jednadžbu. U svakom od tih slučajeva znamo riješiti sistem, a rješenje početnog sistema dobivamo obratnim hodom.

3.7. Primjer. Neka je zadan sistem od 4 jednadžbe s 3 nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2. \end{aligned}$$

Odaberemo $\alpha_{11} = 1 \neq 0$ i pomoću prve jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_1 u ostalima. U prvom koraku mijenjamo drugu jednadžbu: množimo prvu jednadžbu s $\lambda = -1$ i pribrajamo drugoj jednadžbi. U drugom koraku mijenjamo treću jednadžbu i biramo $\lambda = 1$. U trećem koraku biramo $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1, \\ 4\xi_3 &= 1. \end{aligned}$$

U sljedećem ciklusu eliminirali bismo drugu nepoznanicu u trećoj i četvrtoj jednadžbi, koristeći za to drugu jednažbu. No u ovom se je primjeru desilo da u trećoj i četvrtoj jednadžbi već nema nepoznanice ξ_2. Odaberemo $\alpha_{33} = 3 \neq 0$ i pomoću treće jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_3 u četvrtoj.

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1, \\ 0 &= \tfrac{7}{3}. \end{aligned}$$

Zadnji redak na kraju procesa Gaussovih eliminacija označuje jednadžbu

$$0\xi_3 = \tfrac{7}{3}$$

koja nema rješenja. Znači da i početni sistem nema rješenja.

3.8. Primjer. Neka je zadan sistem od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

To su prve tri jednadžbe iz prethodnog primjera, pa Gaussovim eliminacijama dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1. \end{aligned}$$

Sada primijenimo obratni hod: iz treće jednadžbe dobijamo $\xi_3 = -1/3$. Uvrštavanjem dobivenog ξ_3 u drugu jednadžbu dobijamo $\xi_2 = 2/3$. Uvrštavanjem dobivenih ξ_2, ξ_3 u prvu jednadžbu dobivamo $\xi_1 = 1/3$. Dobiveno rješenje $x = (1/3, 2/3, -1/3)$ jedinstveno je rješenje početnog sistema.

3.9. Gaussova metoda i proširena matrica sistema. Valja primijetiti da je kod primjene Gaussovih eliminacija na sistem (1.1) bilo dovoljno zapisivati samo proširenu matricu sistema (A, b). Zato rješavanje sistema u primjeru 3.7 zapisujemo ovako:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

U ovom primjeru prvo odaberemo $\alpha_{11} = 1 \neq 0$ i pomoću prve jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_1 u ostalima. U prvom koraku mijenjamo drugi redak: množimo prvi redak s $\lambda = -1$ i pribrajamo drugom retku. U drugom koraku mijenjamo treći redak i biramo $\lambda = 1$. U trećem koraku biramo $\lambda = 1$.

U sljedećem ciklusu eliminirali bismo drugu nepoznanicu u trećoj i četvrtoj jednadžbi, koristeći za to drugu jednažbu. No u ovom se je primjeru desilo da u trećoj i četvrtoj jednadžbi već nema nepoznanice ξ_2.

Odaberemo $\alpha_{33} = 3 \neq 0$ i pomoću treće jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_3 u četvrtoj. Zadnji redak na kraju procesa Gaussovih eliminacija označuje jednadžbu

$$0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3 = \tfrac{7}{3}$$

koja nema rješenja, pa onda ni početni sistem nema rješenja.

3.10. Svođenje sistema na stepenasti oblik. Obično je najjednostavnije sistem jednadžbi rješavati tako da proširenu matricu sistema elementarnim transformacijama redaka svedemo na stepenastu matricu po recima. Tako matricu sistema iz primjera 3.2 svodimo na gornji stepenasti oblik

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gornji primjer nam pokazuje kako proizvoljni sistem možemo svesti na stepenasti: Ako matrica sistema nije nula, onda u prvom stupcu matrice koji nije nula (u gornjem je primjeru to drugi stupac) odaberemo koeficijent koji nije nula (u primjeru je to 1 u trećoj jednadžbi) i pripadnu jednadžbu/redak premjestimo na prvo mjesto. Pomoću odabranog koeficijenta eliminiramo sve koeficijente ispod njega. Postupak nastavimo s preostalim jednadžbama ne mijenjajući više prvu.

3.11. Zadatak. Riješite homogeni sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

svođenjem na stepenasti sistem.

3.12. Zadatak. Riješite homogeni sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

svođenjem na stepenasti sistem.

4. Homogeni $m \times p$ sistemi za $m < p$

4.1. Homogeni sistem s matricom sistema nula. Očito je svaki izbor n-torke brojeva $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ rješenje homogenog sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} 0\lambda_1 + \cdots + 0\lambda_n &= 0, \\ &\vdots \\ 0\lambda_1 + \cdots + 0\lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

s matricom sistema nula. Posebno, takav sistem uvijek ima netrivijalno rješenje.

4.2. Homogena jednadžba s više od jedne nepoznanice. Očito jedna homogena jednadžba

$$\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n = 0$$

s barem dvije nepoznanice $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ima netrivijalno rješenje.

4.3. Teorem. *Homogeni sistem od m jednadžbi*

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}\lambda_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

i $p > m$ nepoznanica uvijek ima netrivijalno rješenje $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

Naime, ili na kraju Gaussovog postupka eliminacije imamo jednu homogenu jednadžbu s $p-m+1 \geq 2$ nepoznanica koja ima netrivijalno rješenje, ili je postupak eliminacije prekinut ranije jer smo dobili homogeni sistem s matricom sistema nula, a koji također ima netrivijalno rješenje.

4.4. Primjer. Neka je zadan homogeni sistem od 2 jednadžbe s 3 nepoznanice

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 2\xi_2 - \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Gaussovom eliminacijom dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0, \\ 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

koji ima netrivijalno rješenje $\lambda_3 = 1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_1 = \lambda_2 - 2\lambda_3$.

POGLAVLJE 2

Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

U ovom poglavlju uvodimo operaciju zbrajanja na skupu $\mathbb{R}^n$ svih uređenih n-torki realnih brojeva i operaciju množenja n-torki realnim brojevima. Te dvije operacije na skupu $\mathbb{R}^n$ nasljeđuju neka dobra svojstva zbrajanja i množenja u polju realnih brojeva, pa $\mathbb{R}^n$ s uvedenim operacijama zovemo vektorskim prostorom. Koristeći te operacije definiramo geometrijske objekte u $\mathbb{R}^n$ kao što su pravci i ravnine. Pomoću operacija zbrajanja i množenja skalarom definiramo i elementarne transformacije na matricama te linearne kombinacije vektora. Na kraju uvodimo pojam linearne ljuske vektora i pojam potprostora prostora $\mathbb{R}^n$.

0.1. Pojam preslikavanja. Neka su A i B dva skupa. Ako svakom elementu a skupa A pridružimo neki element $f(a)$ skupa B, pišemo

$$a \mapsto f(a),$$

onda kažemo da je zadano *preslikavanje* f *sa skupa* A *u skup* B i pišemo

$$f\colon A \to B.$$

Kažemo da su dva preslikavanja $f\colon A \to B$ i $g\colon A \to B$ *jednaka* ako je

$$f(a) = g(a)$$

za sve elemente a skupa A.

0.2. Konačni nizovi elemenata u skupu. Neka je S neki skup. Tada preslikavanje $f\colon \{1,2,\dots,k\} \to S$ zovemo *nizom od* k *članova u skupu* S, ili samo *konačnim nizom u* S. Preslikavanje f je u potpunosti zadano ako znamo

$$f(1) = s_1, \quad f(2) = s_2, \quad f(3) = s_3, \quad \dots, \quad f(k) = s_k,$$

pa obično kažemo da je

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_k \quad \text{ili} \quad (s_1, s_2, s_3, \dots, s_k)$$

niz u S, a elemente s_1, s_2, s_3, $\dots$, s_k skupa S zovemo *članovima niza.* Također kažemo da je *prvi član niza* s_1, *drugi član niza* s_2 itd. Iz opće definicije jednakosti preslikavanja slijedi da su nizovi

$$f\colon \{1,2,\dots,k\} \to S \quad \text{i} \quad g\colon \{1,2,\dots,k\} \to S$$

jednaki ako i samo ako je

$$f(1) = g(1), \quad f(2) = g(2), \quad f(3) = g(3), \quad \dots, \quad f(k) = g(k).$$

Nizove $(s_1, \dots, s_k)$ od k članova u skupu S zovemo i *uređenom k-torkom elemenata iz S*. Skup svih k-torki elemenata iz S označavamo sa S^k i čitamo "skup es na katu potenciju" ili samo "es na katu".

0.3. Primjer. Za skup $S = \{0, 1\}$ imamo niz

$$0, 0, 0, 1, 0, 1, 1$$

od sedam članova, pri čemu je prvi član niza 0, drugi član niza isto 0 itd. Jasno je da je

$$1, 0, 1, 1, 0, 0, 0$$

drugi niz u skupu S jer se radi o drugom preslikavanju $\{1, 2, \dots, 7\} \to S$.

0.4. Primjer. Za skup $S = \{0, 1\}$ skup S^2 sastoji se od uređenih parova

$$(0, 0), \ (0, 1), \ (1, 0), \ (1, 1).$$

0.5. Zadatak. Za skup $S = \{0, 1\}$ ispišite sve elemente skupa S^3.

0.6. Razlika između skupa od n elemenata i niza od n članova. Kad govorimo o skupu $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ od n elemenata, onda podrazumijevamo da su svi elementi tog skupa međusobno različiti i ne podrazumijevamo nikakav poredak među njima. Kad govorimo o nizu $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ od n članova, onda podrazumijevamo da je s_1 prvi član niza, s_2 drugi član niza itd, a ne podrazumijevamo da su ti članovi međusobno različiti.

0.7. Zadatak. Za skup $S = \{0, 1\}$ ispišite sve dvočlane podskupove skupa S i sve dvočlane nizove u S.

1. Vektori u $\mathbb{R}^n$ i matrice tipa $n \times k$

1.1. Skup $\mathbb{R}^n$. Neka je n fiksan prirodan broj. Elementi skupa $\mathbb{R}^n$ (čitamo "er na entu" ili samo "er en") su sve uređene n-torke realnih brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Uređenu n-torku realnih brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ obično zovemo *točkom* ili *vektorom* u $\mathbb{R}^n$, a realne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *koordinatama* vektora (točke) a, pri čemu je *prva koordinata* α_1, *druga koordinata* je α_2 itd.

1.2. Primjer. $(0, 1, 1, -1, \sqrt{3})$ i $(0, 1, 1, -1, 0)$ su dvije različite petorke realnih brojeva, ili dvije različite točke u $\mathbb{R}^5$.

1.3. Zadatak. Napišite dvije različite točke u $\mathbb{R}^8$.

1.4. Skupovi $\mathbb{R}^n$ javljaju se u geometriji i analizi. Skupove $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ možemo si predočiti geometrijski. Tako si, na primjer, skup $\mathbb{R}^2$ svih uređenih parova realnih brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ možemo zamisliti kao skup točaka a u euklidskoj ravnini s koordinatama α_1 i α_2 u odabranom Kartezijevom sustavu koordinata. Na sličan si način uređene trojke realnih brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ zamišljamo kao točke euklidskog prostora s koordinatama α_1, α_2 i α_3 u odabranom Kartezijevom sustavu koordinata. U slučaju $n > 3$ za skup $\mathbb{R}^n$ nemamo neposredne geometrijske predodžbe, no još uvijek neka svojstva tog skupa interpretiramo "geometrijski", po analogiji s $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

Skupovi $\mathbb{R}^n$ javljaju se prirodno u matematičkoj analizi i njenim primjenama kao skupovi parametara (o kojima ovise neke veličine). Tako je, na primjer, brzina vjetra (v_x, v_y, v_z) u trenutku t u točki prostora s koordinatama x, y, z "točka" $(v_x, v_y, v_z, t, x, y, z)$ u $\mathbb{R}^7$.

1.5. Zapisivanje uređenih n-torki brojeva. U matematičkoj analizi i geometriji je običaj uređene n-torke brojeva $a \in \mathbb{R}^n$ zvati točkama i zapisivati ih kao retke

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

a u linearnoj je algebri običaj uređene n-torke brojeva $a \in \mathbb{R}^n$ zvati vektorima i zapisivati ih kao stupce, kažemo *vektor-stupce*

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Mi ćemo, prema prilici, koristiti oba načina zapisivanja. Kasnije ćemo govoriti i o *vektor-recima*

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

što su također n-torke brojeva.

1.6. Primjer.

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

su dva različita vektora u $\mathbb{R}^5$.

1.7. Konačni nizovi vektora u $\mathbb{R}^n$. Pored pojedinih vektora u $\mathbb{R}^n$ često ćemo pisati i nizove vektora u $\mathbb{R}^n$, kao što je, na primjer, niz od četiri vektora

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

u $\mathbb{R}^2$. Želimo li općenito za niz vektora

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

u $\mathbb{R}^n$ zapisati koordinate tih vektora, onda je običaj da koristimo (odgovarajuća mala grčka) slova s dva indeksa

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad a_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Dogovor je da α_{ij} označava i-tu koordinatu j-tog člana niza a_j.

1.8. Matrica tipa $n \times k$. Konačan niz vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ u $\mathbb{R}^n$, ili, što je isto, k-torku vektora

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

zovemo i *matricom realnih brojeva tipa* $n \times k$. Zapisujući koordinate vektora imali bismo previše (suvišnih) zagrada i zareza

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad, \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix} \right),$$

pa radije pišemo samo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Kažemo da matrica $(a_1, \ldots, a_k)$ ima n redaka i k stupaca. Ponekad matricu $(a_1, \ldots, a_k)$ kraće zapisujemo kao

$$(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,k}} \quad \text{ili samo} \quad (\alpha_{ij}).$$

Za i-tu koordinatu α_{ij} vektor-stupca a_j obično kažemo da je *element* matrice u i-tom retku i j-tom stupcu. Obično ćemo matrice označavati velikim latinskim slovima, na primjer

$$A = (a_1, \ldots, a_k)$$

ili

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

1.9. Primjer. Niz vektora (1.1) zovemo i matricom tipa 2×4 i kratko zapisujemo kao

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.10. Pitanje. Da li je matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

tipa 4×3? DA NE

1.11. Jednakost matrica. U skladu s općom definicijom iz točke 0.2, za dvije matrice $A = (a_1, \ldots, a_k)$ i $B = (b_1, \ldots, b_k)$ istoga tipa $n \times k$ kažemo da su jednake i pišemo $A = B$ ako su im pripadni vektor-stupci jednaki:

$$a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k.$$

1.12. Nul-matrica. Vektor $(0, \ldots, 0)$ u $\mathbb{R}^n$ kojem su sve koordinate nula zovemo *nul-vektorom* ili *nulom* i kratko označavamo s 0. Matricu $(0, \ldots, 0)$ kojoj su svi stupci nul-vektori zovemo *nul-matricom* ili *nulom* i označavamo je s 0:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Tako je, na primjer,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×4 nul-matrica.

1.13. Kvadratne matrice. Matrice tipa $n \times n$ zovemo *kvadratnim matricama.* Elemente $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nn}$ kvadratne matrice $A = (\alpha_{ij})$ zovemo *dijagonalom* od A, elemente α_{ij}, $i < j$ *gornjim trokutom* od A, a elemente α_{ij}, $i > j$ *donjim trokutom* od A. Elemente donjeg trokuta, dijagonale i gornjeg trokuta 4×4 matrice možemo si predočiti kao zvjezdice

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & * \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cdot & * & * & * \\ \cdot & \cdot & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Kvadratne matrice kojima donji trokut ima matrične elemente 0 zovemo *gornjim trokutastim matricama*, matrice kojima gornji trokut ima matrične elemente 0 zovemo *donje trokutastim matricama*, a matrice kojima i gornji i donji trokut ima matrične elemente 0 zovemo *dijagonalnim matricama.*

Tako, na primjer, imamo donje trokutaste, dijagonalne i gornje trokutaste 4×4 matrice:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

1.14. Pitanje. Koja je matrica donja trokutasta, a koja nije:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

2. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

2.1. Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Na skupu $\mathbb{R}^n$ definiramo operaciju zbrajanju po pravilu

$$a + b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

Također definiramo operaciju množenja vektora realnim brojem λ, obično kažemo *skalarom* λ, po pravilu

$$\lambda a = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ponekad je zgodno pisati $\lambda \cdot a$ umjesto λa, kao na primjer $1 \cdot a$ umjesto $1a$ kad želimo naglasiti da vektor a množimo brojem 1. Kada na skupu $\mathbb{R}^n$ koristimo operacije zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom, onda je običaj elemente od $\mathbb{R}^n$ zvati vektorima, a ne točkama. Da bismo u formulama odmah vidjeli zbrajamo li vektore ili brojeve, bit će zgodno vektore označavati malim latinskim slovima, na primjer a, b, c, ili malim latinskim slovima s indeksima, na primjer a_1, a_2, a_3, a brojeve i koordinate vektora malim grčkim slovima[1].

2.2. Primjer. U $\mathbb{R}^4$ imamo

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3\\-2+3\\0+5\\2+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\5\\1\end{pmatrix},\ 3\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1\\3\cdot(-2)\\3\cdot 0\\3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\0\\6\end{pmatrix}.$$

2.3. Algebarska svojstva zbrajanja i množenja skalarom. Budući da je operacija zbrajanja vektora $a+b$ definirana kao zbrajanje odgovarajućih koordinata $\alpha_i+\beta_i$, to iz svojstava asocijativnosti i komutativnosti za zbrajanje brojeva slijede svojstva *asocijativnosti*

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

i *komutativnosti*

$$a+b=b+a$$

za zbrajanje vektora. Na primjer, zbog komutativnosti zbrajanja brojeva vrijedi

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1+\alpha_1\\\beta_2+\alpha_2\\\vdots\\\beta_n+\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}.$$

To smo mogli kraće zapisati provjeravajući samo jednakost i-te koordinate

$$\alpha_i+\beta_i=\beta_i+\alpha_i$$

u vektorima $a+b$ i $b+a$ za svaki $i=1,2,\dots,n$.

Vektor kojemu su sve koordinate nula zovemo *nul-vektorom* ili *nulom* u $\mathbb{R}^n$

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

---

[1]Mala grčka slova

α	alfa	ι	iota	σ, ς	sigma
β	beta	κ	kapa	τ	tau
γ	gama	λ	lambda	υ	ipsilon
δ	delta	μ	mi	φ, ϕ	fi
ε, ϵ	epsilon	ν	ni	χ	hi
ζ	zeta	ξ	ksi	ψ	psi
η	eta	π	pi	ω	omega
ϑ, θ	theta	ρ, ϱ	ro		

Tako je $0 = \binom{0}{0}$ nula u $\mathbb{R}^2$, a $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je nula u $\mathbb{R}^3$. Očito je za vektore a i 0 iz $\mathbb{R}^n$

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Također je očito da svaki vektor a u $\mathbb{R}^n$ ima jedinstveni *suprotni element*

$$-a = -\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{pmatrix}$$

sa svojstvom

$$-a + a = a + (-a) = 0.$$

Kao i za brojeve, obično pišemo $a - b$ umjesto $a + (-b)$.

S druge strane, operacija množenja skalarom nasljeđuje neka svojstva množenja brojeva:

$$1 \cdot a = a, \qquad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,$$

te

$$0 \cdot a = \begin{pmatrix} 0 \cdot \alpha_1 \\ 0 \cdot \alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot \alpha_n \end{pmatrix} = 0, \quad (-1) \cdot a = \begin{pmatrix} (-1) \cdot \alpha_1 \\ (-1) \cdot \alpha_2 \\ \vdots \\ (-1) \cdot \alpha_n \end{pmatrix} = -a, \quad \lambda \cdot 0 = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot 0 \\ \vdots \\ \lambda \cdot 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Zbog distributivnosti množenja brojeva prema zbrajanju imamo dvije *distributivnosti množenja skalarom*: u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{R}$ i u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{R}^n$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

Zbog navedenih svojstava zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom skup $\mathbb{R}^n$ zovemo *vektorskim prostorom* $\mathbb{R}^n$. Grubo govoreći, s vektorima računamo "kao s brojevima".

2.4. Proporcionalni vektori. Kažemo da su vektori a i b u $\mathbb{R}^n$ *proporcionalni* ako je $a = \lambda b$ za neki realan broj λ ili je $b = \mu a$ za neki realan μ. Valja primijetiti da su po ovoj definiciji svaki a i 0 proporcionalni jer je $0 = 0a$, a za $a \neq 0$ nije $a = \mu 0$. No ako su a i b različiti od nule, onda $a = \lambda b$ povlači $\lambda \neq 0$ i $b = \lambda^{-1} a$.

2.5. Pitanje. Koja svojstva množenja realnih brojeva i množenja vektora realnim brojem koristimo u dokazu tvrdnje: "Ako su a i b različiti od nule, onda $a = \lambda b$ povlači $\lambda \neq 0$ i $b = \lambda^{-1} a$." ?

2.6. Pitanje. Da li svojstvo komutativnosti zbrajanja vektora u $\mathbb{R}^n$ glasi da za neke vektore a i b u $\mathbb{R}^n$ vrijedi $a + b = b + a$? DA NE

2.7. Pitanje. Da li je 0 u $\mathbb{R}^2$ jednaka 0 u $\mathbb{R}^3$? DA NE

2.8. Pitanje. Da li za vektor a u $\mathbb{R}^n$ vrijedi $a = -(-a)$? DA NE

2.9. Višestruke sume vektora. Operacija zbrajanja vektora je binarna operacija, što znači da je definirano zbrajanje dva vektora. Imamo li više vektora $a_1, a_2, \dots a_k$ u $\mathbb{R}^n$, onda definiramo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = (\dots((a_1 + a_2) + a_3) + \dots + a_{k-1}) + a_k.$$

Budući da smo na isti način definirali i višestruke sume brojeva, sumu više vektora računamo tako da računamo odgovarajuće sume koordinata. Na primjer, za četiri vektora u $\mathbb{R}^2$ imamo

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+1+5 \\ 1-1+1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2.10. Asocijativnost za višestruke sume vektora. Za sve prirodne brojeve k i m i vektore $a_1, \dots, a_{k+m} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m}. \end{aligned}$$

To svojstvo vrijedi zbog analognog svojstva brojeva. Na primjer

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+5 \\ 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2.11. Komutativnost za višestruke sume vektora. Za sve permutacije[2] σ skupa $\{1, 2, \dots, k\}$ i vektore $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \cdots + a_{\sigma(k)} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Tako je, na primjer,

$$a_2 + a_3 + a_1 = a_1 + a_2 + a_3.$$

2.12. Oznaka za višestruke sume vektora. Kao i za brojeve, višestruke sume vektora možemo zapisati pomoću znaka sumacije $\sum$:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Podsjetimo se da nije važno koji indeks sumacije koristimo:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

2.13. Distributivnost za višestruke sume. Za višestruke sume brojeva ili vektora vrijede svojstva distributivnosti množenja skalarom prema zbrajanju

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a, \qquad \lambda \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda a_i.$$

[2]Permutacija σ skupa $\{1, 2, \dots, k\}$ je bijekcija $\sigma\colon \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, k\}$. Na primjer, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ i $\sigma(3) = 1$ je permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$ koju obično zapisujemo kao niz brojeva 231.

3. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^n$

3.1. Geometrijska interpretacija polja realnih brojeva $\mathbb{R}$. Postoje razne konstrukcije ili definicije polja realnih brojeva i sve su one matematički ekvivalentne. U geometrijskoj interpretaciji skup realnih brojeva je bilo koji izabrani pravac p u euklidskoj ravnini na kojem su izabrane bilo koje međusobno različite točke 0 i 1. Točke na tom pravcu p zovemo realnim brojevima.

Zbroj $\alpha+\beta$ realnih brojeva $\alpha,\beta\in p$ definiramo tako da odmjerimo usmjerenu dužinu (strelicu, vektor) $\overrightarrow{0\beta}$ i prenesemo njen početak na točku α, a kraj te prenesene usmjerene dužine proglasimo zbrojem $\alpha+\beta$.

Množenje realnih brojeva definiramo koristeći teorem o sličnosti trokuta: Neka su $\alpha,\beta\in p$. Odaberemo drugi pravac q, $q\neq p$, koji siječe pravac p u točki 0. Na pravcu q odaberemo točku $1'$ tako da su duljine $\overline{01}$ i $\overline{01'}$ jednake, te točku $\beta'\in q$ tako da su duljine $\overline{0\beta}$ i $\overline{0\beta'}$ jednake, pazeći pritom da su $1'$ i β' na istoj strani (zraci) pravca q u odnosu na 0 ako i samo ako su 1 i β na istoj strani (zraci) pravca p u odnosu na 0. Sada povučemo pravac r kroz točke $1'\in q$ i $\alpha\in p$ i njemu paralelan pravac s kroz točku $\beta'\in q$. Tada pravac s siječe pravac p u jednoj točki X koju proglasimo umnoškom $X=\alpha\cdot\beta\in p$. Zbog teorema o sličnosti trokuta vrijedi $\overline{0\beta}:\overline{01}=\overline{0X}:\overline{0\alpha}$, što i jest motivacija naše definicije množenja.

Višekratnim nanošenjem usmjerene dužine $\overrightarrow{01}$, počevši od točke 0, dobit ćemo brojeve $1,2,3,\dots$. Dakle

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{R}.$$

Nanošenjem na drugu stranu usmjerene dužine $\overrightarrow{10}$ dobit ćemo $-1,-2,\dots$. Dakle

$$\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}.$$

Korištenjem teorema o sličnosti trokuta možemo konstruirati racionalne brojeve $\frac{1}{2}$, ili $\frac{3}{5}$, ili bilo koji $\frac{p}{q}$. Dakle

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

Geometrijski definirane operacije zbrajanja i množenja na $\mathbb{R}$ su asocijativne i komutativne i množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje. Nadalje, obje operacije imaju neutralne elemente nulu i jedan. S obzirom na zbrajanje svaki realni broj α ima suprotni element $-\alpha$, a s obzirom na množenje svaki realni broj broj $\alpha\neq 0$ ima recipročni element α^{-1}. Zbog navedenih svojstava zbrajanja i množenja govorimo da je skup realnih brojeva polje.

Za realan broj α pišemo $\alpha\geq 0$ ako i samo ako se nalazi na zraci s početkom u točki (broju) 0 koja prolazi točkom 1. Općenito pišemo $\alpha\geq\beta$ ako i samo ako je $\alpha-\beta\geq 0$.

3.2. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^2$. Vektorski si prostor $\mathbb{R}^2$ zamišljamo kao euklidsku ravninu u kojoj smo izabrali pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, pa uređeni par brojeva $a=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ predstavlja koordinate točke a u ravnini. Obično si točku a u ravnini zamišljamo kao vektor-strelicu $\overrightarrow{0a}$. Tada zbrajanje vektora $a+b$ u $\mathbb{R}^2$ odgovara zbrajanju vektor-strelica $\overrightarrow{0a}+\overrightarrow{0b}$ u ravnini po *pravilu paralelograma: $a+b$ je četvrti vrh paralelograma kojemu su tri vrha točke* 0, *a i b*. Tako je, na primjer, zbroj vektora u ravnini

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

geometrijski dobiven kao četvrti vrh paralelograma kojemu su zadana tri vrha

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Množenje vektora a skalarom λ je produljivanje strelice $\overrightarrow{0a}$ za faktor λ. Tako je, na primjer, vektor

$$3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$$

geometrijski dobiven produljivanjem 3 puta vektora $a=\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$. Općenito se za realan broj λ vektor λa nalazi na pravcu p kroz ishodište 0 i točku a, a geometrijski λa konstruiramo tako tako da prvo kroz točku 1 na x-osi i točku a povučemo pravac r i onda konstruiramo njemu paralelan pravac s kroz točku λ na x-osi: zbog teorema o sličnosti trokuta pravci p i s sijeku se u točki λa.

3.3. Pravci u $\mathbb{R}^2$. U prethodnoj smo se točki podsjetili da je u euklidskoj ravnini za vektor $a\neq 0$ skup točaka

$$p=\{\lambda a \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

pravac kroz točku a (za $\lambda=1$) i ishodište 0 Kartezijevog sustava (za $\lambda=0$). Zato za vektor $a\neq 0$ u $\mathbb{R}^2$ skup točaka

$$p=\{\lambda a\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

zovemo *pravacem u* $\mathbb{R}^2$ kroz točke a i 0, ili samo *pravacem kroz ishodište*, a vektor a zovemo *vektorom smjera pravca* p. Ako je

$$c=\mu a, \quad \mu\neq 0,$$

onda je i c vektor smjera pravca p jer je

$$\{\lambda c \mid \lambda\in\mathbb{R}\}=\{\lambda\mu a \mid \lambda\in\mathbb{R}\}=\{\lambda a \mid \lambda\in\mathbb{R}\},$$

pri čemu druga jednakost vrijedi jer je za $\mu\neq 0$ preslikavanje $\lambda\mapsto\mu\lambda$ bijekcija na $\mathbb{R}$.

Budući da je u euklidskoj ravnini zbrajanje vektora definirano po pravilu paralelograma, proizvoljan pravac q u euklidskoj ravnini možemo opisati kao skup

$$q=\{b+\lambda a\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

za neke vektore b i $a\neq 0$, pri čemu su pravci

$$q=\{b+\lambda a\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\} \quad \text{i} \quad p=\{\lambda a\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

paralelni. Zato za vektore b i $a \neq 0$ u $\mathbb{R}^2$ skup točaka

$$q = \{b + \lambda a \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

zovemo *pravacem u* $\mathbb{R}^2$, ili *pravcem kroz točku*[3] b, a vektor a zovemo *vektorom smjera pravca* p. Ako je $d \in p$ neka točka na pravcu p i $c = \mu a$ za neki $\mu \neq 0$, onda pravac p možemo prikazati i kao

$$p = \{b + \lambda a \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{d + \lambda c \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

tj. kao pravac kroz točku d s vektorom smjera c. Za različite pravce koji imaju proporcionalne vektore smjera kažemo da su *paralelni pravci u* $\mathbb{R}^2$.

3.4. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^3$. Vektorski si prostor $\mathbb{R}^3$ zamišljamo kao euklidski prostor u kojem smo izabrali pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, pa uređena trojka brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ predstavlja koordinate točke a u prostoru. Obično si točku a u prostoru zamišljamo kao vektor-strelicu $\overrightarrow{0a}$. Tada zbrajanje vektora $a + b$ u $\mathbb{R}^3$ odgovara zbrajanju vektor-strelica $\overrightarrow{0a} + \overrightarrow{0b}$ u prostoru po pravilu paralelograma, a množenje skalarom λ kao produljivanje strelice λ puta.

3.5. Ravnine u $\mathbb{R}^3$. Kao i u slučaju euklidske ravnine, za vektor $a \neq 0$ u euklidskom prostoru skup točaka

$$p = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

je pravac kroz ishodište 0 Kartezijevog sustava. Ako vektor $c \neq 0$ nije proporcionalan vektoru a, onda je pravac

$$q = \{\mu c \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

različit od pravca p i ta dva pravca određuju ravninu Π u prostoru koja prolazi ishodištem 0. Za realne brojeve λ i μ imamo

$$\lambda a + \mu c \in \Pi$$

jer je to četvrti vrh paralelograma kojem su tri vrha 0, λa i μc u ravnini Π. Štoviše, geometrijski je jasno da svaku točku ravnine Π možemo napisati na taj način, tj. da je

$$\Pi = \{\lambda a + \mu c \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Za točku prostora b koja nije u ravnini Π imamo ravninu

$$\Sigma = \{b + \lambda a + \mu c \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

koja je paralelna s ravninom Π. Zato za dane vektore $a \neq 0$ i $b \neq 0$ u $\mathbb{R}^3$ koji nisu proporcionalni skup točaka

$$\Pi = \{\lambda a + \mu c \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

zovemo *ravninom kroz ishodište.* Za točku $b \in \mathbb{R}^3$ koja nije u ravnini Π skup

$$\Sigma = \{b + \lambda a + \mu c \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

zovemo *ravninom kroz točku* b. Kažemo da su Σ i Π *paralelne ravnine.*

[3] Jer za $\lambda = 0$ imamo $b + \lambda a = b \in p$.

3.6. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^n$. U geometriji, osim samog prostora koji se sastoji od točaka, proučavamo i familije skupova kao što su pravci, ravnine, kružnice, sfere itd. Kao što smo već rekli, u slučaju $n > 3$ za skup $\mathbb{R}^n$ nemamo neposredne geometrijske predodžbe, no po analogiji s $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ možemo uvesti geometrijske pojmove koji imaju slična svojstva[4] onima iz euklidske ravnine i euklidskog prostora. Ovdje ćemo, koristeći operacije zbrajanja i množenja skalarom, definirati pravce, segmente, zrake, ravnine i paralelograme u $\mathbb{R}^n$.

3.7. Pravci u $\mathbb{R}^n$. Za vektore $v \neq 0$ i a u $\mathbb{R}^n$ skup točaka

$$p = \{a + tv \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{3.1}$$

zovemo *pravcem u* $\mathbb{R}^n$. Kažemo da smo pravac p *zadali parametarski*[5]. Ako si parametar t zamislimo kao vrijeme, onda se točka $x(t) = a + tv$ giba u vremenu po pravcu jednolikom brzinom v jer je

$$\tfrac{1}{t_2 - t_1}(x(t_2) - x(t_1)) = \tfrac{1}{t_2 - t_1}(t_2 - t_1)v = v.$$

U trenutku $t = 0$ je $x(0) = a$, pa kažemo da *pravac* p *prolazi točkom* a ili da *točka* a *leži na pravcu* p. Vektor v zovemo *vektorom smjera* pravca.

3.8. Pravac kroz dvije točke. Neka su a i b dvije različite točke u $\mathbb{R}^n$. Stavimo $v = b - a$. Tada je

$$p = \{a + t(b - a) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1 - t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{3.2}$$

pravac u $\mathbb{R}^n$. Ako si parametar t zamislimo kao vrijeme, onda se točka $x(t) = (1 - t)a + tb$ giba po pravcu tako da je u trenutku $t = 0$ u položaju $x(0) = a$, a u trenutku $t = 1$ u položaju $x(1) = b$. Znači da pravac p prolazi točkama a i b.

3.9. Zadatak. Napišite parametarsku jednadžbu pravca u $\mathbb{R}^4$ kroz točke

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.10. Jedinstvenost pravca kroz dvije točke. *Kroz svake dvije točke prolazi jedan i samo jedan pravac.*

DOKAZ. Neka su a i b dvije različite točke u $\mathbb{R}^n$. Tada je formulom (3.2) zadan pravac p koji prolazi kroz te dvije točke, pa nam preostaje dokazati da je taj pravac jedinstven. Pretpostavim zato da su točke a i b i na pravcu $q = \{c + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$. Tada je za neke λ i μ

$$a = c + \lambda v, \quad b = c + \mu v.$$

[4]Primjer takvog svojstva je da kroz dvije različite točke prolazi jedan i samo jedan pravac.

[5]Ponekad kažemo da je formula (3.1) *parametarska jednadžba pravca*.

Znači da je $b - a = (\mu - \lambda)v$, pa zbog pretpostavke $a \neq b$ imamo $\lambda \neq \mu$ i

$$v = \tfrac{1}{\mu-\lambda}(b-a), \quad c = a - \lambda v = a - \tfrac{\lambda}{\mu-\lambda}(b-a).$$

Sada iz činjenice da je preslikavanje $s \mapsto t = \frac{1}{\mu-\lambda}(s-\lambda)$ bijekcija na $\mathbb{R}$ slijedi

$$\begin{aligned}\{c + sv \mid s \in \mathbb{R}\} &= \{a - \tfrac{\lambda}{\mu-\lambda}(b-a) + s\tfrac{1}{\mu-\lambda}(b-a) \mid s \in \mathbb{R}\}\\ &= \{a + \tfrac{1}{\mu-\lambda}(s-\lambda)(b-a) \mid s \in \mathbb{R}\}\\ &= \{a + t(b-a) \mid t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Znači da je pravac q jednak pravcu p zadanom formulom (3.2). □

3.11. Segmenti na pravcu. Neka su a i b dvije različite točke na pravcu

$$p = \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Ako si parametar t zamislimo kao vrijeme, onda se točka $x(t) = (1-t)a + tb$ giba po pravcu od točke a u trenutku $t = 0$ do točke b u trenutku $t = 1$. Zato kažemo da je točka c na pravcu p *između a i b* ako i samo ako je

$$c = (1-t)a + tb \quad \text{za neki} \quad 0 < t < 1.$$

Segmentom (na pravcu) zovemo skup oblika

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

3.12. Pitanje. Da li je skup S u $\mathbb{R}^3$ segment,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-t \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, 1 \leq t \leq 3 \right\}?$$

Pokušajte "vidjeti" taj skup u euklidskom prostoru sa zadanim Kartezijevim koordinatnim sustavom. Ako S jest segment, da li je paralelan[6] xy-ravnini.

3.13. Zrake na pravcu. Ako je $p = \{a + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ pravac, onda skupove

$$\{a + tv \mid t < 0\} \quad \text{i} \quad \{a + tv \mid t > 0\}$$

zovemo *zrakama*[7] *na pravcu p s ishodištem u točki a*. Još kažemo da točka dijeli pravac na dvije zrake.

---

[6]Paralelnost pravca i ravnine u $\mathbb{R}^3$ nismo definirali. Kako bi glasila dobra definicija?

[7]Ponekad zrakama na pravcu p zovemo skupove

$$\{a + tv \mid t \leq 0\} \quad \text{i} \quad \{a + tv \mid t \geq 0\}.$$

3.14. Kolinearnost triju točaka. Kažemo da su tri međusobno različite točke a, b i c u $\mathbb{R}^n$ *kolinearne* ako leže na istom pravcu. Budući da točke a i b određuju jedinstveni pravac

$$p = \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}$$

na kojem leže, to su a, b i c kolinearne ako i samo ako je

$$c = a + t(b-a), \quad \text{odnosno} \quad c - a = t(b-a)$$

za neki $t \in \mathbb{R}$.

3.15. Zadatak. Da li su u $\mathbb{R}^2$ kolinearne točke

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Ako jesu, da li je b između a i c? Nacrtajte sliku.

3.16. Zadatak. Da li su u $\mathbb{R}^4$ kolinearne točke

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Ako jesu, da li je c između a i b?

3.17. Ravnine u $\mathbb{R}^n$. Za dane vektore $v_1 \neq 0$ i $v_2 \neq 0$ u $\mathbb{R}^n$ koji nisu proporcionalni skup

$$\Sigma = \{a + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \tag{3.3}$$

zovemo *ravninom u* $\mathbb{R}^n$. Kažemo da smo ravninu *zadali parametarski*[8]. Za vrijednosti parametara $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ dobivamo a, pa kažemo da *ravnina* Σ *prolazi točkom* a ili da *točka* a *leži u ravnini* Σ.

3.18. Ravnina kroz tri točke. Neka su a, b i c tri točke u $\mathbb{R}^n$ koje nisu kolinearne. Stavimo $v_1 = b - a$ i $v_2 = c - a$. Prema točki 3.14 vektori v_1 i v_2 nisu proporcionalni i ravnina

$$\{a + \lambda_1(b-a) + \lambda_2(c-a) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \tag{3.4}$$

prolazi kroz točke a (za $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), b (za $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$) i c (za $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$). Kasnije ćemo vidjeti da je ravnina koja sadrži te tri točke jedinstvena.

3.19. Paralelogram u $\mathbb{R}^n$. Za dane vektore $v_1 \neq 0$ i $v_2 \neq 0$ u $\mathbb{R}^n$ koji nisu proporcionalni skup

$$\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\} \tag{3.5}$$

zovemo *paralelogramom u* $\mathbb{R}^n$ sa stranicama v_1 i v_2.

[8]Ponekad kažemo da je formula (3.3) *parametarska jednadžba ravnine.*

3.20. Zadatak. Nacrtajte paralelogram u ravnini sa stranicama

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

3.21. Zadatak. Kao što točka dijeli pravac na dvije zrake, tako i pravac dijeli euklidsku ravninu na dvije poluravnine. Definirajte parametarski poluravnine u $\mathbb{R}^2$.

4. Elementarne transformacije

Koristeći operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, na konačnim nizovima vektora iz $\mathbb{R}^n$ možemo izvoditi *elementarne transformacije* ili *elementarne operacije*

$$v_1, \dots, v_m \mapsto v_1', \dots, v_m'$$

koje su slične elementarnim transformacijama sistema jednadžbi[9] u Gaussovoj metodi. Te su transformacije definirane na sljedeći način:

4.1. Zamjena mjesta dvaju vektora. Za proizvoljne indekse $i < j$ definiramo transformaciju

$$\begin{aligned}&v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m\\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \dots, v_m,\end{aligned}$$

gdje smo stavili $a = v_i$ i $b = v_j$. Ova transformacija je sama svoj inverz; dva puta primijenjena daje identitetu.

4.2. Množenje jednog vektora skalarom različitim od nule. Za proizvoljni indeks i i skalar $\lambda \neq 0$ definiramo transformaciju

$$v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_m \mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda a, v_{i+1}, \dots, v_m,$$

gdje smo stavili $a = v_i$. Ova transformacija ima inverznu istoga tipa; za isti indeks biramo skalar $\frac{1}{\lambda}$, pa sa čime smo prije množili, s time sada dijelimo:

$$v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_m \mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, \tfrac{1}{\lambda} a, v_{i+1}, \dots, v_m.$$

4.3. Pribrajanje jednog vektora pomnoženog skalarom drugom vektoru. Za proizvoljne indekse $i \neq j$ i skalar λ definiramo transformaciju

$$\begin{aligned}&v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m\\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b + \lambda a, v_{j+1}, \dots, v_m,\end{aligned}$$

gdje smo stavili $a = v_i$ i $b = v_j$. Ova transformacija ima inverznu istoga tipa; za iste indekse biramo skalar $-\lambda$, pa što smo prije dodali sada oduzmemo:

$$\begin{aligned}&v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m\\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b - \lambda a, v_{j+1}, \dots, v_m.\end{aligned}$$

[9] vidi točku 1.3.4

4.4. Zadatak. Interpretirajte geometrijski u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ elementarne transformacije na parovima vektora

$$(a,b) \mapsto (\lambda a, b), \quad (a,b) \mapsto (a, \mu b), \quad (a,b) \mapsto (a, b+\lambda a), \quad (a,b) \mapsto (a+\mu b, b).$$

Kako se je promijenila površina paralelograma koje određuju vektori prije i nakon transformacije?

4.5. Elementarne transformacije na stupcima matrice. Budući da je matrica tipa $n \times m$ niz od m vektora iz $\mathbb{R}^n$, elementarne transformacije možemo primijeniti i na stupce matrice. Tako, na primjer, imamo elementarnu transformaciju zamjene prvog i trećeg stupca matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

4.6. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

elementarna transformacija? DA NE

4.7. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

elementarna transformacija? DA NE

4.8. Primjer. Elementarna transformacija $(a,b,c,d) \mapsto (a-c,b,c,d)$ daje

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

a njoj inverzna transformacija $(a,b,c,d) \mapsto (a+c,b,c,d)$ daje

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.9. Kompozicija elementarnih transformacija. Za početni niz vektora $(v_1, \dots, v_m)$ uzastopnom primjenom elementarnih transformacija dobivamo novi niz vektora $(w_1, \dots, w_m)$:

$$(v_1, \dots, v_m) \mapsto (v_1', \dots, v_m') \mapsto \dots \mapsto (w_1, \dots, w_m).$$

Činjenicu da je $(w_1, \dots, w_m)$ dobiven iz $(v_1, \dots, v_m)$ kompozicijom elementarnih transformacija zapisujemo kraće kao relaciju

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (w_1, \dots, w_m).$$

Očito vrijedi svojstvo *tranzitivnosti* relacije $\sim$

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (w_1, \dots, w_m) \quad \text{i} \quad (w_1, \dots, w_m) \sim (u_1, \dots, u_m)$$
$$\text{povlači} \quad (v_1, \dots, v_m) \sim (u_1, \dots, u_m).$$

Budući da elementarne transformacije oblika 4.2 za $\lambda = 1$ i transformacije oblika 4.3 za $\lambda = 0$ daju identitetu[10], to relacija $\sim$ ima svojstvo *refleksivnosti*

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (v_1, \dots, v_m),$$

a zbog toga što svaka elementarna transformacija ima inverznu, vrijedi i svojstvo *simetričnosti* relacije $\sim$

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (w_1, \dots, w_m) \quad \text{povlači} \quad (w_1, \dots, w_m) \sim (v_1, \dots, v_m).$$

4.10. Zadatak. Interpretirajte geometrijski u $\mathbb{R}^2$ elementarne transformacije na stupcima matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.11. Zadatak. Interpretirajte geometrijski u $\mathbb{R}^3$ elementarne transformacije na stupcima matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.12. Primjer. U ovom ćemo primjeru pokazati da kompozicijom elementarnih transformacija niz vektora

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

možemo prevesti u matricu[11]

$$(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

[10] Zbog toga je na pitanje 4.6 odgovor DA, a u tom primjeru je odgovor DA i zbog transformacije oblika 4.1.

[11] To je jedinična 3×3 matrica kojoj su stupci elementi kanonske baze u $\mathbb{R}^3$, vidi malo niže primjer 6.6.

Postupak je sličan Gaussovim eliminacijama nepoznanica, samo što sve transformacije izvodimo na stupcima matrice. Prvo poništavamo elemente u gornjem trokutu matrice (v_1, v_2, v_3)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

U prvom i drugom koraku izvodimo elementarne transformacije $(a, b, c) \mapsto (a, b - a, c)$ i $(a, b, c) \mapsto (a, b, c - 2a)$ koristeći prvi stupac da bismo dobili nule u prvom retku. U trećem koraku izvodimo transformaciju $(a, b, c) \mapsto (a, b, c - b)$ koristeći drugi stupac da bismo dobili nulu u drugom retku, ne "kvareći" pritom već dobivene nule u prvom retku. Zatim nastavljamo s elementarnim transformacijama, prvo "popravljajući" treći stupac transformacijom tipa 4.2, a potom poništavajući elemente u donjem trokutu matrice u trećem retku koristeći treći stupac

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Pomoću drugog stupca dovršimo postupak

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4.13. Svođenje matrice na trokutastu ili stepenastu formu primjenom elementarnih transformacija. Kod rješavanja niza problema u linearnoj algebri primijenjivat ćemo kompozicije elementarnih transformacija tako da konačan rezultat bude donja trokutasta ili donja stepenasta matrica, kao što je kompozicija elementarnih transformacija iz prethodnog primjera

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Za $n \times k$ matricu

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk}\end{pmatrix}$$

je postupak sljedeći[12]:

[12] Ovdje opisani postupak po stupcima matrice je potpuno analogan postupku svođenja matrice na stepenasti oblik, ali po recima, opisan u točki 1.3.10 prethodnog poglavlja.

1) Ako je $\alpha_{11} \neq 0$, onda prvi stupac matrice množimo s $1/\alpha_{11}$ i dobivamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} = (a'_1, a_2, \dots, a_k).$$

Nakon toga, koristeći 1 iz prvog stupca, "eliminiramo" redom sve preostale elemente iz prvog retka dodavanjem $-\alpha_{12}a'_1$ drugom stupcu, $-\alpha_{13}a'_1$ trećem stupcu, ..., $-\alpha_{1k}a'_1$ zadnjem stupcu:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha'_{n2} & \dots & \alpha'_{nk} \end{pmatrix} = (a'_1, a'_2, \dots, a'_k).$$

Sada postupak nastavljamo na $n \times (k-1)$ matrici

$$(a'_2, \dots, a'_k) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n2} & \dots & \alpha'_{nk} \end{pmatrix}.$$

Valja primijetiti da elementarne transformacije na stupcima $a'_2, \dots, a'_k$ neće "kvariti" već dobivene nule u prvoj koordinati.
2) Ako je $\alpha_{11} = 0$ i $\alpha_{1j} \neq 0$ za neki indeks stupca j, onda zamijenimo prvi i j-ti stupac i nastavimo kao pod 1).
3) Ako je čitav prvi redak nula, tj.

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix},$$

onda smo gotovi ako je matrica nula, a ako $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nije nul-matrica, onda postupak provodimo za prvi netrivijalni redak kao u 1) ili 2).

Konačni će rezultat biti u *donjoj stepenastoj formi po stupcima* kod koje su svi nul-stupci desno od svih stupaca koji nisu nula i u svakom stupcu prvi element različit od nule stoji niže od prvog elementa različitog od nule u prethodnom stupcu.

Prvi element u stupcu koji je različit od nule zove se *ugaoni* ili *stožerni element* matrice.

Na primjer, za proizvoljne brojeve na mjestu zvjezdica imamo 6×5 donju stepenastu matricu kod koje su svi ugaoni elementi jednaki 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na sličan način elementarnim transformacijama matricu možemo svesti na gornju stepenastu formu po stupcima[13] započinjući postupak sa zadnjim retkom koji nije nula i zadnjim stupcem.

4.14. Reducirana stepenasta forma matrice. U prethodnoj smo točki opisali kako elementarnim transformacijama stupaca matricu možemo svesti na donju stepenastu formu po stupcima. Taj postupak možemo nastaviti tako da svaki ugaoni element bude 1 i da onda s tom jedinicom eliminiramo sve ostale ne-nul elemente u tom retku. Za dobivenu matricu kažemo da je u *reduciranom stepenastom obliku.*

U slučaju 6×5 donje stepenaste matrice iz prethodne točke dobivamo reduciranu stepenastu matricu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.15. Primjer svođenja 2×4 matrice na donju stepenastu formu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a reducirana stepenasta forma je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricu smo mogli svesti i na gornju stepenastu po stupcima

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

---

[13] U *gornjoj stepenastoj formi po stupcima* svaki nul-stupac stoji lijevo od svih stupaca koji nisu nula i u svakom stupcu zadnji element različit od nule stoji više od zadnjeg elementa različitog od nule u slijedećem stupcu. Valja primijetiti da gornja stepenasta forma po stupcima nije (nužno) isto što i gornja stepenasta forma po recima.

a reducirana stepenasta forma je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

4.16. Primjer svođenja $4{\times}2$ matrice na donju stepenastu formu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

a reducirana stepenasta forma je

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matricu smo mogli svesti i na gornju stepenastu po stupcima

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2 & 1/6 \\ 1 & -1/6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 7/6 & 1/6 \\ 11/6 & -1/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a reducirana stepenasta forma je

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1/11 & 1/6 \\ 7/11 & 1/6 \\ 1 & -1/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/11 & 12/66 \\ 7/11 & 18/66 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.17. Zadatak. Elementarnim transformacijama na stupcima svedite na reducirani donji stepenasti oblik matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.18. Primjedba. Posebno su važne donje trokutaste matrice (α_{ij}) sa svim dijagonalnim elementima α_{ii} različitim od nule. Takva je trokutasta matrica i donje stepenasta, a njenim svođenjem na reducirani donji stepenasti oblik dobivamo tzv. jediničnu matricu s jedinicama na dijagonali i s ostalim elementima jednakim nuli. Raspisano za 4×4 matricom imamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha'_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & 1 & 0 \\ \alpha'_{41} & \alpha'_{42} & \alpha'_{43} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdje jedinice na dijagonali dobivamo dijeljenjem j-tog stupca s α_{jj}, a potom eliminiramo redom sve nedijagonalne elemente α'_{4j} u zadnjem tetku, α'_{3j} u predzadnjem retku, itd.

4.19. Zadatak. Elementarnim transformacijama na stupcima svedite na gornji trokutasti oblik matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.20. Elementarne transformacije na recima matrice. Budući da matricu tipa $n \times m$ možemo shvatiti i kao niz od n vektor-redaka iz $\mathbb{R}^m$, to elementarne transformacije možemo primijeniti i na retke matrice. Tako, na primjer, imamo elementarnu transformaciju zamjene prvog i trećeg retka matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.21. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

elementarna transformacija redaka matrice? DA NE

4.22. Elementarne transformacije redaka i Gaussove eliminacije. U točki 1.3.4 prethodnog poglavlja opisane su elementarne transformacije sistema jednadžbi koje koristimo u Gaussovoj metodi rješavanja sistema jednadžbi. Ako kod Gaussovih eliminacija zapisujemo samo koeficijente matrice sistema, kao u točki 1.3.9 prethodnog poglavlja, onda su elementarne transformacije sistema jednadžbi upravo elementarne transformacije redaka matrice sistema.

4.23. Elementarne transformacije prostora $\mathbb{R}^n$. Elemente od $\mathbb{R}^n$ obično zapisujemo kao vektor-stupce, odnosno $n \times 1$ matrice. Na takvim matricama možemo provoditi elementarne transformacije po recima, kao što je, na primjer, zamjena i-te i j-te koordinate vektora

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mapsto x' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Znači da imamo preslikavanje

$$x \mapsto x', \qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

koje zovemo *elementarnom transformacijom prostora* $\mathbb{R}^n$. Budući da svaka elementarne transformacija ima inverznu, *elementarna transformacija prostora* $\mathbb{R}^n$ *je bijekcija na* $\mathbb{R}^n$. Primijetimo da *za svaku elementarnu transformaciju prostora* $\mathbb{R}^n$ *vrijedi tzv. svojstvo linearnosti*

$$a + b \mapsto a' + b', \qquad \lambda a \mapsto \lambda a'.$$

Na primjer, ako se radi o elementarnoj transformaciji množenja i-te koordinate skalarom $\mu \neq 0$, onda je

$$a+b = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_i+\beta_i \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \mu(\alpha_i+\beta_i) \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \mu\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \mu\beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = a' + b',$$

a slično se provjeri i svojstvo $\lambda a \mapsto \lambda a'$.

5. Linearne kombinacije i sistemi jednadžbi

5.1. Linearne kombinacije vektora u $\mathbb{R}^n$. Ako su zadani vektori a_1, a_2, ..., a_s u $\mathbb{R}^n$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, onda možemo računati vektor

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s.$$

Takav izraz ili vektor zovemo *linearnom kombinacijom vektora* $a_1, a_2, \dots, a_s$ s *koeficijentima* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$.

5.2. Primjer. Vektor

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

je linearna kombinacija vektora

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

u $\mathbb{R}^2$ s koeficijentima 2, 1, -1 i 0. U ovoj kombinaciji možemo izostaviti sumand $0 \cdot \binom{5}{6} = 0$ i pisati

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a da još uvijek kažemo da je to linearna kombinacija četiri vektora (5.1).

5.3. Zadatak. Izračunajte linearnu kombinaciju vektora

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

s koeficijentima 0, 0, 2 i 2.

5.4. Trivijalna linearna kombinacija vektora. Linearnu kombinaciju

$$0a_1 + \cdots + 0a_s$$

vektora $a_1, \ldots, a_s$ u kojoj su svi koeficijenti nula zovemo *trivijalnom linearnom kombinacijom vektora* $a_1, \ldots, a_s$. Očito je trivijalna kombinacija vektora jednaka nuli, tj.

$$0a_1 + \cdots + 0a_s = 0.$$

5.5. Netrivijalna linearna kombinacija vektora. Kažemo da je linearna kombinacija vektora

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s$$

netrivijalna ako je barem jedan od skalara $\lambda_i \neq 0$. Tako je, na primjer,

$$1a_1 + 0a_2 \cdots + 0a_s$$

netrivijalna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

5.6. Pitanje. Da li je linearna kombinacija

$$0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

netrivijalna? DA NE

5.7. Primjer. Može se dogoditi da netrivijalna linearna kombinacija vektora bude jednaka nuli:

$$2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

5.8. Računanje linearne kombinacije elementarnim transformacijema. Za zadane vektore $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ u $\mathbb{R}^n$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ linearnu kombinaciju

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s$$

možemo računati koristeći elementarne transformacije

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2, \ldots, a_s, 0)\\
&\mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_s, \lambda_1 a_1)\\
&\mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_s, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)\\
&\qquad\vdots\\
&\mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_s, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s)\\
&= (a_1, a_2, \ldots, a_s, b).
\end{aligned}$$

Tako bi linearnu kombinaciju iz primjera 5.2 računali pomoću tri elementarne transformacije

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ovdje se prirodno nameće pitanje: možemo li elementarnim transformacijama stupaca matrice $(a_1, \ldots, a_s, b)$ utvrditi da je zadani vektor b linearna kombinacija vektora $a_1, \ldots, a_s$, ili, drugim riječima, utvrditi da postoje skalari $\xi_1, \ldots, \xi_s$ takvi da je

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_s a_s = b\,? \tag{5.2}$$

Odgovor na to pitanje dajemo u točki 6.16 niže, a u sljedećoj točki o problemu (5.2) razmišljamo na drugi način:

5.9. Linearne kombinacije u $\mathbb{R}^m$ i sistemi jednadžbi. Neka je zadan sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= \beta_1\,, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2\,, \\ &\cdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= \beta_m\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Označimo li s $a_1, \ldots, a_n$ stupce matrice sistema i s b desnu stranu, onda sistem jednadžbi (5.3) možemo zapisati i kao problem nalaženja svih linernih kombinacija vektora $a_1, \ldots, a_n$ koje daju vektor b:

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b. \tag{5.4}$$

5.10. Primjer. Sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 5, \\ -\,\xi_1 + \xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

istovjetan je problemu nalaženja svih linearnih kombinacija stupaca matrice sistema koje su jednake desnoj stranu sistema, odnosno problemu nalaženja svih koeficijenata ξ_1, ξ_2, ξ_3 takvih da je

$$\xi_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

5.11. Primjer. Pitanje da li je vektor b linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3 za

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

svodi se na pitanje da li sistem jednadžbi (5.5) ima rješenje. Zapišemo li Gaussove eliminacije na matrici sistema (5.5) dobivamo

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

pri čemu treća matrica odgovara ekvivalentnom sistemu

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_3 &= 0, \\ \xi_2 + 2\xi_3 &= 5 \end{aligned}$$

koji ima beskonačno mnogo rješenja, a jedno je rješenje, na primjer, $\xi_3 = 2$, $\xi_2 = 1$, $\xi_1 = 2$. Znači da vektor b možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2, a_3 na beskonačno mnogo načina, a jedan je mogući način

$$b = 2a_1 + a_2 + 2a_3.$$

5.12. Zadatak. Da li je vektor b linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3 za

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i, ako jest, koliko različitih načina zapisa ima?

5.13. Zadatak. Nađite bar jednu netrivijalnu linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2, a_3 i a_4 koja je jednaka nuli, gdje je

$$a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.14. Svojstvo linearnosti lijeve strane sistema jednadžbi. Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$ matrica tipa $m \times n$. Tada za vektor x u $\mathbb{R}^n$ s koordinatama $\xi_1, \dots, \xi_n$ imamo linearnu kombinaciju

$$Ax = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \tag{5.6}$$

u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m$. Za sve vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ i skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$Ax + Ay = A(x + y), \quad A(\lambda x) = \lambda(Ax). \tag{5.7}$$

Dokaz. Za vektor y u $\mathbb{R}^n$ s koordinatama $\eta_1, \dots, \eta_n$ imamo linearnu kombinaciju

$$Ay = \eta_1 a_1 + \cdots + \eta_n a_n \in \mathbb{R}^m.$$

Koristeći svojstva zbrajanja u vektorskim prostorima $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ dobivamo

$$\begin{aligned} Ax + Ay &= (\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n) + (\eta_1 a_1 + \cdots + \eta_n a_n) \\ &= (\xi_1 + \eta_1)a_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)a_n = A(x + y), \end{aligned}$$

a na sličan način slijedi i

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= (\lambda \xi_1)a_1 + \cdots + (\lambda \xi_n)a_n \\ &= \lambda(\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n) = \lambda(Ax). \end{aligned}$$

$\square$

5.15. Primjedba. Možda na prvi pogled formula (5.7) djeluje jednostavno i bezazleno, no ta je formula alfa i omega linearne algebre. Za početak, upravo zbog tog svojstva sisteme linearnih jednadžbi zovemo *linearnim*.

6. Linearna ljuska vektora u $\mathbb{R}^n$

6.1. Linearna ljuska vektora u $\mathbb{R}^n$. Za vektore[14] $v_1, \dots, v_k$ u $\mathbb{R}^n$ možemo promatrati skup svih njihovih linearnih kombinacija

$$\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^n\}.$$

Taj skup zovemo *linearnom ljuskom vektora* $v_1, \dots, v_k$ i označavamo ga kao

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Za svaki $i = 1 \dots, k$ imamo $v_i \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ jer je

$$v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_k.$$

6.2. Primjedba. Ako je $v \neq 0$ vektor u $\mathbb{R}^n$, onda je linearna ljuska $\langle v \rangle$ pravac kroz ishodište, a ako vektori $v_1 \neq 0$ i $v_2 \neq 0$ nisu proporcionalni, onda je linearna ljuska $\langle v_1, v_2 \rangle$ ravnina kroz ishodište. Zato si geometrijski linearne ljuske $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ vektora u $\mathbb{R}^n$ možemo zamišljati kao poopćenje pravaca i ravnina u prostoru $\mathbb{R}^n$.

S druge strane, linearnu ljusku vektora $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ u $\mathbb{R}^m$ možemo shvatiti algebarski kao skup svih desnih strana b sistema $m \times n$ jednadžbi

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b$$

koji imaju rješenje $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Geometrijski i algebarski način razmišljanja se plodotvorno dopunjuju. Tako je, na primjer, geometrjski jasno da elementarne transformacije

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a'_1, \dots, a'_n)$$

ne mijenjaju linearnu ljusku vektora, a onda kao algebarska posljedica slijedi da gornji sistem ima rješenje ako i samo ako ima rješenje sistem

$$\xi'_1 a'_1 + \cdots + \xi'_n a'_n = b$$

s novom matricom sistema $(a'_1, \dots, a'_n)$ i istom desnom stranom b.

[14]Ponekad nam je zgodno misliti da se radi o skupu vektora $\{v_1, \dots, v_k\}$, a ponekad je zgodnije misliti da se radi o nizu vektora $(v_1, \dots, v_k)$.

6.3. Linearna ljuska je potprostor u $\mathbb{R}^n$. Neka su $v_1, \dots, v_k$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Ako je

$$a, b \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

onda su i $a + b$ i μa opet linearne kombinacije iz $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, tj.

$$a + b,\ \mu a \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Zbog tog svojstva za linearnu ljusku $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ kažemo da je *zatvorena za operacije zbrajanja i množenja skalarom* i zovemo je *potprostorom od* $\mathbb{R}^n$. Također kažemo da vektori $v_1, \dots, v_k$ *razapinju potprostor* $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Dokaz. Ako je

$$a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \quad \text{i} \quad b = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k,$$

onda zbog svojstava zbrajanja i množenja skalarom imamo

$$a+b = (\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k)+(\beta_1 v_1+\cdots+\beta_k v_k) = (\alpha_1+\beta_1)v_1+\cdots+(\alpha_k+\beta_k)v_k,$$

$$\mu a = \mu(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = (\mu\alpha_1)v_1 + \cdots + (\mu\alpha_k)v_k.$$

□

6.4. Primjer. Neka je zadan vektor $e = (1, 0)$ u $\mathbb{R}^2$. Taj vektor razapinje potprostor

$$\langle e \rangle = \{\lambda e \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\0\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Geometrijski interpretirano to je x-os Kartezijevog sustava u euklidskoj ravnini. Ta os je očito zatvorena za zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom.

6.5. Primjer. Neka su zadani vektori e_1, e_2 u $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Tada imamo potprostor u $\mathbb{R}^2$ razapet vektorima e_1, e_2,

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\0\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Geometrijski interpretirano to je xy-ravnina Kartezijevog sustava u euklidskom prostoru. Ta ravnina je očito zatvorena za zbrajanje vektora po pravilu paralelograma, a očito je zatvorena i za množenje vektora skalarom.

6.6. Primjer: kanonska baza u $\mathbb{R}^3$. Neka su zadani vektori e_1, e_2, e_3 u $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tada se potprostor $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ u $\mathbb{R}^3$ razapet vektorima e_1, e_2, e_3 sastoji od svih linearnih kombinacija

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

No to su svi vektori u $\mathbb{R}^3$! Vektore e_1, e_2, e_3 zovemo *kanonskom bazom od* $\mathbb{R}^3$, a geometrijski ih interpretirano kao jedinične vektore triju osi izabranog Kartezijevog sustava u euklidskom prostoru.

6.7. Zadatak. Neka je $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Interpretirajte $\mathbb{R}^2$ kao ravninu i nacrtajte linearne ljuske $\langle v_1 \rangle$, $\langle v_2 \rangle$ i $\langle v_1, v_2 \rangle$.

6.8. Jednakost linearni ljuski vektora u $\mathbb{R}^n$. Neka su $a_1, \dots, a_r$ i $b_1, \dots, b_s$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Prema točkama 6.1 i 6.3 je $a_1, \dots, a_r \in \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ ako i samo ako je $\langle a_1, \dots, a_r \rangle \subset \langle b_1, \dots, b_s \rangle$.

Znači da vrijedi jednakost linearnih ljuski $\langle a_1, \dots, a_r \rangle = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ *ako i samo ako je*

$$a_1, \dots, a_r \in \langle b_1, \dots, b_s \rangle \quad i \quad b_1, \dots, b_s \in \langle a_1, \dots, a_r \rangle.$$

Primijetimo da se zadnji uvjet svodi na rješavanje r sistema jednadžbi tipa $n \times s$ i s sistema jednadžbi tipa $n \times r$.

6.9. Zadatak. Koristeći tvrdnju iz prethodne točke provjerite da li je $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$ za vektore

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.10. Lema. *Za vektore $v_1, \dots, v_m$ i $p < m$ vrijedi*

$$\langle v_1, \dots, v_p \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Naime, proširimo linearne kombinacije vektora $v_1, \dots, v_p$ do linearnih kombinacija vektora $v_1, \dots, v_m$ “dodavanjem nule”

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + 0 v_{p+1} + \cdots + 0 v_m.$$

6.11. Lema. $\langle v_1,\dots,v_m\rangle = \langle v_1,\dots,v_m,v_{m+1}\rangle$ *ako i samo ako je*

$$v_{m+1}\in\langle v_1,\dots,v_m\rangle.$$

Naime, $v_{m+1} = 0v_1 + \dots 0v_m + 1v_{m+1} \in \langle v_1,\dots,v_m,v_{m+1}\rangle$, pa jednakost linearnih ljuski povlači $v_{m+1}\in\langle v_1,\dots,v_m\rangle$. Obratno, ako je vektor v_{m+1} u $\langle v_1,\dots,v_m\rangle$, odnosno $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$, onda za linearne kombinacije imamo

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1}\left(\sum_{i=1}^m \mu_i v_i\right) = \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_m' v_m,$$

što povlači $\langle v_1,\dots,v_m,v_{m+1}\rangle \subset \langle v_1,\dots,v_m\rangle$. Jednakost linearnih ljuski sada slijedi iz prethodne leme.

6.12. Primjer. Neka je zadan niz od tri vektora (e,e,e) u $\mathbb{R}^2$, $e = (1,0)$. Budući da je $\mu_1 e + \mu_2 e + \mu_3 e = (\mu_1+\mu_2+\mu_3)e$, to je linearna ljuska $\langle e,e,e\rangle$ tih vektora jednaka

$$\langle e,e,e\rangle = \{\lambda e \mid \lambda\in\mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\0\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda\in\mathbb{R}\},$$

odnosno

$$\langle e,e,e\rangle = \langle e\rangle.$$

6.13. Pitanje. Neka je dan niz od četiri vektora $(0,0,0,0)$ u $\mathbb{R}^3$. Da li je linearna ljuska tih vektora $\langle 0,0,0,0\rangle = \{0\}\subset\mathbb{R}^3$? DA NE

6.14. Zadatak. Primjenom leme 6.11 i rješavanjem sistema jednadžbi $\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 = a_4$ utvrdite da li su jednake linearne ljuske $\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ i $\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle$ za vektore

$$a_1 = \begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix},\quad a_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix},\quad a_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad a_4 = \begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}?$$

6.15. Linearna ljuska vektora i elementarne transformacije. *Neka je niz vektora $v_1',\dots,v_k'$ dobiven elementarnim transformacijama iz niza $v_1,\dots,v_k$. Tada je*

$$\langle v_1',\dots,v_k'\rangle = \langle v_1,\dots,v_k\rangle.$$

Dokaz. Pretpostavimo da smo proveli elementarnu transformaciju

$$v_1' = v_1 + \mu v_2,\ v_2' = v_2,\dots,\ v_k' = v_k.$$

Neka je $\lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_k v_k'$ u linearna kombinacija u $\langle v_1',\dots,v_k'\rangle$. Tada je

$$\lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n' = \lambda_1 v_1 + (\lambda_1\mu + \lambda_2)v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n \in \langle v_1,\dots,v_k\rangle.$$

Time smo dokazali $\langle v_1',\dots,v_k'\rangle \subset \langle v_1,\dots,v_k\rangle$. Budući da je inverzna elementarna transformacija istoga tipa, slijedi i $\langle v_1,\dots,v_k\rangle \subset \langle v_1',\dots,v_k'\rangle$. Tvrdnja leme za ostale slučajeve elementarnih transformacija dokazuje se na sličan način. □

6.16. Pitanje egzistencije rješenja sistema jednadžbi. Na pitanje ima li sistem jednadžbi

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b \tag{6.1}$$

rješenje možemo odgovoriti rješavanjem sistema Gaussovom metodom eliminacija, dakle izvođenjem elementarnih transformacija na recima proširene matrice sistema.

S druge strane, elementarnim transformacijama stupaca matricu sistema $(a_1, \ldots, a_n)$ možemo prevedesti u reduciranu donju stepenastu matricu $(a'_1, \ldots, a'_n)$. Prema prethodnoj točki je linearna ljuska stupaca nove i stare matrice ista, pa sistem (6.1) ima rješenje ako i samo ako sistem

$$\xi'_1 a'_1 + \cdots + \xi'_n a'_n = b \tag{6.2}$$

ima rješenje. Pretpostavimo da su u reduciranoj stepenastoj matrici ugaoni element na mjestima $(i_1, 1), (i_2, 2), \ldots, (i_r, r)$. Tada elementarnim transformacijama na stupcima matrice

$$(a'_1, a'_2, \ldots, a'_s, b) \mapsto \ldots \mapsto (a'_1, a'_2, \ldots, a'_s, b'),$$

eliminiramo koordinate u b na mjestima $i_1, i_2, \ldots, i_r$ i dobijemo

$$b' = b - c = b - \beta_{i_1} a'_1 - \beta_{i_2} a'_2 - \cdots - \beta_{i_r} a'_r.$$

Ako je $b' = 0$, onda je $b = c$ linearna kombinacija vektora $a'_1, a'_2, \ldots, a'_s$ i sistem (6.2) ima rješenje. Ako je $b' = b - c \neq 0$, onda b nije linearna kombinacija vektora $a'_1, a'_2, \ldots, a'_s$ jer je c jedinstvena kombinacija tih vektora koja na mjestima $i_1, i_2, \ldots, i_r$ ima koordinate $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_r}$, a ipak nije b!

6.17. Primjer. Neka je

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama stupaca matricu (a_1, a_2, a_3) možemo prevesti u reducirani stepenasti oblik (a'_1, a'_2, a'_3): Prvo je svodimo na stepenasti oblik

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

a onda i na reducirani stepenasti oblik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prema točki 6.15 su linearne ljuske od a_1, a_2, a_3 i a_1', a_2', a_3' jednake, pa sistem s matricom sistema

$$(a_1, a_2, a_3, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \beta \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ima rješenje ako i samo ako sistem s matricom sistema

$$(a_1', a_2', a_3', b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ima rješenje. Jasno je da je drugi sistem lakše riješiti: jedina kombinacija vektora a_1', a_2', a_3' za koju je prva koordinata 1, treća koordinata 2 i četvrta koordinata 3 je

$$c = a_1' + 2a_2' + 3a_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

pa ako je $\beta = 1$ onda sistem ima rješenje, a ako je $\beta \neq 1$ onda sistem nema rješenje. To smo mogli izračunati i eliminacijom koordinata u b na mjestima ugaonih elemenata reducirane stepenaste matrice

$$\begin{aligned}(a_1', a_2', a_3', b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (a_1', a_2', a_3', b')\end{aligned}$$

i zaključiti da sistem ima rješenje ako je $b' = 0$ i nema rješenje ako je $b' \neq 0$.

6.18. Zadatak. Elementarnim transformacijama na stupcima utvrdite da li sistem jednadžbi s proširenom matricom sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ima rješenje.

6.19. Primjer. Neka su v_1, v_2, v_3 vektori iz $\mathbb{R}^3$ kao u primjeru 4.12

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Budući da niz vektora (v_1, v_2, v_3) elementarnim transformacijama možemo prevesti u kanonsku bazu (e_1, e_2, e_3), to je prema točki 6.15

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle.$$

No linearna ljuska $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ vektora kanonske baze je čitav prostor $\mathbb{R}^3$, pa imamo

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3.$$

6.20. Zadatak. Pokažite da je linearna ljuska vektora

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

čitav prostor $\mathbb{R}^3$.

7. Potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$

7.1. Definicija potprostora vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Neka je W neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je W *potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$ ako je *zatvoren za operacije zbrajanja vektora i množenje vektora skalarom*, tj. ako vrijedi:

(1) za sve $a, b \in W$ je $a + b \in W$,
(2) za sve $a \in W$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda a \in W$.

7.2. Nul-potprostor. Neka je $W = \{0\}$, tj. skup čiji je jedini element nula u $\mathbb{R}^n$. Budući da je $0 + 0 = 0$ i $\lambda 0 = 0$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, to je $W = \{0\}$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Potprostor $\{0\}$ zovemo *nul-potprostorom vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$ i označavamo ga s 0.

7.3. Trivijalni potprostori. Očito je $W = \mathbb{R}^n$ potprostor od $\mathbb{R}^n$. Potprostore 0 i $\mathbb{R}^n$ zovemo *trivijalnim potprostorima* vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

7.4. Primjer. Skup W svih vektora u $\mathbb{R}^3$ oblika

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je potprostor. Interpretiramo li $\mathbb{R}^3$ geometrijski, onda je potprostor W ravnina u prostoru koja sadrži prve dvije koordinatne osi.

7.5. Primjer. Skup

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 > 0 \right\}$$

nije potprostor u $\mathbb{R}^2$. Doduše, za $a, b \in W$ vrijedi $a + b \in W$, ali $(-1)a$ nije u W, pa općenito ni λa nije u W (nacrtajte sliku).

7.6. Pitanje. Da li je skup

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \right\}$$

potprostor u $\mathbb{R}^2$? DA NE

7.7. Svojstva operacija zbrajanja i množenja skalarom elemenata potprostora. Po definiciji potprostora W vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, na W imamo definirane operacija zbrajanja i množenja skalarom. Operacija zbrajanja je asocijativna i komutativna. Ako je w vektor iz W, onda je po pretpostavci $0 = 0 \cdot w$ iz W, pa potprostor W ima i element 0 za operaciju zbrajanja. Budući da je $-w = (-1) \cdot w$, to zajedno s elementom w potprostor W sadrži i suprotan element $-w$. Znači da operacija zbrajanja vektora iz W ima sva algebarska svojstva zbrajanja vektora u $\mathbb{R}^n$ popisana u točki 2.3. Očito je da i operacija množenja vektora iz W skalarom ima sva algebarska svojstva popisana u točki 2.3.

7.8. Linearna kombinacija elemenata potprostora. Ako je W potprostor i $a_1, \ldots, a_k$ vektori u W, onda iz definicije neposredno slijedi da je i svaka linearna kombinacija $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ element potprostora W.

7.9. Linearna ljuska vektora je potprostor od $\mathbb{R}^n$. Već smo vidjeli da je linearna ljuska vektora $v_1, \ldots, v_k$ u $\mathbb{R}^n$

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$.

7.10. Svi netrivijalni potprostori od $\mathbb{R}^3$. *Geometrijska nam intuicija kaže da su, osim skupa $\{0\}$ i samog $\mathbb{R}^3$, pravci i ravnine kroz ishodište jedini podskupovi od $\mathbb{R}^3$ zatvoreni za zbrajanje vektora po pravilu paralelograma i množenje vektora skalarom.* Da bismo to i dokazali pretpostavimo da je W potprostor od $\mathbb{R}^3$ i da je $W \neq 0$. Tada postoji vektor $v \neq 0$ u W i, budući da je W zatvoren za množenje skalarom, W sadrži pravac $p = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ako W nije taj pravac p, onda postoji $w \neq 0$ u W koji nije proporcionalan v i, budući da je W zatvoren za zbrajanje i množenje skalarom, W sadrži ravninu $\Pi = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Ako W nije ni ta ravnina Π, onda je $W = \mathbb{R}^3$. Naime, ako W nije Π, onda postoji vektor b u W koji nije linearna kombinacija vektora v i w. To znači da sistem jednadžbi

$$\xi_1 v + \xi_2 w = b$$

nema rješenja. No onda nema rješenja ni sistem

$$\xi_1' v' + \xi_2' w' = b$$

kojemu je matrica sistema reducirana stepenasta forma (v', w') matrice (v, w). Budući da $v \neq 0$ i $w \neq 0$ nisu proporcionalni, reducirana stepenasta matrica (v', w') je oblika

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako na mjestima ugaonih elemenata u matrici (v', w', b) eliminiramo koordinate od b, kao u točki 6.16, dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & \beta \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Budući da b nije linearna kombinacija v' i w', to u svakom od tri slučaja mora biti $\beta \neq 0$, i svaku od tih matrica možemo svesti na matricu (e_1, e_2, e_3) vektora kanonske baze u $\mathbb{R}^3$. Budući da za linearne ljuske imamo

$$\langle v, w, b \rangle = \langle v', w', b \rangle = \langle v', w', b' \rangle = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3,$$

to W sadrži sve vektore iz $\mathbb{R}^3$, pa je $W = \mathbb{R}^3$.

7.11. Primjedba. Gornji dokaz je malo dug i nespretan, ali koristi samo ono što smo dosada naučili. U idućem ćemo poglavlju naučiti pojmove i rezultate iz kojih će puno lakše slijediti opis svih potprostora, ne samo u $\mathbb{R}^3$, nego i općenito u $\mathbb{R}^n$.

7.12. Zadatak. Pokažite da su svi netrivijalni potprostori u $\mathbb{R}^2$ pravci kroz ishodište.

7.13. Zadatak. Pokažite da je skup svih rješenja $x = (\xi_1, \xi_2)$ homogene jednadžbe

$$\xi_1 - 3\xi_2 = 0$$

vektorski potprostor u $\mathbb{R}^2$. Interpretirajte taj skup geometrijski u euklidskoj ravnini.

7.14. Zadatak. Pokažite da je skup svih rješenja $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ homogenog sistema jednadžbi

$$\xi_1 - \xi_2 = 0, \quad \xi_2 - \xi_3 = 0$$

pravac kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$.

7.15. Teorem. *Skup svih rješenja homogenog sistema jednadžbi*

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= 0\,,\\ \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= 0\,,\\ &\cdots\\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= 0\end{aligned}$$

je vektorski potprostor u $\mathbb{R}^n$*.*

DOKAZ. Označimo li s $a_1, \ldots, a_n$ stupce matrice sistema A, onda homogeni sistem jednadžbi možemo zapisati kao

$$Ax = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = 0.$$

Za dva rješenja x i y iz svojstva linearnosti (5.7) slijedi

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0 \quad \text{i} \quad A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda 0 = 0.$$

Znači da je skup svih rješenja zatvoren za zbrajanje i množenje skalarom. $\square$

7.16. Dva važna pitanja o potprostorima u $\mathbb{R}^n$. Iz svega što smo u ovoj točki rekli nameću se dva pitanja:

(1) Da li je svaki potprostor u $\mathbb{R}^n$ *linearna ljuska* $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ *za neke vektore* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ *?*

(2) Da li je svaki potprostor u $\mathbb{R}^n$ *skup svih rješenja homogenog sistema jednadžbi* $\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = 0$ *za neke vektore* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ *?*

Na prvo pitanje odgovorit ćemo u sljedećem poglavlju, a na drugo u poglavlju o skalarnom produktu u $\mathbb{R}^n$[15].

[15] Na oba je pitanja odgovor potvrdan.

POGLAVLJE 3

Baza vektorskog prostora

U ovom poglavlju uvodimo pojam baze u $\mathbb{R}^n$ i pokazujemo da svaka baza ima n elemenata, a da li su dani vektori baza provjeravamo korištenjem elementarnih transformacija. Uvodimo pojam linearno nezavisnog skupa vektora u $\mathbb{R}^n$ i dokazujemo da se svaki linearno nezavisni skup može nadopuniti do baze. Zatim definiramo konačno dimenzionalne vektorske prostore i pokazujemo da navedena svojstva baze vrijede i općenito. Posebno je važna posljedica razmatranja općih vektorskih prostora da je svaki realni n-dimenzionalni vektorski prostor izomorfan $\mathbb{R}^n$.

1. Baze u $\mathbb{R}^n$

1.1. Kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Skup vektora u $\mathbb{R}^n$ oblika

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

zovemo *kanonskom bazom vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$. Primijetimo da vektor kanonske baze e_j ima j-tu koordinatu 1, a sve ostale 0. Na primjer, skup vektora

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je kanonska baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Svaki vektor x u $\mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

Koeficijente $\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_n$ u toj linearnoj kombinaciji – zapravo koordinate od x – zovemo još i *koordinatama vektora x u kanonskoj bazi.* Kraće kažemo da smo vektor x *prikazali* ili *zapisali u kanonskoj bazi*, pri čemu je ξ_1 *prva koordinata vektora x u kanonskoj bazi, ξ_2 druga koordinata*, itd. Na primjer, vektor x u $\mathbb{R}^3$ možemo zapisati u kanonskoj bazi kao

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Primjer.

$$a=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=e_1-2e_2+0e_3+2e_4,$$

pa je u kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3, e_4 od $\mathbb{R}^4$ prva koordinata vektora a jednaka 1, druga koordinata je -2, treća koordinata je 0 i četvrta koordinata je 2.

1.3. Zadatak. Prikažite vektor

$$a=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{R}^5$.

1.4. Jedinična matrica. Kvadratnu $n\times n$ matricu

$$I=(e_1,\dots,e_n)$$

čiji su stupci $e_1,\dots,e_n$ elementi kanonske baze prostora $\mathbb{R}^n$ zovemo *jediničnom matricom* i obično je označavamo s I. Na primjer,

$$1=I,\qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I,\qquad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I,$$

gdje je redom I jedinična matrica tipa 1×1, tipa 2×2 i tipa 4×4.

1.5. Pitanje. Da li su

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad \text{i}\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

jedinične matrice? DA NE

1.6. Definicija baze u $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je skup vektora $a_1, a_2, \dots, a_s$ *baza od* $\mathbb{R}^n$ ili *baza u* $\mathbb{R}^n$ ako svaki vektor x u $\mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_s a_s,\quad \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s\in\mathbb{R}.$$

Pokazat ćemo (teoremi 1.12 i 3.15) da svaka baza u $\mathbb{R}^n$ ima n elemenata, tj. da mora biti $s=n$.

Očito kanonska baza $e_1, e_2, \dots, e_n$ od $\mathbb{R}^n$ jest baza u $\mathbb{R}^n$.

1.7. Napomena. Možda nije na odmet posebno istaknuti da se u definiciji baze zahtijevaju **dva** svojstva: 1) da za svaki vektor x u $\mathbb{R}^n$ **postoji** prikaz u obliku linearne kombinacije od $a_1, \dots, a_s$ i 2) da je za svaki vektor x takav prikaz **jedinstven**. Ako vrijedi prva tvrdnja, onda obično kažemo da vektori $a_1, \dots, a_s$ *razapinju* $\mathbb{R}^n$.

1.8. Primjer. Vektori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

čine bazu u $\mathbb{R}^2$. Naime, za vektor $x \in \mathbb{R}^2$ uvjet $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Kao što smo već u točki 2.5.9 primijetili, zapisano po koordinatama to je sistem jednadžbi

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \xi_1, \qquad \lambda_1 - \lambda_2 = \xi_2$$

s nepoznanicama λ_1 i λ_2 koji za svaki izbor koordinata ξ_1 i ξ_2 ima jedinstveno rješenje

$$\lambda_1 = (\xi_1 + \xi_2)/2, \qquad \lambda_2 = (\xi_1 - \xi_2)/2.$$

Znači da svaki vektor x možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2. Tako, na primjer, imamo jedinstveni zapis vektora $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2} a_1 + \frac{5}{2} a_2$.

1.9. Baze u $\mathbb{R}^n$ i sistemi jednadžbi. Točka 2.5.9 i prethodni primjer pokazuju da općenito možemo provjeriti da li je skup vektora $a_1, a_2, \dots, a_s$ baza u $\mathbb{R}^n$ provjeravajući da li sistem jednadžbi

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s = x$$

sa zadanom matricom sistema $A = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ i desnom stranom x ima jedinstveno rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$.

1.10. Zadatak. Pokažite da su vektori $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ baza u $\mathbb{R}^2$.

1.11. Primjer. Da bismo pokazali da vektori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

čine bazu u $\mathbb{R}^3$ trebamo pokazati da za svaki vektor x iz $\mathbb{R}^3$ sistem jednadžbi

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x$$

s nepoznanicama $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i desnom stranom x ima jedinstveno rješenje. Taj ćemo sistem rješavati Gaussovom metodom. Budući da nas ne zanima što je rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, već samo tvrdnja da postoji jedinstveno rješenje za svaku desnu stranu x, to nećemo računati desnu stranu sistema — pisat ćemo samo zvjezdice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & * \\ 1 & 2 & -1 & * \\ -1 & 1 & 1 & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & * \\ 0 & 3 & -3 & * \\ -1 & 1 & 1 & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & * \\ 0 & 3 & -3 & * \\ 0 & 0 & 3 & * \end{pmatrix}.$$

Sada je jasno da primjenom obratnog hoda u Gaussovoj metodi dobivamo jedinstveno rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ za svaku desnu stranu x.

Da smo u ovom primjeru nastavili postupak eliminacijom elemenata u gornjem trokutu matrice sistema, kao rezultat bismo dobili

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix},$$

odakle je sasvim očito da početni sistem jednadžbi ima jedinstveno rješenje.

Valja primijetiti da je bilo sasvim suvišno u Gaussovim eliminacijama pisati zvjezdice umjesto desne strane x sistema — dovoljno je bilo vidjeti da elementarnim transformacijama na jednadžbama matricu početnog sistema možemo prevesti u matricu čiji su stupci elementi kanonske baze

$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto \ldots \mapsto (e_1, e_2, e_3).$$

1.12. Teorem o bazi u $\mathbb{R}^n$ i elementarnim transformacijama redaka matrice. *Neka je $n \times p$ matrica $(v_1', \ldots, v_p')$ dobivena elementarnim transformacijama redaka iz matrice $(v_1, \ldots, v_p)$. Tada su stupci matrice $(v_1', \ldots, v_p')$ baza od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako su stupci matrice $(v_1, \ldots, v_p)$ baza od $\mathbb{R}^n$.*

Štoviše, ako su stupci $v_1, \ldots, v_p$ baza od $\mathbb{R}^n$, onda je $p = n$ i postoji niz elementarnih transformacija redaka koji matricu $(v_1, \ldots, v_p)$ prevodi u jediničnu matricu $I = (e_1, \ldots, e_n)$.

Dokaz. Dokaz teorema je u suštini ponavljanje argumenata iz prethodnog primjera: Po definiciji 1.6 vektori $v_1, \ldots, v_p$ čine bazu od $\mathbb{R}^n$ ako za svaki vektor x sistem jednadžbi

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = x \tag{1.1}$$

s nepoznanicama $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ i desnom stranom x ima jedinstveno rješenje. Ako je

$$(v_1, \ldots, v_p) \mapsto (v_1', \ldots, v_p')$$

elementarna transformacija redaka $n \times p$ matrice, onda za proširenu matricu sistema (1.1) imamo pripadnu elementarnu transformaciju

$$(v_1, \ldots, v_p, x) \mapsto (v_1', \ldots, v_p', x')$$

i novi sistem jednadžbi

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_p v_p' = x' \tag{1.2}$$

ima isti skup rješenja. Posebno, sistem (1.2) ima jedinstveni rješenje za svaki x'. Budući da je elementarno preslikavanje[1] $x \mapsto x'$ bijekcija na $\mathbb{R}^n$, to sistem (1.2) ima jedinstveni rješenje za svaku desnu stranu i vektori $(v'_1, \dots, v'_p)$ su baza od $\mathbb{R}^n$.

Ako su vektori $v'_1, \dots, v'_p$ baza od $\mathbb{R}^n$, onda je prema upravo dokazanoj tvrdnji i $v_1, \dots, v_p$ baza od $\mathbb{R}^n$ jer postoji inverzna elementarna transformacija redaka koja matricu $(v'_1, \dots, v'_p)$ prevodi u matricu $(v_1, \dots, v_p)$.

Dokažimo[2] da je $p = n$ ako su vektori $v_1, \dots, v_p$ baza od $\mathbb{R}^n$. Naime,

$$0 = 0v_1 + \cdots + 0v_p$$

i da je $p > n$ imali bismo, prema teoremu 1.4.3, neko netrivijalno rješenje $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sistema

$$0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p\,,$$

suprotno pretpostavci o jedinstvenosti zapisa svakog vektora u bazi $v_1, \dots, v_p$. S druge strane, da je $p < n$, svođenjem sistema jednadžbi (1.1) Gaussovom metodom na stepenastu formu, recimo

$$\lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_p v'_p = x', \tag{1.3}$$

dobili bismo u matrici sistema (1.3) zadnji redak jednak nuli jer ima više jednadžbi nego nepoznanica. No tada za $x' = e_n$ sistem (1.3) ne bi imao rješenja, suprotno već dokazanoj tvrdnji da $v'_1, \dots, v'_p$ mora biti baza od $\mathbb{R}^n$. Znači da je $p = n$.

Neka su vektori $v_1, \dots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$. Svođenjem $n \times n$ sistema jednadžbi (1.1) Gaussovom metodom na stepenastu formu, recimo (1.3), dobivamo gornju trokutastu matricu sistema kojoj je svaki element na dijagonali različit od nule. Naime, da je u postupku svođenja na stepenastu formu neki od elemenata dijagonale bio nula, onda bi na kraju postupka imali zadnji redak nula – što je nemoguće. No trokutasti sistem kojemu je svaki element na dijagonali različit od nule obratnim hodom Gaussove metode možemo svesti na sistem kojemu je matrica sistema jedinična matrica

$$I = (e_1, \dots, e_n).$$

□

1.13. Pitanje. Može li $\mathbb{R}^7$ imati bazu od devet elemenata ili $\mathbb{R}^9$ bazu od sedam elemenata? DA NE

1.14. Primjedba. Iz zadnjeg dijela dokaza vidimo da za vektore $v_1, \dots, v_n$ koji nisu baza svođenjem matrice na gornju stepenastu formu Gaussovim eliminacijama dobivamo matricu $(v'_1, \dots, v'_n)$ kojoj je barem zadnji redak nula. *Znači da elementarnim transformacijama na recima za proizvoljnu*

[1] vidi točku 2.4.23 u prethodnom poglavlju

[2] Općenitiju tvrdnju teorema 3.15 dokazujemo na sličan način.

$n \times n$ matricu možemo ustanoviti jesu li stupci matrice baza od $\mathbb{R}^n$ ili ne. Na primjer, elementarnim transformacijama na recima dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa zaključujemo da stupci početne matrice nisu baza u $\mathbb{R}^3$.

1.15. Zadatak. Dokažite da vektori v_1, v_2, v_3,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

čine bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

1.16. Zadatak. Dokažite da vektori v_1, v_2, v_3,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nisu baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

1.17. Teorem o bazi u $\mathbb{R}^n$ i elementarnim transformacijama stupaca matrice. *Neka je niz vektora $v'_1, \dots, v'_n$ u $\mathbb{R}^n$ dobiven elementarnim transformacijama iz niza $v_1, \dots, v_n$. Tada je $v'_1, \dots, v'_n$ baza od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $v_1, \dots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$.*

Štoviše, ako je $v_1, \dots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$, onda postoji niz elementarnih transformacija koji tu bazu prevodi u kanonsku bazu $e_1, \dots, e_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da su vektori $v_1, \dots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$ i da smo proveli elementarnu transformaciju oblika

$$v'_1 = v_1 + \mu v_2,\ v'_2 = v_2, \dots,\ v'_n = v_n\,.$$

Tada za proizvoljan vektor v iz $\mathbb{R}^n$ imamo jedinstveni zapis

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

i vrijedi

$$\begin{aligned} v &= \lambda'_1 v'_1 + \lambda'_2 v'_2 + \dots + \lambda'_n v'_n \\ &= \lambda'_1 v_1 + (\lambda'_1 \mu + \lambda'_2) v_2 + \lambda'_3 v_3 + \dots + \lambda'_n v_n \end{aligned} \tag{1.4}$$

za

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \quad \lambda'_1 \mu + \lambda'_2 = \lambda_2, \quad \lambda'_n = \lambda_n\,. \tag{1.5}$$

Relacije (1.5) možemo shvatiti kao sistem jednadžbi s nepoznanicama λ'_1, λ'_2, …, λ'_n i zadanom desnom stranom $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. No taj sistem ima jedinstveno rješenje

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 - \lambda_1 \mu, \quad \lambda'_n = \lambda_n\,,$$

pa zato i vektor v ima jedinstveni prikaz (1.4). Znači da je $v'_1, \ldots, v'_n$ baza od $\mathbb{R}^n$.

Na sličan način dokazujemo i za druge elementarne transformacije da je $v'_1, \ldots, v'_n$ baza ako je $v_1, \ldots, v_n$ baza. Budući da svaka elementarna transformacija ima inverznu, to su vektori $v_1, \ldots, v_n$ dobiveni elementarnim transformacijama iz niza $v'_1, \ldots, v'_n$, pa je $v_1, \ldots, v_n$ baza ako je $v'_1, \ldots, v'_n$ baza.

Neka je $v_1, \ldots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$. Primjenom niza elementarnih transformacija na stupcima $n \times n$ matricu $(v_1, \ldots, v_n)$ možemo svesti na donju trokutastu matricu $(v'_1, \ldots, v'_n)$ kojoj su svi dijagonalni elementi različiti od nule. Naime, u suprotnom bi na kraju procesa stepenasta matrica imala zadnji stupac nula, odnosno $v'_n = 0$, pa bi za svaki $\lambda \neq 0$ imali

$$0 = 0v'_1 + \cdots + 0v'_{n-1} + \lambda 0.$$

No to je u suprotnosti s već dokazanom tvrdnjom da je $v'_1, \ldots, v'_n$ baza i da, shodno tome, svaki vektor u toj bazi ima jedinstveni zapis.

Iz donje trokutaste matrice $(v'_1, \ldots, v'_n)$ kojoj je svaki element na dijagonali različit od nule lako je dobiti jediničnu matricu

$$I = (e_1, \ldots, e_n)$$

primjenom elementarnih transformacija stupaca: prvo "eliminiramo" elemente u zadnjem retku koristeći zadnji stupac, zatim elemente u predzadnjem retku koristeći predzadnji stupac, itd. $\square$

1.18. Primjer. Da vektori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

čine bazu u $\mathbb{R}^3$ možemo utvrditi i korištenjem elementarnih transformacija na stupcima matrice, pri čemu prvo dobijemo donju trokutastu matricu koja na dijagonali ima elemente različite od nule:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom trokutastu matricu svedemo na jediničnu matricu:

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

1.19. Primjedba. Iz zadnjeg dijela dokaza teorema 1.17 vidimo da za vektore v_1, $\ldots$, v_n koji nisu baza svođenjem matrice na gornju stepenastu formu elementarnim transformacijama stupaca dobivamo matricu $(v'_1, \ldots, v'_n)$ kojoj je barem zadnji stupac nula. *Znači da elementarnim transformacijama za proizvoljnu $n \times n$ matricu možemo ustanoviti jesu li stupci* *matrice baza od $\mathbb{R}^n$ ili ne.* Na primjer, elementarnim transformacijama na stupcima dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

pa zaključujemo da stupci početne matrice nisu baza u $\mathbb{R}^3$.

1.20. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije stupaca matrice utvrdite jesu li $v_1, \ldots, v_4$ baza u $\mathbb{R}^4$ za vektore

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

2. Linearna nezavisnost vektora u $\mathbb{R}^n$

2.1. Definicija linearne nezavisnosti vektora u $\mathbb{R}^n$. *Kažemo da su vektori $v_1, \ldots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$ linearno nezavisni ako je samo trivijalna kombinacija tih vektora jednaka nuli, tj. ako*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

povlači

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0.$$

Kažemo da su vektori $v_1, \ldots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$ linearno zavisni ako nisu linearno nezavisni.

2.2. Linearna nezavisnost u $\mathbb{R}^n$ i homogeni sistemi jednadžbi. Svojstvo linearne nezavisnosti vektora u $\mathbb{R}^n$ možemo izreći i u terminima sistema jednadžbi: *vektori $v_1, \ldots, v_p$ su linearno nezavisni ako i samo ako homogeni $n \times p$ sistem jednadžbi*

$$\xi_1 v_1 + \cdots + \xi_p v_p = 0 \tag{2.1}$$

ima jedinstveno rješenja $\xi_1 = \cdots = \xi_p = 0$.

2.3. Primjer. Prema prethodnoj primjedbi pitanje da li su vektori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni svodi se na pitanje da li homogeni sistem jednadžbi

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ima **jedinstveno** rješenje $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$? Sistem rješavamo Gaussovom metodom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa na kraju zaključujemo da homogeni sistem zaista ima jedinstveno rješenje $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Primijetimo da je u ovom postupku bilo suvišno pisati desnu stranu homogenog sistema i da odgovor ovisi samo o matrici sistema (v_1, v_2, v_3) na kojoj smo izvodili elementarne transformacije po recima.

2.4. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije redaka matrice utvrdite jesu li vektori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni?

2.5. Pitanje. Očito su stupci matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni. Možemo li odavle zaključiti da su onda linearno nezavisni i stupci matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

za sve $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ u $\mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$?

2.6. Neposredne posljedice definicije linearne nezavisnosti. Vezano uz definiciju primijetimo sljedeće:

1. Ako je $v \neq 0$, onda je v linearno nezavisan. Naime, $\lambda v = 0$ za netrivijalnu linearnu kombinaciju, tj. $\lambda \neq 0$, daje

$$v = 1 \cdot v = (\tfrac{1}{\lambda}\lambda)v = \tfrac{1}{\lambda}(\lambda v) = \tfrac{1}{\lambda}0 = 0,$$

što je suprotno pretpostavci $v \neq 0$.

2. Ako su vektori $v_1, \ldots, v_m$ linearno nezavisni, onda onda su i vektori $v_1, \ldots, v_p$ linearno nezavisni za $p < m$. Treba samo provjeriti da

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

povlači $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$. No iz gornje jednakosti "dodavanjem nule" dobivamo

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + 0 v_{p+1} + \cdots + 0 v_m = 0,$$

pa sad iz pretpostavke da su vektori $v_1, \ldots, v_m$ linearno nezavisni slijedi da su svi koeficijenti u kombinaciji nula, posebno $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$.

3. Vektori $0, v_1, \ldots, v_m$ nisu linearno nezavisni. Naime, imamo netrivijalnu kombinaciju

$$1 \cdot 0 + 0 v_1 + \cdots + 0 v_m = 0.$$

Posebno, ako su $v_1, \ldots, v_m$ linearno nezavisni, onda je $v_j \neq 0$ za sve $j = 1, \ldots, m$.

2.7. Zadatak. *Dokažite da su vektori v_1 i v_2 linearno nezavisni ako i samo ako nisu proporcionalni.*

2.8. Pitanje. Da li su vektori $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}3\\-3\end{smallmatrix}\right)$ linearno nezavisni? DA NE

2.9. Pitanje. Da li su vektori $v_1, v_2, 0$ linearno nezavisni ako su vektori v_1, v_2 linearno nezavisni? DA NE

2.10. Pitanje. Da li su vektori v_3, v_4 linearno nezavisni ako su vektori v_1, v_2, v_3, v_4 linearno nezavisni? DA NE

2.11. Pitanje. Da li su vektori v_1, v_2, v_3, v_4 linearno nezavisni ako su vektori v_3, v_4 linearno nezavisni? DA NE

2.12. Lema o linearnoj nezavisnosti vektora i elementarnim transformacijama. *Neka je niz vektora $v'_1, \ldots, v'_p$ u $\mathbb{R}^n$ dobiven elementarnim transformacijama iz niza $v_1, \ldots, v_p$. Tada je $v'_1, \ldots, v'_p$ linearno nezavisan ako i samo ako je $v_1, \ldots, v_p$ linearno nezavisan.*

DOKAZ. Pretpostavimo da su vektori $v_1, \ldots, v_p$ linearno nezavisni i da smo proveli elementarnu transformaciju oblika

$$v'_1 = v_1 + \mu v_2,\ v'_2 = v_2, \ldots,\ v'_p = v_p.$$

Neka je

$$\lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_p v'_p = 0,$$

odnosno

$$\lambda_1 v_1 + (\lambda_1 \mu + \lambda_2) v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + \lambda_p v_p = 0.$$

Sada linearna nezavisnost $v_1, \ldots, v_p$ povlači

$$\lambda_1 = \lambda_1 \mu + \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

No tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, što dokazuje linearnu nezavisnost vektora $v'_1, \ldots, v'_p$. Na sličan način i za druge elementarne transformacije dokazujemo da linearna nezavisnost vektora $v_1, \dots, v_p$ povlači linearnu nezavisnost vektora $v'_1, \dots, v'_p$. Budući da svaka elementarna transformacija ima inverznu, to su vektori $v_1, \dots, v_p$ dobiveni elementarnim transformacijama iz niza $v'_1, \dots, v'_p$, pa linearna nezavisnost $v'_1, \dots, v'_p$ povlači linearnu nezavisnost $v_1, \dots, v_p$. $\square$

2.13. Primjer. Napišimo vektore v_1, v_2, v_3 iz primjera 2.3 kao stupce u matrici i provedimo elementarne transformacije na stupcima

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Za vektore stupce na desnoj strani lako je ustanoviti da, pri utvrđivanju njihove linearne nezavisnosti, odgovarajući sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0, \\ &2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \\ &\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ &\lambda_1 + 0\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

ima jedinstveno trivijalno rješenje $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Znači da su vektori stupci na desnoj strani linearno nezavisni. Iz leme 2.12 slijedi da su vektori v_1, v_2, v_3 u našem primjeru 2.3 linearno nezavisni.

Postupak nismo trebali prekinuti kod homogenog sistema jednadžbi (2.2), već smo mogli nastavit s elementarnim transformacijama stupaca svodeći matricu na reduciranu donju stepenastu formu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4/3 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 4/3 & -2 \end{pmatrix}$$

dobivši na kraju sistem

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \tfrac{1}{3}\lambda_1 + \tfrac{4}{3}\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0.$$

2.14. Provjera nezavisnosti svođenjem na stepenastu matricu. Gornji nam primjer pokazuje kako i općenito možemo provjeriti linearnu nezavisnost vektora $v_1, \dots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$: elementarnim transformacijama stupaca $n \times p$ matricu $(v_1, \dots, v_p)$ svedemo na donju stepenastu matricu

$$(c_1, \dots, c_p).$$

Ako matrica $(c_1, \dots, c_p)$ ima nul-stupac, onda vektori nisu linearno nezavisni, pa prema lemi 2.12 nisu nezavisni ni vektori $v_1, \dots, v_p$. Ako su pak svi vektori u donjoj stepenastoj matrici $(c_1, \dots, c_p)$ različiti od nule, onda imaju ugaone elemente u recima $i_1, \dots, i_p$. Tada u sistemu jednadžbi

$$\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_p c_p = 0 \tag{2.3}$$

prvo gledamo koordinatu na i_1-tom mjestu. Tu vektor c_1 ima ugaoni element $c_{i_1 1} \neq 0$, a ostalim vektorima $c_2, \dots, c_p$ je i_1-ta koordinata nula. Znači da imamo jednadžbu

$$\lambda_1 c_{i_1 1} = 0$$

koja ima jedinstveno rješenje $\lambda_1 = 0$. Tada sistem (2.3) postaje

$$\lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_p c_p = 0.$$

U tom se sistemu ne javlja vektor c_1, pa gledamo koordinatu na i_2-tom mjestu. Tu vektor c_2 ima ugaoni element $c_{i_2 2} \neq 0$, a ostalim vektorima $c_3, \dots, c_p$ je i_2-ta koordinata nula. Znači da imamo jednadžbu

$$\lambda_2 c_{i_2 2} = 0$$

koja ima jedinstveno rješenje $\lambda_2 = 0$. Nastavljajući postupak zaključujemo da sistem (2.3) ima samo trivijalno rješenje. Znači da su vektori $c_1, \dots, c_p$ linearno nezavisni, a prema lemi 2.12 su onda nezavisni i vektori $v_1, \dots, v_p$.

2.15. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije stupaca matrice utvrdite jesu li vektori iz zadatka 2.4 linearno nezavisni?

2.16. Druga (ekvivalentna) definicija baze prostora $\mathbb{R}^n$. *Skup vektora $v_1, \dots, v_s$ je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako*

(1) *vektori $v_1, \dots, v_s$ razapinju $\mathbb{R}^n$ i*
(2) *$v_1, \dots, v_s$ je linearno nezavisan skup.*

Dokaz. Ako vrijedi (1), onda svaki vektor $v \in \mathbb{R}^n$ možemo zapisati kao neku linearnu kombinaciju

$$v = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_s v_s,$$

a zbog pretpostavke (2) je taj prikaz jedinstven. Naime,

$$v = \eta_1 v_1 + \cdots + \eta_s v_s = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_s v_s$$

povlači

$$(\eta_1 - \xi_1) v_1 + \cdots + (\eta_s - \xi_s) v_s = 0,$$

pa pretpostavka da su vektori linearno nezavisni daje $\eta_1 = \xi_1, \dots, \eta_s = \xi_s$.

Obrat. Po definiciji baza razapinje $\mathbb{R}^n$. No baza je i linearno nezavisan skup jer iz relacija

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0 \quad \text{i} \quad 0 v_1 + \cdots + 0 v_s = 0$$

i jedinstvenosti zapisa vektora 0 u bazi slijedi $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_s = 0$. $\square$

2.17. Nadopunjavanje nezavisnog skupa u $\mathbb{R}^n$ do baze. *Ako je $v_1, \dots, v_k$, $k < n$, linearno nezavisan skup vektora u $\mathbb{R}^n$, onda postoji baza oblika*

$$v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n.$$

Obično kažemo da smo tu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ dobili nadopunjavanjem linearno nezavisnog skupa $v_1, \dots, v_k$.

Zadani linearno nezavisan skup vektora $v_1, \dots, v_k$ u $\mathbb{R}^n$ možemo nadopuniti do baze tako da elementarnim transformacijama matricu $(v_1, \dots, v_k)$ prevedemo u donju stepenastu matricu $(v_1', \dots, v_k')$ kojoj su ugaoni elementi u recima $j_1, \dots, j_k$. Ako je

$$\{j_1, \dots, j_k\} \cup \{i_1, \dots, i_{n-k}\} = \{1, \dots, n\},$$

onda umetanjem $n - k$ elementa kanonske kanonske baze $e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}}$ u tu matricu dobivamo donju trokutastu matricu kojoj su svi dijagonalni elementi različiti od nule. Na primjer, ako je donja stepenasta matrica $(v_1', \dots, v_k')$ oblika

$$(v_1', v_2', v_3') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

s ugaonim elementima u recima 1, 3 i 4, onda dodavanjem vektora $e_2, e_5 \in \mathbb{R}^5$ dobivamo

$$(v_1', e_2, v_2', v_3', e_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektori dobivene donje trokutaste matrice

$$v_1', \dots, v_k', e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}}$$

čine bazu od $\mathbb{R}^n$. Budući da svaka elementarna transformacija ima inverz, te vektore možemo prevesti u niz

$$v_1, \dots, v_k, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}} \tag{2.4}$$

izvodeći elementarne transformacije samo na prvih k vektora. Prema lemi 2.12 vektori 2.4 čine bazu od $\mathbb{R}^n$.

2.18. Primjer. Budući da za vektore v_1, v_2, v_3 iz primjera 2.3 i 2.13 imamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

i da dodavanjem vektora kanonske baze e_4 dobivamo donju trokutastu matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

to je v_1, v_2, v_3, e_4 baza od $\mathbb{R}^4$

2.19. Pitanje. Neka je $v = (0,0,2,2,2) \in \mathbb{R}^5$. Da li je e_1, e_2, v, e_4, e_5 baza u $\mathbb{R}^5$? DA NE

2.20. Zadatak. Nadopunite do baze od $\mathbb{R}^3$ linearno nezavisne vektore

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Konačno dimenzionalni vektorski prostori

Osim baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ nama će biti važan i pojam baze vektorskog potprostora prostora $\mathbb{R}^n$. Budući da pojmovi i razmatranja koja ćemo provoditi ne ovise o "prirodi" vektora, već samo o svojstvima operacija zbrajanja i množenja skalarom[3], to je korisno uvesti opći pojam vektorskog prostora.

3.1. Definicija vektorskog prostora. Kažemo da je skup V *vektorski ili linearni prostor nad poljem realnih brojeva* $\mathbb{R}$ ako na V imamo zadanu binarnu operaciju *zbrajanja*

$$+\colon V \times V \to V, \qquad (f,g) \mapsto f+g,$$

i operaciju *množenja skalarom*

$$\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V, \qquad (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f,$$

za koje vrijede sljedeća svojstva za sve $f, g, h \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(1) $(f+g)+h = f+(g+h)$ (*asocijativnost zbrajanja*),
(2) postoji element $0 \in V$ takav da je
$f+0 = 0+f = f$ (*neutralni element za zbrajanje*),
(3) za svaki f postoji element $-f \in V$ takav da je
$f+(-f) = (-f)+f = 0$ (*suprotni element za zbrajanje*),
(4) $f+g = g+f$ (*komutativnost zbrajanja*).
(5) $1 \cdot f = f$,
(6) $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f$ (*kvazi-asocijativnost*),

---

[3] Kao primjer dokaza koji ovisi o "prirodi" vektora možemo uzeti dokaz o nadopunjavanju linearno nezavisnog skupa u $\mathbb{R}^n$ do baze u točki 2.17 gdje se bitno koristi činjenica da su vektori $v_1, \dots, v_k$ n-torke realnih brojeva. S druge strane u točki 4.6 dokazujemo općenito da u svakom konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru svaki linearno nezavisan skup vektora možemo nadopuniti do baze.

(7) $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g, \qquad (\lambda+\mu)\cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$
(*distributivnost množenja prema zbrajanju*).

Elemente vektorskog prostora zovemo *vektorima*, a brojeve *skalarima*. Kao i u slučaju n-torki brojeva, vektore ćemo označavati malim latinskim slovima, a skalare malim grčkim slovima. U daljnjem (uglavnom) nećemo pisati množenje vektora skalarom kao $\lambda \cdot f$, već uobičajeno λf. Množenje skalarom uvijek pišemo tako da je vektor na desnoj strani, pa $0v$ nedvosmisleno znači da vektor v množimo skalarom 0, a $\lambda 0$ znači da vektor 0 množimo skalarom λ. Relacija $0v = 0$ znači da vektor v pomnožen skalarom 0 daje vektor 0.

3.2. Svojstva zbrajanja i množenja skalarom. U paragrafu 2.2 prethodnog poglavlja nabrojili smo niz svojstava operacija zbrajanja i množenja skalarom i primijetili da s vektorima računamo "kao s brojevima". Sva navedena svojstva vrijede i u slučaju općenitog vektorskog prostora, premda ih nismo naveli u definiciji. Tako, na primjer, u vektorskom prostoru V vrijedi

$$0a = 0, \quad (-1)a = -a \quad \text{i} \quad \lambda 0 = 0$$

za svaki vektor a u V i svaki skalar λ u $\mathbb{R}$. Da bismo, na primjer, dokazali prvu tvrdnju $0a = 0$ stavimo $b = 0a$. Zbog svojstva skalara 0 imamo $0+0=0$ i, koristeći distributivnost (7), imamo $0a = (0+0)a = 0a + 0a$, tj. $b = b + b$. Dodamo li objema stranama vektor $-b$, koji prema (3) postoji, dobivamo $0 = b + (-b) = (b+b) + (-b) = b + (b + (-b)) = b + 0 = b$ (ovdje u prvoj jednakosti koristimo svojstvo suprotnog vektora (3), u trećoj asocijativnost zbrajanja (1), u četvrtoj ponovo (3) i u petoj jednakosti (2)). Dakle $b = 0$.

3.3. Zadatak. Dokažite da je u vektorskom prostoru neutralni element za zbrajanje jedinstven[4].

3.4. Skup izvodnica vektorskog prostora. Za skup vektora $S \subset V$ kažemo da *razapinje vektorski prostor* V, ili da je S *skup izvodnica* ili *skup generatora* vektorskog prostora V, ako je svaki vektor $v \neq 0$ iz V linearna kombinacija nekih vektora $v_1, \dots, v_n$ iz skupa S. Još ćemo reći da skup S *razapinje vektorski prostor* V, ili da je V *linearna ljuska skupa* S. Po definiciji je prazan skup $\emptyset$ skup izvodnica nul-prostora[5].

3.5. Definicija linearno nezavisnog skupa vektora. Neka je V vektorski prostor. Kažemo da je skup vektora $S \subset V$ linearno nezavisan ako je za proizvoljan konačan podskup vektora

$$\{v_1, \dots, v_p\} \subset S$$

[4] Uputa: da je $0'$ neki drugi neutralni element, imali bismo $0' = 0' + 0 = 0$.

[5] "Opravdanje" za takav dogovor je da prazan skup $\emptyset$ zadovoljava definiciju skupa izvodnica za nul-prostor 0 jer u nul-prostoru nema vektora $v \neq 0$ kojeg bi trebali napisati kao linearnu kombinaciju nekih vektora iz $\emptyset$.

samo trivijalna kombinacija tih vektora jednaka nuli, tj. ako

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

povlači

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0.$$

Često kažemo da su vektori $v_1, \ldots, v_p$ linearno nezavisni ako je skup vektora $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linearno nezavisan.

3.6. Primijetimo da je svaki podskup linearno nezavisnog skupa linearno nezavisan skup.

3.7. Definicija baze vektorskog prostora. Za skup vektora $S \subset V$ kažemo da je *baza vektorskog prostora* V ako

(1) skup S razapinje V i ako je
(2) S linearno nezavisan skup.

Prazan skup $\emptyset$ je baza nul-prostora $0 = \{0\}$.

3.8. Definicija konačno dimenzionalanog vektorskog prostora. Kažemo da je vektorski prostor V *konačno dimenzionalan* ako ima neku konačnu bazu[6] $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ako V nije konačno dimenzionalan, onda kažemo da je *beskonačno dimenzionalan vektorski prostor.*

3.9. Teorem. *Neka je vektorski prostor* V *razapet vektorima* $b_1, \ldots, b_m$ *i neka su* $a_1, \ldots, a_p$ *linearno nezavisni vektori u* V*. Tada je*

$$m \geq p.$$

Dokaz. Ako je V razapet vektorima $b_1, \ldots, b_m$, onda su svi vektori njihove linearne kombinacije, pa posebno i vektori $a_1, \ldots, a_p$. Neka su to linearne kombinacije

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_{11} b_1 + \cdots + \alpha_{m1} b_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} b_i, \\
a_2 &= \alpha_{12} b_1 + \cdots + \alpha_{m2} b_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i2} b_i, \\
&\vdots \\
a_p &= \alpha_{1p} b_1 + \cdots + \alpha_{mp} b_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ip} b_i
\end{aligned}$$

[6] Prazan skup $\emptyset$ je konačan skup s nula elemenata pa je nul-prostor 0 konačno dimenzionalan vektorski prostor.

za neke koeficijente α_{ij}. Pretpostavimo da je $m < p$. Tada prema teoremu 1.4.3 imamo neko netrivijalno rješenje $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ homogenog sistema od m jednadžbi

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \alpha_{ij} = 0, \qquad i = 1, \dots, m,$$

a onda i netrivijalnu linearnu kombinaciju

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_p a_p = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \alpha_{ij} \right) b_i = 0,$$

suprotno pretpostavci da su vektori $a_1, \dots, a_p$ linearno nezavisni. Znači da pretpostavka $m < p$ vodi do kontradikcije i da mora biti $m \geq p$. □

3.10. Teorem.

(1) *Ako vektori $b_1, \dots, b_m$ razapinju $\mathbb{R}^n$, onda je $m \geq n$.*
(2) *Ako su $a_1, \dots, a_p$ linearno nezavisni vektori u $\mathbb{R}^n$, onda je $p \leq n$.*

DOKAZ. Obje su tvrdnje posljedica teorema 3.10 i činjenice da kanonska baza u $\mathbb{R}^n$ ima n elemenata. Naime, u prvom slučaju uspoređujemo m s brojem n nezavisnih vektora kanonske baze, a u drugom slučaju uspoređujemo p s brojem n vektora kanonske baze koji razapinju $\mathbb{R}^n$. □

3.11. Pitanje. Može li biti 7 linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^5$? DA NE

3.12. Pitanje. Može li biti 7 izvodnica u $\mathbb{R}^5$? DA NE

3.13. Pitanje. Može li biti 5 izvodnica u $\mathbb{R}^7$? DA NE

3.14. Pitanje. Može li biti 5 linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^7$? DA NE

3.15. Teorem. *Svake dvije baze u konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru imaju jednak broj elemenata.*

DOKAZ. Neka su $a_1, \dots, a_p$ i $b_1, \dots, b_m$ dvije baze vektorskog prostora V. Budući da je V razapet vektorima $b_1, \dots, b_m$ i da su $a_1, \dots, a_p$ linearno nezavisni vektori u V, to je prema teoremu 3.10 $m \geq p$. No budući da je V razapet vektorima $a_1, \dots, a_p$ i da su $b_1, \dots, b_m$ linearno nezavisni vektori u V, to je prema teoremu 3.10 $p \geq m$. Znači da je $p = m$. □

3.16. Definicija dimenzije vektorskog prostora. Broj elemenata baze konačno dimenzionalnog prostora V zovemo dimenzijom prostora i označavamo s $\dim V$. Ako je $\dim V = n$, onda još kažemo da je V n-*dimenzionalni* vektorski prostor. Nul-prostor 0 je 0-dimenzionalan vektorski prostor.

3.17. Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Iz teorema 3.15 i činjenice da kanonska baza od $\mathbb{R}^n$ ima n elemenata slijedi da je dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ jednaka n, tj.

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

3.18. Teorem. *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor i neka su $v_1, \dots, v_n$ vektori u V. Tada je ekvivalentno:*

(1) *$v_1, \dots, v_n$ razapinju V i*
(2) *$v_1, \dots, v_n$ su linearno nezavisan vektori.*

DOKAZ. (1) povlači (2): Neka su vektori $v_1, \dots, v_n$ izvodnice od V. Tada pretpostavka da ti vektori nisu linearno nezavisni vodi do kontradikcije: ako postoji netrivijalna linearna kombinacija

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

recimo da je $\lambda_1 \neq 0$, onda je

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n).$$

Izrazimo li proizvoljan vektor x kao linearnu kombinaciju izvodnica $v_1, v_2, \dots, v_n$ dobivamo

$$x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n = \xi_1 \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n) + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n.$$

Iz tog izraza vidimo da se vektor x može izraziti kao linearna kombinacija vektora $v_2, \dots, v_n$, pa slijedi da $n-1$ vektora razapinje V, suprotno tvrdnji teorema 3.10 da je broj izvodnica uvijek veći ili jednak broju n linearno nezavisnih vektora neke baze od V.

(2) povlači (1): Neka su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni. Tada pretpostavka da ti vektori nisu izvodnice od V vodi do kontradikcije: ako postoji vektor v u V koji nije linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_n$, onda su vektori

$$v, v_1, \dots, v_n$$

linearno nezavisni. Naime, ako je

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

onda mora biti $\lambda = 0$, jer bi u suprotnom imali da je v linearna kombinacija

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n.$$

No $\lambda = 0$ daje

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $v_1, \dots, v_n$ slijedi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Znači da imamo $n+1$ linearno nezavisnih vektora $v, v_1, \dots, v_n$, suprotno tvrdnji teorema 3.10 da je broj linearno nezavisnih vektora uvijek manji ili jednak broju n vektora neke baze koji su onda i izvodnice od V. □

4. Nadopunjavanje nezavisnog skupa do baze

Argumente iz dokaza prethodnog teorema 3.18 često koristimo u linearnoj algebri na razne načine. Tako malom izmjenom dokaza tvrdnje (1) povlači (2) dobivamo:

4.1. Redukcija skupa izvodnica do baze. *Neka je $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ skup izvodnice od V. Tada postoji podskup od S koji je baza od V.*

Dokaz. Ako je skup izvodnica S linearno nezavisan, onda je S baza od V i naša tvrdnja vrijedi. Ako skup S nije linearno nezavisan, onda postoji netrivijalna linearna kombinacija

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Ako je, recimo, $\lambda_1 \neq 0$, onda vektor v_1 možemo izraziti kao linearnu kombinaciju preostalih vektora $v_2, \dots, v_n$:

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n).$$

Izrazimo li proizvoljan vektor x kao linearnu kombinaciju izvodnica $v_1, \dots, v_n$ i u tu kombinaciju uvrstimo dobiveni izraz za v_1, onda za x imamo

$$x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n = \xi_1 \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n) + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n.$$

Iz tog izraza vidimo da se vektor x može izraziti kao linearna kombinacija preostalih vektora $v_2, \dots, v_n$. Znači da podskup $S \backslash \{v_1\} = \{v_2, \dots, v_n\}$ skupa S razapinje V. Ako je $S \backslash \{v_1\}$ linearno nezavisan skup, onda je to baza od V i naša tvrdnja vrijedi, a ako nije, onda nastavljamo opisani postupak i u konačno koraka dolazimo do baze koja je podskup od S. $\square$

4.2. Zadatak. Dokažite da vektori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

razapinju $\mathbb{R}^3$ i reducirajte taj skup do baze od $\mathbb{R}^3$.

4.3. Konačno generirani vektorski prostori. Ako vektorski prostor V ima konačan skup izvodnica, onda kažemo da je V *konačno generirani vektorski prostor*. Iz prethodne točke 4.1 slijedi *da je svaki konačno generirani vektorski prostor konačno dimenzionalan.*

4.4. Primjedbe. Slijedimo li postupak opisan u točki 4.1, za zadani skup izvodnica $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorskog prostora V možemo u konačno koraka naći podskup koji je baza od V — često kažemo da *skup izvodnica $v_1, \dots, v_n$ reduciramo do baze izbacivanjem linearno zavisnih elemenata v_j.* Pritom u svakom koraku trebamo utvrditi da li je dobiveni skup linearno nezavisan i, ako nije, trebamo naći vektor koji je linearna kombinacija preostalih vektora. U slučaju $V = \mathbb{R}^n$ to možemo utvrditi koristeći elementarne transformacije niza vektora.

Koristeći tvrdnju 4.1 na drugi način možemo dokazati da (1) povlači (2) u teoremu 3.18. Naime, da izvodnice $v_1, \dots, v_n$ n-dimenzionalnog prostora V nisu linearno nezavisne, njihovom redukcijom dobili bismo bazu koja ima manje od n elemenata, suprotno tvrdnji teorema 3.15 da svaka baza u V ima n elemenata.

Malom izmjenom dokaza tvrdnje (2) povlači (1) teorema 3.18 dobivamo:

4.5. Lema. *Neka je S linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V. Ako S ne razapinje V, onda postoji vektor v u V takav da je*

$$S \cup \{v\}$$

linearno nezavisan skup.

Dokaz. Budući da S ne razapinje V, to postoji vektor v koji nije linearna kombinacija elemenata iz S. Tvrdimo da je za svaki izbor $v_1, \dots, v_n$ iz S skup

$$\{v, v_1, \dots, v_n\}$$

linearno nezavisan. Naime, ako je

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

onda mora biti $\lambda = 0$, jer bi u suprotnom imali da je v linearna kombinacija

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n$$

vektora $v_1, \dots, v_n$ iz S. No $\lambda = 0$ daje

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $v_1, \dots, v_n$ slijedi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Znači da je skup

$$\{v_1, \dots, v_n, v\}$$

linearno nezavisan. Time smo pokazali da je svaki konačan podskup od $S \cup \{v\}$ linearno nezavisan, pa je onda po definiciji i skup

$$S \cup \{v\}$$

linearno nezavisan. □

4.6. Nadopunjavanje linearno nezavisnog skupa do baze. *Neka je $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ linearno nezavisan skup u konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada postoji nadskup od S koji je baza od V.*

Dokaz. Ako skup $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ razapinje V, onda je S baza od V i naša tvrdnja vrijedi. Ako pak S ne razapinje V, onda prema prethodnoj lemi 4.5 postoji vektor v u V takav da je skup

$$S \cup \{v\} = \{v_1, \dots, v_n, v\}$$

linearno nezavisan skup. Ako $S \cup \{v\}$ razapinje V, onda je to baza od V i naša tvrdnja vrijedi, a ako nije, onda nastavljamo opisani postupak. Budući da je po teoremu 3.10 u konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V broj linearno nezavisnih vektora uvijek manji ili jednak dimenziji od V, to u konačno koraka dolazimo do baze koja je naddskup od S. □

4.7. Teorem. *Ako je V potprostor konačno dimenzionalnog vektorskog prostora W, onda je V konačno dimenzionalni vektorski prostor i*

$$\dim V \leq \dim W.$$

Štoviše, $\dim V = \dim W$ *ako i samo ako je* $V = W$.

DOKAZ. Ako je $V \neq 0$ potprostor konačno dimenzionalnog vektorskog prostora W, onda postoji vektor $v_1 \neq 0$ u V i $S = \{v_1\}$ je linearno nezavisan skup u V. Budući da su linearno nezavisni vektori u V ujedno i linearno nezavisni vektori u W, to je njihov broj uvijek manji ili jednak $\dim W = m$. Eventualnim dopunjavanjem linearno nezavisnog skupa S, kao u dokazu prethodnog teorema, dobivamo bazu od V.

Ako u V imamo bazu $v_1, \dots, v_m$ od $m = \dim W$ elemenata, onda je to i linearno nezavisan skup u W, pa je prema teoremu 3.18 to ujedno i baza od W. No ako V i W imaju istu bazu, onda je to jedan te isti prostor $V = W$. □

4.8. Odgovor na prvo važno pitanje o potprostorima u $\mathbb{R}^n$. U točki 2.7.16 prethodnog poglavlje postavili smo dva pitanja o obliku potprostora od $\mathbb{R}^n$. Teorem 4.7 daje potvrdan odgovor na prvo pitanje: *Svaki potprostor u $\mathbb{R}^n$ je k-dimenzionalan za neki $0 \leq k \leq n$ i može se napisati kao linearna ljuska neke svoje baze $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.*

4.9. k-dimenzionalne ravnine u $\mathbb{R}^n$. Iz definicije pravaca i ravnina u $\mathbb{R}^n$ je očito da su pravci kroz ishodište 1-dimenzionalni potprostori, a ravnine kroz ishodište 2-dimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}^n$. Zato k-dimenzionalne potprostore u $\mathbb{R}^n$ zovemo i *k-dimenzionalnim ravninama kroz ishodište*. Općenito za dani vektor b i k-dimenzionalni potprostor V u $\mathbb{R}^n$ skup oblika

$$\Sigma = b + V = \{b + v \mid v \in V\}$$

zovemo *k-dimenzionalnom ravninom* ili kraće *k-ravninom kroz točku b*. Za dvije različite k-ravnine oblika

$$b + V = \{b + v \mid v \in V\} \quad \text{i} \quad c + V = \{c + v \mid v \in V\}$$

kažemo da su *paralelne*[7]. Ako je $v_1, \dots, v_k$ baza potprostora V, onda imamo *parametarski prikaz* k-ravnine Σ kroz točku b paralelne ravnini V,

$$\Sigma = b + \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{b + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

[7]Općenitije, neka je $Z \subset V$ k'-dimenzionalni potprostor od V. Ako je $c + Z \subset b + V$, onda kažemo da *k'-ravnina $c + Z$ leži u k-ravnini $b + V$*. Ako $c + Z$ ne leži u $b + V$, onda kažemo da je *k'-ravnina $c + Z$ paralelna k-ravnini $b + V$*. Dokažite da paralelene ravnine nemaju zajedničkih točaka!

5. Koordinatizacija

5.1. Izomorfizam vektorskih prostora. Neka su V i W dva vektorska prostora. Ako je preslikavanje

$$f\colon V \to W$$

bijekcija, onda možemo identificirati elemente skupova V i W, na primjer

$$x \longleftrightarrow f(x) \quad \text{i} \quad y \longleftrightarrow f(y).$$

Kažemo da je bijekcija f *izomorfizmam vektorskih prostora* ako zajedno s identifikacijom elemenata možemo identificirati i operacije na tim skupovima, tj. ako je[8]

$$x + y \longleftrightarrow f(x) + f(y), \quad \alpha x \longleftrightarrow \alpha f(x) \tag{5.1}$$

za sve vektore $x, y \in V$ i sve skalare $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.2. Izomorfni vektorski prostori. Kažemo da su dva vektorska prostora V i W *izomorfna* ako postoji neki izomorfizam vektorskih prostora $f\colon V \to W$. Tada pišemo

$$V \cong W.$$

5.3. Baza i uređena baza. Neka je V realan n-dimenzionalni vektorski prostor. Reći ćemo da je niz vektora $(v_1, \dots, v_n)$ *uređena baza od* V ako je skup vektora $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza od V. Tako od kanonske baze $\{e_1, e_2\}$ u $\mathbb{R}^2$ možemo dobiti dvije uređene baze koje zapisujemo kao dvije različite matrice

$$I = (e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = (e_2, e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4. Baza i koordinatizacija n-dimenzionalnog prostora. Neka je u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V dana uređena baza $B = (v_1, \dots, v_n)$. Tada za svaki vektor x imamo jedinstveni prikaz

$$x = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n.$$

Koeficijente $\xi_1, \dots, \xi_n$ u prikazu vektora x zovemo *koordinatama vektora* x *u uređenoj bazi* $v_1, \dots, v_n$ i kažemo da je koeficijent ξ_1 uz prvi vektor baze *prva koordinata*, koeficijent ξ_2 uz drugi vektor baze *druga koordinata*, itd. Koordinate vektora x obično zapisujemo kao vektor-stupac x_B u $\mathbb{R}^n$,

$$x_B = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

[8] Budući da je $x + y \longleftrightarrow f(x + y)$, $\alpha x \longleftrightarrow f(\alpha x)$, to formula (5.1) u stvari znači tako zvano svojstvo linearnosti preslikavanja $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Preslikavanje $f\colon V \to \mathbb{R}^n$ koje svakom vektoru $x \in V$ pridruži njegove koordinate x_B u bazi B je očito bijekcija pa možemo identificirati elemente u V i $\mathbb{R}^n$,

$$x \longleftrightarrow f(x) = x_B = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Štoviše, za $y = \eta_1 v_1 + \cdots + \eta_n v_n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)v_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)v_n, \quad \alpha x = (\alpha\xi_1)v_1 + \cdots + (\alpha\xi_n)v_n,$$

pa je zbog jedinstvenosti zapisa vektora u bazi i-ta koordinata od $x+y$ suma i-tih koordinata od x i od y, a i-ta koordinata od αx je umnožak broja α i i-te koordinata od x. Budući da su operacije zbrajanja i množenja skalarom na $\mathbb{R}^n$ definirane po koordinatama, to je

$$(x+y)_B = x_B + y_B \quad \text{i} \quad (\alpha x)_B = \alpha x_B,$$

odnosno

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Znači da je $f\colon x \mapsto x_B$ izomorfizam vektorskih prostora i

$$V \cong \mathbb{R}^n.$$

Preslikavanje f zovemo *koordinatizacijom od V u uređenoj bazi* $v_1, \dots, v_n$, ili samo *koordinatizacijom od V*. Grubo govoreći, pomoću koordinatizacije svaki realni n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem realnih brojeva "izgleda isto" kao $\mathbb{R}^n$!

5.5. Primjer. Za dvije uređene baze $I = (e_1, e_2)$ i $H = (e_2, e_1)$ u $\mathbb{R}^2$ imamo dvije različite koordinatizacije. U bazi $I = (e_1, e_2)$ imamo

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \mapsto x_I = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

jer je u uređenoj bazi I prva koordinata od x jednaka ξ_1, a druga ξ_2. S druge strane, u bazi $H = (e_2, e_1)$ imamo

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 e_2 + \xi_1 e_1 \mapsto x_H = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

jer je u uređenoj bazi H prva koordinata od x jednaka ξ_2, a druga ξ_1.

5.6. Zadatak. Napiši koordinatizaciju za bazu $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ u $\mathbb{R}^2$.

5.7. Koordinate vektora u novoj bazi od $\mathbb{R}^n$. Neka je dana uređena baza $B = (v_1, \dots, v_n)$ od $\mathbb{R}^n$. Tada su koordinate $x_B = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektora x u bazi B koeficijenti u jedinstvenom prikazu

$$x = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n, \tag{5.2}$$

ili, drugim riječima, *koordinate $x_B = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektora x u bazi B su jedinstveno rješenje $n \times n$ sistema jednadžbi s desnom stranom x i matricom sistema B.*

5.8. Primjer. Koordinate od $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ u uređenoj bazi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ u $\mathbb{R}^3$ iz primjera 1.18 dobivamo rješavajući sistem jednadžbi s proširenom matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znači da je $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$, $\xi_1 = 1$, odnosno $x_B = (1, 0, 1)$.

5.9. Zadatak. Nađite koordinate od $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ u bazi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.10. Primjer. Vektori $v_1 = (1, 1, 2)$ i $v_2 = (2, -1, -1)$ u $\mathbb{R}^3$ čine bazu 2-dimenzionalnog potprostora

$$\Sigma = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\},$$

pa je preslikavanje

$$f \colon \Sigma \to \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (\lambda_1, \lambda_2)$$

koordinatizacija. Tako, na primjer, f pridružje vektoru $(3, 0, 1) \in \Sigma$ njegove koordinate $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

5.11. Zadatak. Pokažite da je vektor $x = (-1, 2, 3)$ u ravnini Σ iz prethodnog primjera i nađite njegove koordinate $f(x)$.

5.12. Zadatak. Dokažite da su vektori $w_1 = v_1 + v_2$ i $w_2 = v_1 - v_2$ druga baza potprostora Σ iz prethodnog primjera. Nađite vezu između koordinata vektora $x \in \Sigma$ u bazi (v_1, v_2) i bazi (w_1, w_2).

POGLAVLJE 4

Egzistencija rješenja sistema jednadžbi

U ovoj se poglavlju vraćamo općim pitanjima vezanim za sisteme jednadžbi, posebno pitanjima egzistencije i jedinstvenosti rješenja. Odgovori na ta pitanja dani su u terminima ranga i defekta matrice sistema.

1. Rang matrice

1.1. Rang matrice. Neka je je $A = (a_1, \dots, a_n)$ matrica tipa $m \times n$. Tada je prema točki 2.6.3 linearna ljuska stupaca matrice A

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \mid (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

vektorski potprostor od $\mathbb{R}^m$. Prema teoremu 3.4.7 je taj potprostor konačno dimenzionalan. Dimenziju linearne ljuske $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ zovemo *rangom matrice* $(a_1, \dots, a_n)$ i pišemo

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(a_1, \dots, a_n) = \dim\langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Ponekad se linearna ljuska stupaca matrice zove *područjem vrijednosti od A* i označava s

$$R(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

1.2. Primjer. Za jediničnu $n \times n$ matricu I imamo

$$\operatorname{rang} I = \operatorname{rang}(e_1, \dots, e_n) = \dim\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

S druge strane je dimenzija nul-potprostora od $\mathbb{R}^m$ jednaka nuli, pa za $m \times n$ nul-matricu 0 imamo

$$\operatorname{rang} 0 = \operatorname{rang}(0, \dots, 0) = \dim\langle 0, \dots, 0 \rangle = \dim 0 = 0.$$

1.3. Primjedba. Prema teoremu 3.4.7 dimenzija svakog potprostora u $\mathbb{R}^m$ manja je ili jednaka $m = \dim \mathbb{R}^m$, pa za $m \times n$ matricu A imamo

$$\operatorname{rang} A \le m.$$

Prema teoremu 3.3.10 broj generatora veći je ili jednak dimenziji prostora, pa za linearnu ljusku $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ imamo

$$\operatorname{rang} A \le n.$$

1.4. Rang i elementarne transformacije. Prema točki 2.6.15 elementarne transformacije ne mijenjaju linearnu ljusku, pa to svojstvo koristimo za računaje ranga: elementarnim transformacijama svedemo vektore $A = (a_1, \dots, a_n)$ na oblik

$$(c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0)$$

gdje su $c_1, \dots, c_r$ linearno nezavisni vektori, obično u trokutastoj ili stepenastoj formi[1]. Tada su ti vektori baza potprostora $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, pa je $\operatorname{rang} A = r$. Na primjer, svođenjem matrice na donje stepenasti oblik dobivamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (c_1, c_2, 0, 0),$$

pa zaključujemo da je $\operatorname{rang} A = 2$.

1.5. Zadatak. Nađite rang matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.6. Pitanje. Da li je $\operatorname{rang}(1, -1, 0, 2) = 3$? DA NE

1.7. Kronecker-Capellijev teorem. *Neka je zadana $m \times n$ matrica $(a_1, \dots, a_n)$ i vektor b u $\mathbb{R}^m$. Tada sistem jednadžbi*

$$\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n = b$$

ima rješenje ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema, tj. $\operatorname{rang}(a_1, \dots, a_n) = \operatorname{rang}(a_1, \dots, a_n, b)$.

Dokaz. Sistem jednadžbi ima rješenje ako i samo ako je b linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_n$ s nekim koeficijentima $\xi_1, \dots, \xi_n$, tj. ako i samo ako je

$$b \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle. \tag{1.1}$$

To je, prema lemi 2.6.11, ekvivalentno

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle. \tag{1.2}$$

No budući da je $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \subset \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$, prema teoremu 2.4.7 jednakost (1.2) ekvivalentna je jednakosti

$$\dim \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \dim \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle.$$

[1] Vidi točku 3.2.14.

$\square$

1.8. Primjedba. U točki 3.6.16 pitanje egzistencije rješenja sistema jednadžbi sveli smo na pitanje da li je $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle$ i kako to možemo provjeriti koristeći elementarne transformacije. U Kronecker-Capellijevom teorem idemo korak dalje i pitanje svodimo na provjeru jednakosti dimenzija tih prostora.

1.9. Primjer. Sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

iz primjera 1.3.7 nema rješenja. To smo u točki 1.3.9 vidjeli Gaussovom metodom izvođenjem elementarnih transformacija na recima proširene matrice sistema:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix},$$

pa sistem (1.3) nema rješenja jer jednadžba

$$0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3 = \tfrac{7}{3}$$

nema rješenja. S druge strane, elementarnim transformacijama na stupcima proširene matrice sistema dobivamo

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \ldots$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

i zaključujemo da je rang $A = 3$ i rang $(A, b) = 4$, pa iz Kronecker-Capellijevog teorema slijedi da sistem (1.3) nema rješenja.

1.10. Zadatak. Primjenom Kronecker-Capellijevog teorema utvrdite ima li sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2 \end{aligned}$$

rješenje?

2. Defekt matrice

2.1. Defekt matrice. Neka je je $A = (a_1, \dots, a_n)$ matrica tipa $m \times n$. Prema teoremu 2.7.15 skup svih rješenja homogenog sistema jednadžbi

$$N(A) = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_1 a_1 + \cdots + a_n \xi_n = 0\}$$

je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ — zovemo ga *nul-potprostorom matrice* A. Prema teoremu 3.4.7 potprostor $N(A)$ je konačno dimenzionalan, a njegovu dimenziju zovemo *defektom matrice* A i pišemo

$$\operatorname{defekt} A = \dim N(A) = \dim\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_1 a_1 + \cdots + a_n \xi_n = 0\}.$$

2.2. Primjer. Za jediničnu $n \times n$ matricu I homogeni sistem ima jedinstveno rješenje $0 \in \mathbb{R}^n$ pa imamo

$$\operatorname{defekt} I = \dim 0 = 0.$$

S druge strane za $m \times n$ nul-matricu 0 je svaka n-torka brojeva rješenje homogenog sistema pa imamo

$$\operatorname{defekt} 0 = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Na primjer,

$$\operatorname{defekt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

2.3. Pitanje. Mora li za $m \times n$ matricu A biti $m \geq \operatorname{defekt} A$? DA NE

2.4. Primjedba. Prema teoremu 3.4.7 dimenzija svakog potprostora u $\mathbb{R}^n$ manja je ili jednaka $n = \dim \mathbb{R}^n$, pa za $m \times n$ matricu A imamo

$$\operatorname{defekt} A \leq n.$$

2.5. Reducirana gornja stepenasta forma matrice. U točki 1.3.10 smo vidjeli kako elementarnim transformacijama redaka matricu možemo svesti na gornju stepenastu formu po recima. Taj postupak možemo nastaviti tako da svaki ugaoni element bude 1 i da onda s tom jedinicom eliminiramo sve ostale ne-nul elemente u tom stupcu. Za dobivenu matricu kažemo da je u *reduciranom gornjem stepenastom obliku.*

U slučaju 5×7 gornje stepenaste matrice (u kojoj umjesto $*$ može biti bilo koji broj) elementarnim transformacijama redaka dobivamo reduciranu gornju stepenastu matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 2 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 3 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kod koje su svi ugaoni elementi jednaki jedan i oni su jedini elementi različiti od nule u svojim stupcima (prvom, drugom, trećem i petom).

2.6. Defekt i elementarne transformacije redaka. Budući da je defekt matrice po definiciji dimenzija prostora rješenja pripadne homogene jednadžbe, to defekt $m \times n$ matrice A određujemo rješavanjem homogenog sistema $Ax = 0$ Gaussovim eliminacijama. Možda je najjednostavniji način da elementarnim transformacijama redaka matricu sistema svedemo na reduciranu gornju stepenastu matricu

$$\begin{pmatrix} 0\dots & 1 & \alpha_{1j_1+1} & \dots & 0 & \alpha_{1j_2+1} & \dots & 0 & \alpha_{1j_3+1} & \dots \\ 0\dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{2j_2+1} & \dots & 0 & \alpha_{2j_3+1} & \dots \\ 0\dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{3j_3+1} & \dots \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

pri čemu su indeksi $1 \le j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r \le n$ indeksi stupaca u kojima se nalazi r ugaonih elementa. Zadnji redak matrice koji nije nula je r-ti redak oblika

$$(0, \dots, 0, 1, \alpha_{rj_r+1}, \dots, \alpha_{rn})$$

(ako je $j_r < n$) i homogeni sistem $Ax = 0$ počinjemo rješavati s pripadnom r-tom jednadžbom

$$\xi_{j_r} + \xi_{j_r+1}\alpha_{rj_r+1} + \dots + \xi_n\alpha_{rn} = 0.$$

Tu jednadžbu možemo riješiti po nepoznanici ξ_{j_r}

$$\xi_{j_r} = -(\xi_{j_r+1}\alpha_{rj_r+1} + \dots + \xi_n\alpha_{rn})$$

tako da vrijednosti nepoznanica $\xi_{j_r+1}, \dots, \xi_n$ biramo po volji. U narednom koraku rješavamo $(r-1)$-tu jednadžbu po nepoznanici $\xi_{j_{r-1}}$

$$\begin{aligned} \xi_{j_{r-1}} = &- (\xi_{j_{r-1}+1}\alpha_{r-1,j_{r-1}+1} + \dots + \xi_{j_r-1}\alpha_{r-1,j_r-1}) \\ &- (\xi_{j_r+1}\alpha_{r-1,j_r+1} + \dots + \xi_n\alpha_{r-1,n}) \end{aligned}$$

tako da vrijednosti nepoznanica $\xi_{j_{r-1}+1}, \dots, \xi_{j_r-1}$ biramo po volji. Na taj način u r koraka odredimo vrijednosti nepoznanica

$$\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_r}$$

(koje ponekad zovemo *vezanim nepoznanicama*) ovisno o izboru vrijednosti preostalih nepoznanica

$$\xi_j, \quad j \notin \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$$

(koje ponekad zovemo *slobodnim nepoznanicama*). Opće rješenje homogenog sistema možemo zapisati kao vektor

$$v = (\xi_1, \dots, \xi_{j_1-1}, \boxed{\xi_{j_1}}, \xi_{j_1+1}, \dots, \xi_{j_r-1}, \boxed{\xi_{j_r}}, \xi_{j_r+1}, \dots, \xi_n) \tag{2.2}$$

koji ovisi o $n - r$ parametara (tj. slobodnih nepoznanica), a zaokružene vrijednosti su funkcije tih parametara (tj. vezane nepoznanice). Bazu nulpotprostora matrice A možemo dobiti tako da biramo za jednu slobodnu varijablu vrijednost 1 i sve ostale slobodne varijable vrijednost 0:

$$v_n = (0, \dots, 0, \boxed{\xi_{j_1}}, 0, \dots, 0, \boxed{\xi_{j_r}}, 0, \dots, 1) \text{ za } \xi_n = 1, \text{ ostali } \xi_j = 0,$$

$$\dots$$

$$v_{j_r+1} = (0,\dots,0,\boxed{\xi_{j_1}},0,\dots,0,\boxed{\xi_{j_r}},1,\dots,0) \text{ za } \xi_{j_r+1}=1, \text{ ostali } \xi_j = 0,$$

$$v_{j_r-1} = (0,\dots,0,\boxed{\xi_{j_1}},0,\dots,1,\boxed{\xi_{j_r}},0,\dots,0) \text{ za } \xi_{j_r-1}=1, \text{ ostali } \xi_j = 0,$$

$$\dots$$

Očito su dobiveni vektori linearno nezavisni, a lako je vidjeti i da je vektor v dan formulom (2.2) oblika

$$v = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_{j_1-1}v_{j_1-1} + \xi_{j_1+1}v_{j_1+1} + \cdots + \xi_{j_r-1}v_{j_r-1} + \xi_{j_r+1}v_{j_r+1} + \cdots + \xi_n v_n.$$

Znači da smo dobili bazu od $N(A)$ od $n-r$ vektora, pa je

$$\operatorname{rang} A = n - r.$$

Valja primijetiti da smo na isti način mogli zaključivati i da stepenasta matrica nije bila reducirana.

2.7. Primjer. Za homogeni sistem jednadžbi stepenastog oblika

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 0,\\ \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 0,\\ \xi_5 - 4\xi_6 &= 0 \end{aligned}$$

odmah vidimo da matrica sistema ima 3 ugaona elementa, pa je defekt matrice sistema jednak $6-3=3$. Bazu prostora rješenja dobivamo birajući vrijednosti slobodnih nepoznanica na gore opisani način i određujući odgovarajuće vrijednosti vezanih nepoznanica:

1) $\xi_6 = 1$, $\xi_4 = 0$, $\xi_2 = 0$ daje $\xi_5 = 4$, $\xi_3 = -4$, $\xi_1 = -8$,
2) $\xi_6 = 0$, $\xi_4 = 1$, $\xi_2 = 0$ daje $\xi_5 = 0$, $\xi_3 = -2$, $\xi_1 = -4$,
3) $\xi_6 = 0$, $\xi_4 = 0$, $\xi_2 = 1$ daje $\xi_5 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = -2$.

Time smo dobili bazu nul-potprostora matrice sistema

$$\begin{aligned} v_6 &= (\boxed{-8},0,\boxed{-4},0,\boxed{4},1),\\ v_4 &= (\boxed{-4},0,\boxed{-2},1,\boxed{0},0),\\ v_2 &= (\boxed{-2},1,\boxed{0},0,\boxed{0},0), \end{aligned}$$

pri čemu smo vezane varijable zaokružili kao u prethodnoj točki. Isti rezultat dobijamo ako napišemo rješenje sistema pomoću tri parametra ξ_6, ξ_4 i ξ_2,

$$\begin{aligned} \boxed{\xi_1} &= -2\xi_2 - 4\xi_4 - 8\xi_6\\ \xi_2 &= \xi_2\\ \boxed{\xi_3} &= -2\xi_4 - 4\xi_6\\ \xi_4 &= \xi_4\\ \boxed{\xi_5} &= 4\xi_6\\ \xi_6 &= \xi_6 \end{aligned}$$

i onda te parametre "izlučimo" iz vektora općeg rješenja v koji o tim parametrima ovisi

$$v = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi_2 - 4\xi_4 - 8\xi_6 \\ \xi_2 \\ -2\xi_4 - 4\xi_6 \\ \xi_4 \\ 4\xi_6 \\ \xi_6 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_6 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.8. Zadatak. Svedite matricu sistema iz gornjeg primjera na reduciranu gornju stepenastu matricu i nađite na opisani način bazu potprostora rješenja homogenog sistema. U čemu je razlika?

2.9. Zadatak. Odredite defekt matrice A i bazu od $N(A)$ za

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.10. Pitanje. Da li je defekt $(1, -1, 0, 2) = 3$? DA NE

3. Teorem o rangu i defektu

3.1. Svojstvo linearnosti lijeve strane sistema jednadžbi. Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$ matrica tipa $m \times n$. Tada za vektor x u $\mathbb{R}^n$ s koordinatama $\xi_1, \dots, \xi_n$ imamo linearnu kombinaciju

$$Ax = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \in R(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \tag{3.1}$$

U točke 2.5.14 dokazali smo svojstvo linearnosti

$$Ax + Ay = A(x + y) \quad \text{i} \quad A(\lambda x) = \lambda(Ax) \tag{3.2}$$

za sve vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ i skalare $\lambda \in \mathbb{R}$

3.2. Teorem o rangu i defektu. *Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$ matrica tipa $m \times n$. Tada je*

$$\text{rang}A + \text{defekt}A = n.$$

Dokaz. Za n vektora $v_1, \dots, v_n$ u $\mathbb{R}^n$ po formuli (3.2) imamo n vektora $Av_1, \dots, Av_n$ u $\mathbb{R}^m$, pa možemo gledati $(m + n) \times n$ matrice

$$\begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Na takvim ćemo matricama provoditi elementarne transformacije i, zbog svojstva linearnosti, dobit ćemo matrice istog oblika. Naime, zbog jednakosti $\lambda A v_1 = A(\lambda v_1)$ množenjem prvog stupca matrice (3.3) dobivamo matricu

$$\begin{pmatrix} A(\lambda v_1) & Av_2 & \dots & Av_n \\ \lambda v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

Isto tako zbog jednakosti $Av_2 + Av_1 = A(v_2 + v_1)$ dodavanjem prvog stupca matrice (3.3) drugom stupcu dobivamo matricu

$$\begin{pmatrix} Av_1 & A(v_2+v_1) & \dots & Av_n \\ v_1 & v_2+v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

Također primijetimo da je j-ta koordinata vektora kanonske baze e_j jednaka 1, a sve ostale su nula, pa formula (3.2) daje

$$Ae_j = a_j.$$

Znači da je

$$\begin{pmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \dots & Ae_n \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama stupaca

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \dots \mapsto (a_1', \dots, a_r', 0, \dots, 0)$$

možemo matricu $A = (a_1, \dots, a_n)$ prevesti u donju stepenastu matricu čiji su linearno nezavisni stupci $a_1', \dots, a_r'$ baza linearne ljuske $R(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Paralelnim izvođenjem istog niza elementarnih transformacija na matricama oblika (3.3) dobivamo

$$\begin{pmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \dots & Ae_n \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} Af_1 & \dots & Af_r & 0 & \dots & 0 \\ f_1 & \dots & f_r & f_{r+1} & \dots & f_n \end{pmatrix},$$

pri čemu su, zbog teorema 3.1.17, vektori $f_1, \dots, f_n$ baza u $\mathbb{R}^n$. Po konstrukciji su $f_{r+1}, \dots, f_n$ linearno nezavisni vektori u $N(A)$. Zbog linearne nezavisnosti vektora $a_1' = Af_1, \dots, a_r' = Af_r$ slijedi da su vektori

$$f_{r+1}, \dots, f_n$$

baza od $N(A)$. Naime, za vektor x zapisan u bazi

$$x = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_n f_n$$

relacija $Ax = 0$ i svojstvo linearnosti povlači

$$\lambda_1 Af_1 + \dots + \lambda_r Af_r = 0,$$

a onda zbog linearne nezavisnosti $Af_1, \dots, Af_r$ slijedi $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Znači da je

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{defekt} A = r + (n - r) = n.$$

□

Opisanim postupkom možemo za danu matricu A istovremeno tražiti baze od $R(A)$ i $N(A)$. Tako, na primjer, elementarnim transformacijama dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odavle vidimo ne samo bazu

$$(1,1,2,-1), \quad (0,3,1,-1)$$

od $R(A)$, nego i bazu

$$(-1,-1,1,0), \quad (-2,0,1,1)$$

od $N(A)$

3.3. Zadatak. Nađite baze od $N(A)$ i $R(A)$ za matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

3.4. Zadatak. Nađite opisanim načinom bazu prostora rješenja homogenog sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 0, \\ \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 0, \\ \xi_5 - 4\xi_6 &= 0. \end{aligned}$$

3.5. Pitanje. Da li je defekt 2×4 matrice barem 2 ? DA NE

3.6. Pitanje. Da li je rang 4×2 matrice barem 2 ? DA NE

3.7. Pitanje. Da li je defekt 4×2 matrice barem 2 ? DA NE

3.8. Rang i elementarne transformacije redaka. Ako smo $m \times n$ matricu B dobili iz A uzastopnim elementarnim transformacijama redaka, pišemo

$$B \underset{r}{\sim} A,$$

onda su homogeni sistemi jednadžbi $Ax = 0$ i $Bx = 0$ ekvivalentni, tj.

$$N(B) = N(A).$$

No onda zbog teorema o rangu i defektu imamo jednakost rangova

$$\operatorname{rang} B = n - \dim N(B) = n - \dim N(A) = \operatorname{rang} A.$$

Znači da elementarne transformacije redaka ne mijenjaju rang.

3.9. Rang matrice "po recima i stupcima". Iz gornjeg razmatranja slijedi da pri računanja ranga matrice možemo "istovremeno" koristiti elementarne transformacije i na stupcima i na recima matrice. Na primjer, postupak na primjeru iz točke 1.4 mogli smo nastaviti izvođenjem elementarnih transformacija na recima

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, 0, 0),$$

pri čemu je rang zadnje matrice očito 2.

Općenito $m \times n$ matricu A možemo elementarnim transformacijama na stupcima i recima svesti na oblik

$$(e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0) \tag{3.4}$$

iz kojeg očitavamo $\operatorname{rang} A = r$.

Naime, ako matrica A tipa $m \times n$ nije nula, onda eventualnom zamjenom stupaca i/ili redaka problem svedemo na slučaj $\alpha_{11} \neq 0$. Sada podijelimo prvi stupac s α_{11} i "eliminiramo" sve preostale elemente u prvom retku, a potom i u prvom stupcu. Znači da smo dobili matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha'_{m2} & \dots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix}$$

i problem sveli na matricu tipa $(m-1) \times (n-1)$.

3.10. Transponirana matrica. Za matricu A tipa $m \times n$ matrica tipa $n \times m$ kojoj su stupci jednaki recima matrice A zovemo *transponiranm matricom od A* i označavamo je s A^t. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.11. Osnovni teorem o rangu matrica. $\operatorname{rang} A^t = \operatorname{rang} A$.

Dokaz. Primijetimo da je prvih r stupaca $e_1, \ldots, e_r$ u matrici (3.4) u stvari prvih r elemenata kanonske baze u $\mathbb{R}^m$. Transponirana matrica ima "isti oblik"

$$(e_1, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0)^t = (e_1, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0), \tag{3.5}$$

"jedino" što je tipa $n \times m$ i $e_1, \ldots, e_r$ na desnoj strani je prvih r elemenata kanonske baze u $\mathbb{R}^n$. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Budući da su stupci transponirane matrice A^t reci matrice A, a reci od A^t stupci od A, to elementarnim transformacijama možemo "paralelno" svesti A na oblik (3.4), a A^t na oblik (3.5), te zaključiti da je u oba slučaja rang matrice jednak r. □

4. Jedinstvenost rješenja sistema jednadžbi

4.1. Pitanje jedinstvenosti rješenja sistema jednadžbi. Pretpostavimo da sistem jednadžbi

$$Ax = b$$

ima rješenje, označimo ga s x_{part} i zovimo ga *partikularnim rješenjem* sistema. Sistem

$$Ax = 0$$

zovemo *pripadnim homogenim sistemom.* Po definiciji je nul-potprostor $N(A)$ skup svih rješenja pripadnog homogenog sistema.

Teorem. *Skup svih rješenja sistema $Ax = b$ je*

$$x_{part} + N(A) = \{x_{part} + y \mid Ay = 0\}.$$

Posebno, x_{part} je jedinstveno rješenje sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $N(A) = 0$.

Dokaz. Po pretpostavci je $Ax_{\text{part}} = b$. Ako je $Ax = b$ za neki x, onda zbog svojstva linearnosti (3.2) za $y = x - x_{\text{part}}$ imamo

$$Ay = A(x - x_{\text{part}}) = Ax - Ax_{\text{part}} = b - b = 0.$$

To znači da je svako rješenje sistema $Ax = b$ oblika

$$x = x_{\text{part}} + y, \quad Ay = 0.$$

Obratno, zbog svojstva linearnosti za vektor x tog oblika imamo

$$Ax = A(x_{\text{part}} + y) = Ax_{\text{part}} + Ay = b + 0 = b,$$

tj. x je rješenje sistema. □

4.2. Primjedba. Primijetimo da “odstupanje od jedinstvenosti rješenja” sistema $Ax = b$ “mjeri” defekt matrice A: ako je defekt $A = d$ i $v_1, \dots, v_d$ baza u $N(A)$, onda opće rješenje sistema ovisi o d proizvoljnih parametara:

$$x = x_{\text{part}} + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}.$$

Grubo rečeno, što je veći defekt matrice sistema, to je više rješenja sistema. No s druge strane, po teoremu o rangu i defektu, veći defekt od A znači manji rang od A, a to po Kronecker-Capellijevom teoremu znači da rješenje x_{part} sistema $Ax = b$ postoji za “manje desnih strana b” !

4.3. Primjer. Očito sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 4, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - 5\xi_3 &= 4, \\ 4\xi_1 + 5\xi_2 - 9\xi_3 &= 8 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ima jedno rješenje

$$x_{\text{part}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rješavanjem pripadnog homogenog sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - 5\xi_3 &= 0, \\ 4\xi_1 + 5\xi_2 - 9\xi_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

dobivamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & -9 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa su sva rješenja pripadnog homogenog sistema

$$\xi_3 = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \xi_2 = \xi_3 = \lambda, \quad \xi_1 = \xi_3 = \lambda.$$

Znači da su sva rješenja x sistema jednadžbi (4.1) oblika

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.4. Zadatak. Nađite sva rješenja sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 2, \\ \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 1, \\ \xi_5 - 4\xi_6 &= -3. \end{aligned}$$

4.5. Primjedba. Ako je defekt $m \times n$ matrice A jednak d, onda je za $c \in \mathbb{R}^n$ skup rješenja sistema

$$Ax = Ac \tag{4.3}$$

d-ravnina Σ u $\mathbb{R}^n$ kroz točku c oblika

$$\Sigma = c + N(A).$$

Znači da je d-ravnina Σ zadana sistemom (4.3) od m jednažbi. Prirodno se nameće pitanje da li je svaka k-ravnina u $\mathbb{R}^n$ zadana nekim sistemom jednadžbi? Naravno, to je u stvari drugo pitanje iz točke 2.7.16, a na koje ćemo odgovoriti potvrdno u sljedećem poglavlju.

POGLAVLJE 5

Skalarni produkt

U ovom poglavlju uvodimo pojmove skalarnog produkta, norme i ortonormirane baze. Kao posljedicu Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije linearno nezavisnog skupa vektora dobivamo egzistenciju ortonormiranih baza potprostora konačno dimenzionalnih unitarnih prostora. Dokazujemo teorem o ortogonalnoj projekciji vektora na dani potprostor i teorem o najboljoj aproksimaciji vektora elementima danog potprostora, a kao posljedicu dobivamo metodu najmanjih kvadrata za približno rješavanje sistema jednadžbi koji koji nemaju točnog rješenja. Iz teorema o projekciji slijedi da se svaki potprostor od $\mathbb{R}^n$ može zadati kao skup rješenja homogenog sistema jednadžbi.

1. Norma i skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^n$

1.1. Duljina vektora u $\mathbb{R}^2$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2)$ iz $\mathbb{R}^2$ kao koordinate točaka euklidske ravnine u zadanom Kartezijevom sustavu, a elemente kanonske baze e_1, e_2 kao jedinične vektore na koordinatnim osima. Prema Pitagorinom poučku za pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0,0), \quad B = (\xi_1, 0), \quad C = (\xi_1, \xi_2)$$

kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AC}$ jednak je sumi kvadrata duljina kateta

$$\xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Ako usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AC}$ poistovjetimo s točkom $x = (\xi_1, \xi_2)$, onda je intuitivno opravdano kad kažemo da je

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

duljina (ili norma) vektora x u $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da za svaki vektor x imamo $\xi_1^2 + \xi_2^2 \geq 0$ i da u definiciji mislimo na nenegativan drugi korijen

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq 0.$$

Ako su $x = (\xi_1, \xi_2)$ i $y = (\eta_1, \eta_2)$ koordinate dviju točaka euklidske ravnine u zadanom Kartezijevom sustavu, onda je prema Pitagorinom poučku udaljenost $d(x, y)$ između tih točaka jednaka

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}.$$

1.2. Primjer. Duljina vektora $x = (1, 2)$ je

$$||x|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Za dvije točke $x = (1, 2)$ i $y = (2, 1)$ je njihova udaljenost jednaka

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}.$$

1.3. Duljina vektora u $\mathbb{R}^3$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ kao koordinate točaka euklidskog prostora u zadanom Kartezijevom sustavu, a elemente kanonske baze e_1, e_2, e_3 kao jedinične vektore na koordinatnim osima. Prema Pitagorinom poučku za pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (\xi_1, 0, 0), \quad C = (\xi_1, \xi_2, 0),$$

kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AC}$ jednak je sumi kvadrata duljina kateta

$$\xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Sada, primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0, 0, 0), \quad C = (\xi_1, \xi_2, 0), \quad D = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

dobijamo da je kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AD}$ jednak sumi kvadrata duljina kateta

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2.$$

Ako usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AD}$ poistovjetimo s točkom $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, onda je intuitivno opravdano kad kažemo da je

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

duljina (ili norma) vektora x u $\mathbb{R}^3$.

Ako su $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ i $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ koordinate dviju točaka euklidskog prostora u zadanom Kartezijevom sustavu, onda je prema Pitagorinom poučku udaljenost $d(x, y)$ između tih točaka jednaka

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}.$$

1.4. Primjer. Duljina vektora $x = (1, 2, -2)$ u $\mathbb{R}^3$ je

$$||x|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3.$$

Za dvije točke $x = (1, 2, -2)$ i $y = (2, 1, 1)$ je njihova udaljenost jednaka

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{11}.$$

1.5. Norma vektora u $\mathbb{R}^n$. Za vektor $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ u $\mathbb{R}^n$ definiramo *normu (ili duljinu) vektora x* kao

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}.$$

1.6. Udaljenost točaka u $\mathbb{R}^n$. Za dvije točke $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ i $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ u $\mathbb{R}^n$ definiramo njihovu međusobnu *udaljenost* $d(x, y)$ kao

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2}.$$

1.7. Pitagorin poučak i okomitost vektora u $\mathbb{R}^2$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2)$ iz $\mathbb{R}^2$ kao koordinate točaka euklidske ravnine u zadanom Kartezijevom sustavu. Po Pitagorinom poučku su vektori $x = (\xi_1, \xi_2)$ i $y = (\eta_1, \eta_2)$ okomiti ako i samo ako je

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2. \tag{1.1}$$

Budući da je

$$||x + y||^2 = (\xi_1 + \eta_1)^2 + (\xi_2 + \eta_2)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) + \eta_1^2 + \eta_2^2,$$
$$||x||^2 + ||y||^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2,$$

to je uvjet okomitosti (1.1) vektora x i y ekvivalentan

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = 0. \tag{1.2}$$

Općenito za dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^2$ skalar (broj)

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

zovemo *skalarnim produktom vektora x i y.*

1.8. Pitagorin poučak i okomitost vektora u $\mathbb{R}^3$. Zamislimo si $\mathbb{R}^3$ kao koordinate točaka euklidskog prostora u zadanom Kartezijevom sustavu. Po Pitagorinom poučku su vektori $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ i $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ okomiti ako i samo ako je

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2. \tag{1.3}$$

Kratkim računom kao u prethodnoj točki vidimo da je to ekvivalentno

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = 0. \tag{1.4}$$

1.9. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Za vektore $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ i $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ u $\mathbb{R}^n$ stavimo

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n.$$

Funkciju

$$(\ \mid\ ) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y)$$

zovemo *kanonskim skalarnim produktom na* $\mathbb{R}^n$. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ ima sljedeća svojstva:

(1) skalarni produkt je *bilinearan*, tj. za sve vektore $x, x', x'', y \in \mathbb{R}^n$ i skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi *linearnost u prvom argumentu*

$$(x' + x'' \mid y) = (x' \mid y) + (x' \mid y), \quad (\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y)$$

i *linearnost u drugom argumentu*

$$(y \mid x' + x'') = (y \mid x') + (y \mid x'), \quad (y \mid \lambda x) = \lambda(x \mid y),$$

(2) *simetričan*, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = (y \mid x),$$

(3) i *strogo pozitivan*, tj. za svaki vektor x vrijedi

$$(x \mid x) \geq 0 \quad \text{i} \quad (x \mid x) = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0.$$

Dokaz. Bilinearnost i simetričnost skalarnog produkta vrijedi zbog algebarskih svojstava realnih brojeva:

$$(\lambda x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \xi_i)\eta_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \lambda(x \mid y),$$

$$(x' + x'' \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i' + \xi_i'')\eta_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i'\eta_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i''\eta_i = (x' \mid y) + (x'' \mid y),$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \xi_i = (y \mid x).$$

Očito je $(x \mid x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \geq 0$ i jednakost vrijedi ako i samo ako je $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$. □

1.10. Primjer. Skalarni produkt vektora $x = (1, 0, 1)$ i $y = (1, 2, -1)$ u $\mathbb{R}^3$ je $(x \mid y) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$.

1.11. Napomena. Ponekad skalarni produkt $(x \mid y)$ vektora iz $\mathbb{R}^3$ zapisujemo kao "množenje" $x \cdot y$, a svojstva linearnosti u prvom i drugom argumentu zovemo svojstvima distributivnosti skalarnog množenja u odnosu na zbrajanje

$$(x' + x'') \cdot y = x' \cdot y + x'' \cdot y, \quad y \cdot (x' + x'') = y \cdot x' + y \cdot x''$$

i homogenosti skalarnog množenja u odnosu na množenje vektora skalarom

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x \cdot (\lambda y).$$

Zbog tih svojstava u slučaju skalarnog množenja linearnih kombinacija primjenjujemo, kao i za brojeve, pravilo množenja "svakog sa svakim":

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_m b_m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (a_i \mid b_j).$$

1.12. Kanonski skalarni produkt i norma vektora u $\mathbb{R}^n$. Očito je

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)}.$$

1.13. Okomiti vektori u $\mathbb{R}^n$ i Pitagorin poučak. Kažemo da su vektora x i y u $\mathbb{R}^n$ *okomiti* ili *ortogonalni* ako je

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n = 0,$$

često pišemo $x \perp y$. Primijetimo da je tada i $(y \mid x) = (x \mid y) = 0$, tj. $y \perp x$.

Ako je $x \perp y$, onda zbog bilinearnosti i simetričnosti skalarnog produkta vrijedi *Pitagorin poučak*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

1.14. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}$. U slučaju $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ skalarni produkt vektora (brojeva) ξ i η u $\mathbb{R}$ je

$$(\xi \mid \eta) = \xi\eta,$$

a norma $||\xi||$ je apsulutna vrijednost $|\xi|$ broja ξ:

$$|\xi| = ||\xi|| = \sqrt{\xi \cdot \xi}.$$

Primijetimo da u polju $\mathbb{R}$ relacija $(\xi \mid \eta) = \xi\eta = 0$ povlači da je bar jedan od brojeva ξ i η jednak nula.

2. Skalarni produkt vektora u $\mathbb{C}^n$

2.1. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}$. Polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je skup $\mathbb{R}^2$ čije elemente $z = (x, y)$ obično zapisujemo kao $z = x + iy$. Apsolutna vrijednost $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je u stvari norma $||z||$ elementa $z \in \mathbb{R}^2$. Koristimo li konjugiranje i množenje u polju $\mathbb{C}$, imamo formulu

$$|z| = ||z|| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Za kompleksne brojeve z i w kažemo da je

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w}$$

skalarni produkt vektora (brojeva) z i w u $\mathbb{C}$, a apsolutnu vrijednost kompleksnog broja

$$|z| = ||z|| = \sqrt{(z \mid z)}$$

zovemo i *normom vektora z u kompleksnom vektorskom prostoru* $\mathbb{C}$.

Primijetimo da u polju $\mathbb{C}$ relacija $(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = 0$ povlači da je bar jedan od brojeva z i w jednak nula. Za razliku od realnih brojeva, skalarni produkt na $\mathbb{C}$ ima svojstvo *hermitske simetrije*

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = \overline{w} \cdot z = \overline{w} \cdot \overline{\overline{z}} = \overline{w \cdot \overline{z}} = \overline{(w \mid z)}.$$

2.2. Kanonski skalarni produkti na $\mathbb{C}$ i na $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da je za kompleksne brojeve $z = x + iy$ i $w = u + iv$

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = xu + yv + i(-xv + yu)$$

pa je skalarni produkt $xu + yv$ vektora (x, y) i (u, v) u 2-dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ jednak realnom dijelu skalarnog produkta $(z \mid w)$ vektora $z = x + iy$ i $w = u + iv$ u 1-dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}$.

2.3. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$. Funkciju

$$(\ \mid\ )\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y) = \xi_1\overline{\eta_1} + \xi_2\overline{\eta_2} + \cdots + \xi_n\overline{\eta_n},$$

gdje je $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ i $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, zovemo *kanonskim skalarnim produktom na* $\mathbb{C}^n$. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$ ima sljedeća svojstva:

(1) skalarni produkt je *linearna funkcija u prvom argumentu*, tj.

$$(x' + x'' \mid y) = (x' \mid y) + (x'' \mid y), \quad (\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y)$$

i *antilinearna funkcija u drugom argumentu*, tj.

$$(x \mid y' + y'') = (x \mid y') + (x \mid y''), \quad (x \mid \lambda y) = \overline{\lambda}(x \mid y),$$

(2) *hermitski simetričan*, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)},$$

(3) i *strogo pozitivan*, tj. za svaki vektor x vrijedi

$$(x \mid x) \geq 0 \quad \text{i} \quad (x \mid x) = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0.$$

Dokaz. Linearnost i hermitska simetrija skalarnog produkta vrijede zbog algebarskih svojstava kompleksnih brojeva:

$$(\lambda x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \xi_i)\overline{\eta_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} = \lambda(x \mid y),$$

$$(x' + x'' \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i' + \xi_i'')\overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' \overline{\eta_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i'' \overline{\eta_i} = (x' \mid y) + (x'' \mid y),$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{\xi_i} \eta_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \overline{\xi_i}} = \overline{(y \mid x)}.$$

Antilinearnost u drugom argumentu slijedi iz linearnosti u prvom argumentu i hermitske simetrije:

$$\begin{aligned}(x \mid y + \lambda v) &= \overline{(y + \lambda v \mid x)} = \overline{(y \mid x) + \lambda(v \mid x)} \\ &= \overline{(y \mid x)} + \overline{\lambda} \cdot \overline{(v \mid x)} = (x \mid y) + \overline{\lambda}(x \mid v).\end{aligned}$$

Očito je $(x \mid x) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 \geq 0$ i jednakost vrijedi ako i samo ako je $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$. □

2.4. Primjer. Za vektore

$$x = (2, -i) \quad \text{i} \quad y = (i, 1 + i)$$

u $\mathbb{C}^2$ kanonski skalarni produkt je

$$(x \mid y) = 2 \cdot \overline{i} + (-i) \cdot \overline{1 + i} = 2 \cdot (-i) + (-i) \cdot (1 - i) = -2i - i - 1 = -1 - 3i.$$

2.5. Norma vektora u $\mathbb{C}^n$. *Norma vektora* $x = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ je po definiciji

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2}.$$

2.6. Primjer. Norma vektora $x = (2, -i)$ u $\mathbb{C}^2$ je $||x|| = \sqrt{|2|^2 + |-i|^2}$ $= \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

2.7. Norme vektora u $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{R}^{2n}$. Napišemo li koordinate $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$ vektora

$$x = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

kao parove (α_k, β_k) realnih brojeva, onda vektor x možemo shvatiti kao element

$$x = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$$

iz $\mathbb{R}^{2n}$, a norma je u oba slučaja ista:

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2} = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}.$$

3. Unitarni prostori

3.1. Skalarni produkt na vektorskom prostoru. Neka je K polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Funkciju

$$(\ \mid\ ) \colon V \times V \to K, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y)$$

zovemo *skalarnim produktom na vektorskom prostoru* V ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) funkcija je linearna u prvom argumentu, tj.

$$(x' + x'' \mid y) = (x' \mid y) + (x'' \mid y), \quad (\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y),$$

i funkcija je antilinearna u drugom argumentu, tj.

$$(x \mid y' + y'') = (x \mid y') + (x \mid y''), \quad (x \mid \lambda y) = \overline{\lambda}(x \mid y),$$

(2) funkcija je hermitski simetrična, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)},$$

(3) i strogo pozitivna, tj. za svaki vektor x vrijedi

$$(x \mid x) \geq 0 \quad \text{i} \quad (x \mid x) = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0.$$

Vektorski prostor sa zadanim skalarnim produktom zovemo *unitarnim prostorom.* U ovom paragrafu pretpostavljamo da je V unitaran.

3.2. Napomena. Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu za svaki vektor x imamo $(0 \mid x) = (0 + 0 \mid x) = (0 \mid x) + (0 \mid x)$, odnosno

$$(0 \mid x) = 0. \tag{3.1}$$

Isto tako je $(x \mid 0) = \overline{(0 \mid x)} = 0.$

3.3. Napomena. Za nas su najvažniji primjeri unitarnih prostora vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ s kanonskim skalarnim produktima. U matematičkoj analizi su važni primjeri unitarnih prostora vektorski prostori funkcija, kao što je, na primjer, realni vektorski prostor neprekidnih funkcija

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$$

sa skalarnim produktom

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

3.4. Potprostor unitarnog prostora je unitaran. Neka je V unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\ \mid\ )$ i W vektorski potprostor od V. Tada je W unitaran prostor s naslijeđenim skalarnim produktom

$$(\ \mid\ )\colon W \times W \to K, \quad (x,y) \mapsto (x \mid y),$$

jer su za vektore iz W očito zadovoljena sva svojstva (1) – (3) u definiciji skalarnog produkta. Posebno je svaki potprostor od $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$ unitaran prostor. Na primjer, ako je $W = \langle a_1, a_2 \rangle$ potprostor od $\mathbb{R}^3$ razapet vektorima

$$a_1 = (1,1,1) \quad \text{i} \quad a_2 = (1,1,2),$$

onda kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ daje skalarni produkt na potprostoru W, u bazi (a_1, a_2) zadan formulom

$$(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 \mid \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2) = 3\xi_1\eta_1 + 4\xi_1\eta_2 + 4\xi_2\eta_1 + 6\xi_2\eta_2. \tag{3.2}$$

3.5. Zadatak. Dokažite da je za sve $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$

$$3\,\xi_1^2 + 8\,\xi_1\xi_2 + 6\,\xi_2^2 \geq 0$$

ne koristeći činjenicu da je formulom (3.2) zadan skalarni produkt.

3.6. Napomena. Ako je V kompleksan vektorski prostor, onda je skalarni produkt vektora $(x \mid y)$ kompleksan broj. No zbog hermitske simetrije je $(x \mid x) = \overline{(x \mid x)}$, pa je za svaki vektor x u V skalarni produkt $(x \mid x)$ realan broj. Budući da u definiciji skalarnog produkta za taj realni broj zahtijevamo $(x \mid x) \geq 0$, to postoji drugi korijen $\sqrt{(x \mid x)} \geq 0$.

3.7. Norma vektora. *Norma vektora* x u unitarnom prostoru V je po definiciji

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} \geq 0.$$

Zbog svojstva (3) skalarnog produkta imamo i da je

$$||x|| = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0. \tag{3.3}$$

Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu i antilinearnosti u drugom, za svaki vektor x u V i svaki skalar $\lambda \in K$ vrijedi

$$||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x \mid x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x \mid x)} = |\lambda| \cdot ||x||. \tag{3.4}$$

3.8. Normirani vektori. Kažemo da je vektor x u unitarnom prostoru V *normirani* ili *jedinični*[1] vektor ako je

$$||x|| = 1.$$

Za svaki vektor $x \neq 0$ "dijeljenjem" s normom $||x|| \neq 0$ dobijamo normirani vektor

$$||\tfrac{1}{||x||}x|| = \tfrac{1}{||x||}||x|| = 1.$$

Kažemo da smo normirani vektor $\frac{1}{||x||}x$ dobili *normiranjem vektora* $x \neq 0$. Često pišemo

$$\tfrac{1}{||x||}x = \tfrac{x}{||x||} = x/||x||.$$

3.9. Okomiti vektori. Kažemo da su vektora x i y u unitarnom prostoru V *okomiti* ili *ortogonalni* ako je

$$(x \mid y) = 0,$$

često pišemo $x \perp y$. Primijetimo da je tada i $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)} = 0$, tj. $y \perp x$.

3.10. Okomiti skupovi. Kažemo da je *vektor x okomit na skup vektora A*, pišemo $x \perp A$, ako je $x \perp a$ za svaki vektor a iz skupa A. Kažemo da je *skup vektora B okomit na skup vektora A* ako je svaki vektor b iz B okomit na svaki vektor a iz A, pišemo $B \perp A$. Primijetimo da je tada i $A \perp B$.

3.11. Teorem. *Ako je $x \perp x$, onda je $x = 0$. Posebno, ako je $x \perp V$, onda je $x = 0$.*

DOKAZ. Po definiciji skalarnog produkta $(x \mid x) = 0$ povlači $x = 0$. Posebno, ako je x okomit na sve vektore iz V, onda je okomit i na sebe, pa mora biti nula. □

3.12. Pitagorin poučak. Ako je $x \perp y$, onda je

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

DOKAZ. Zbog bilinearnosti skalarnog produkta imamo

$$(x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y),$$

pa zbog pretpostavke $(x \mid y) = (y \mid x) = 0$ slijedi tvrdnja teorema. □

---

[1] U engleskom se za jedinični vektor kaže *unit vector*, odakle i dolazi naziv "unitarni prostor".

3.13. Teorem o projekciji vektora na pravac. Neka su x i e vektori u unitarnom prostoru, $||e|| = 1$. Tada je

(1) $x - (x \mid e)e \perp e$,
(2) $x = (x \mid e)e + (x - (x \mid e)e)$,
(3) $||x||^2 = |(x \mid e)|^2 + ||x - (x \mid e)e||^2$.

Vektor $(x \mid e)e$ zovemo *ortogonalnom projekcijom vektora x na pravac $\langle e \rangle$.*

DOKAZ. Tvrdnja (1) slijedi iz linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu i pretpostavke da je e jedinični vektor:

$$(x - (x \mid e)e \mid e) = (x \mid e) - (x \mid e)(e \mid e) = 0.$$

Tvrdnja (2) je očita, a tvrdnja (3) slijedi iz Pitagorinog teorema. □

3.14. Kosinus kuta između dva vektora. Neka je e jedinični vektor. Prema tvrdnji (2) prethodnog teorema vektor $x \neq 0$ možemo rastaviti na sumu dva vektora, pri čemu je prvi vektor

$$a = (x \mid e)e$$

proporcionalan jediničnom vektoru e duljine $||a|| = |(x \mid e)|$, a drugi je vektor

$$b = x - (x \mid e)e$$

okomit na vektor e. Da su vektori x i e u prostoru $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$, onda bi rastav vektora

$$x = a + b$$

geometrijski mogli shvatiti kao rastav vektora na dvije komponente, pri čemu je komponenta a na pravcu $\langle e \rangle = \mathbb{R}e$, a komponenta b okomita na pravac $\mathbb{R}e$. Štoviše, vektor x je u tom slučaju hipotenuza pravokutnog trokuta sa katetama a i b, a kosinus kuta φ između vektora x i e je

$$\cos\varphi = (x \mid e)/||x|| \tag{3.5}$$

(nacrtajte sliku za slučajeve $(x \mid e) \geq 0$ i $(x \mid e) < 0$). U slučaju unitarnog prostora nad poljem $\mathbb{R}$ relacijom (3.5) definiramo kosinus kuta između vektora e i x, ili općenitije, kosinus kuta između vektora $y \neq 0$ i x je

$$\cos\varphi = \frac{(x \mid y)}{||x||\,||y||}. \tag{3.6}$$

3.15. Primjer. Kosinus kuta između vektora $(1, 0)$ i $(1, 1)$ je $1/\sqrt{2}$.

3.16. Primjer. Kosinus kuta između vektora $(0, 0, 1, 0, 0)$ i $(1, 1, 1, 1, 3)$ u $\mathbb{R}^5$ je $1/\sqrt{13}$.

3.17. Zadatak. Nađite kosinus kuta između vektora a) $(1, 0)$ i $(1, 0)$, b) $(1, 0)$ i $(1/2, \sqrt{3}/2)$, c) $(1, 0)$ i $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, d) $(1, 0)$ i $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ i e) $(1, 0)$ i $(-1/2, \sqrt{3}/2)$. Nacrtajte sliku.

3.18. Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzova nejednakost. *Za vektore x i y vrijedi nejednakost*

$$|(x \mid y)| \le ||x||\,||y||, \tag{3.7}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

DOKAZ. Ako je desna strana $||x||\,||y|| = 0$, onda je jedan od vektora nula. Tada je zbog (3.1) i lijeva strana jednaka nuli i u (3.7) vrijedi jednakost, a vektori x i y su linearno zavisni.

Ako je desna strana $||x||\,||y|| \neq 0$, onda su oba vektora različita od nule. Stavimo li $e = y/||y||$, onda nejednakost (3.7) glasi

$$|(x \mid e)| = |(x \mid y/||y||)| = |(x \mid y)|/||y|| \le ||x||$$

i slijedi iz tvrdnje (3) teorema 3.13:

$$|(x \mid e)|^2 \le |(x \mid e)|^2 + ||x - (x \mid e)e||^2 = ||x||^2.$$

Štoviše, ako u (3.7) vrijedi jednakost, onda zbog stroge pozitivnosti skalarnog produkta $||x - (x \mid e)e|| = 0$ povlači $x - (x \mid e)e = 0$, tj. $x = (x \mid e)e = (x \mid y)y/||y||^2$. Na kraju, ako je $x = \lambda y$ za neki skalar λ, onda su obje strane (3.7) jednake $|\lambda|\,||y||^2$. □

3.19. Nejednakost trokuta. *Za proizvoljne vektore x i y vrijedi tzv. nejednakost trokuta*

$$||x + y|| \le ||x|| + ||y||. \tag{3.8}$$

DOKAZ. Zbog svojstava skalarnog produkta imamo

$$\begin{aligned}
||x + y||^2 &= (x + y \mid x + y) \\
&= (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) \\
&= ||x||^2 + (x \mid y) + (y \mid x) + ||y||^2 \\
&= ||x||^2 + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} + ||y||^2 \\
&= ||x||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid y) + ||y||^2 \\
&\le ||x||^2 + 2\,|(x \mid y)| + ||y||^2 \\
&\le ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2 \\
&= (||x|| + ||y||)^2\,,
\end{aligned}$$

pri čemu prva nejednakost vrijedi jer je realni dio kompleksnog broja manji ili jednak apsolutnoj vrijednosti, a druga nejednakost vrijedi zbog Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzove nejednakosti. Sada nejednakost trokuta slijedi vađenjem drugog korijena. □

3.20. Udaljenost točaka u unitarnom prostoru. Za dvije točke x i y u unitarnom prostoru V definiramo njihovu međusobnu *udaljenost* $d(x,y)$ kao

$$d(x,y) = ||x-y||.$$

Iz dokazanih svojstava norme (3.3), (3.4) i (3.8) za sve $x,y,z \in V$ slijedi

(1) *pozitivnost* $d(x,y) \geq 0$ i $d(x,y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,
(2) *simetričnost* $d(x,y) = d(y,x)$ i
(3) *relacija trokuta* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

4. Ortonormirani skupovi vektora

4.1. Teorem. *Skup vektora $v_1,\ldots,v_k$ je okomit na skup A ako i samo ako je $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle \perp A$.*

DOKAZ. Budući da je $v_1,\ldots,v_k \in \langle v_1,\ldots,v_k\rangle$, to $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle \perp A$ povlači $v_1,\ldots,v_k \perp A$. Obratno, ako je $v_1,\ldots,v_k \perp A$ i $a \in A$, onda linearnost skalarnog produkta u prvom argumentu za linearnu kombinaciju daje

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid a) = \lambda_1(v_1 \mid a) + \cdots + \lambda_k(v_k \mid a) = \lambda_1 \cdot 0 + \cdots + \lambda_k \cdot 0 = 0$$

Znači da je linearna kombinacija $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ okomita na a za svaki a iz A. □

4.2. Ortonormirani skupovi i ortonormirane baze. Kažemo da je skup vektora $v_1,\ldots,v_k$ *ortonormirani skup* ako su vektori međusobno okomiti i ako je svaki od njih normiran. To možemo zapisati formulom

$$(v_i \mid v_j) = \delta_{ij} \quad \text{za sve} \quad i,j = 1,\ldots,k.$$

Ortonormirani skup vektora $v_1,\ldots,v_n$ koji razapinje prostor zovemo *ortonormiranom bazom prostora.*

4.3. Teorem. *Neka je $v_1,\ldots,v_k$ ortonormirani skup. Ako je*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i,$$

onda je $\xi_i = (x \mid v_i)$ za sve $i = 1,\ldots,n$, odnosno

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i. \tag{4.1}$$

Posebno, ortonormirani skup je linearno nezavisan.

DOKAZ. Skalarnim množenjem

$$x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i$$

s v_j i korištenjem linearnosti skalarnog produkta u prvom argumenti dobivamo

$$(x \mid v_j) = (\sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i (v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \delta_{ij} = \xi_j.$$

Posebno za $x = 0$ slijedi $\xi_1 = \cdots = \xi_k = 0$, pa je skup vektora $v_1, \ldots, v_k$ linearno nezavisan. $\square$

4.4. Fourierovi koeficijenti. Ako je $v_1, \ldots, v_n$ ortonormirana baza prostora, onda koordinate

$$\xi_i = (x \mid v_i)$$

vektora x zovemo *Fourierovim koeficijentima* od x.

4.5. Primjer. Vektori $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ i $v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ su ortonormirana baza u $\mathbb{R}^2$. Koordinate vektora $x = (2, 1)$ u toj bazi su

$$\xi_1 = (x \mid v_1) = 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} = 3/\sqrt{2},$$
$$\xi_2 = (x \mid v_2) = 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 1/\sqrt{2}.$$

4.6. Zadatak. Izračunajte koordinate vektora $x = (2, 1)$ u ortonormiranoj bazi $v_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ i $v_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ od $\mathbb{R}^2$.

4.7. Pitanje. Da li su Fourierovi koeficijenti vektora $x \in \mathbb{C}^n$ u ortonormiranoj bazi $v_1, \ldots, v_n$ dani formulom

$$\xi_i = (v_i \mid x)\,? \qquad \text{DA} \quad \text{NE}$$

4.8. Ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$. Ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$ lako je konstruirati. Za svaki vektor $f \neq 0$ je

$$||\tfrac{1}{||f||} f|| = \tfrac{1}{||f||} ||f|| = 1,$$

pa je vektor $f_1 = \frac{1}{||f||} f$ norme 1. Ako je $f_1 = (\alpha, \beta)$, onda je vektor $f_2 = (-\beta, \alpha)$ također norme 1 i vrijedi

$$(f_1 \mid f_2) = -\alpha\beta + \beta\alpha = 0.$$

Očito je i vektor $-f_2$ norme 1 i okomit na f_1, pa imamo dvije ortonormirane baze

$$(f_1, f_2), \quad (f_1, -f_2),$$

ili zapisano po stupcima kao matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

4.9. Zadatak. Pokažite geometrijski i algebarski da su

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

sve ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$.

4.10. Zadatak. Pokažite da su stupci kompleksnih matrica[2]

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$. Pokažite da su

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\lambda\bar{\beta} \\ \beta & \lambda\bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |\lambda| = 1, \quad \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$$

sve ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$.

5. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije

5.1. Teorem. *Ako je $v_1, \dots, v_k$ ortonormirani skup u V i $x \in V$, onda je*

$$Q(x) = x - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i \perp \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Štoviše, $Q(x) \neq 0$ ako i samo ako $x \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Dokaz. Skalarnim množenjem vektorom v_j dobivamo

$$\begin{aligned}(Q(x) \mid v_j) &= (x - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i \mid v_j) = (x \mid v_j) - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i)(v_i \mid v_j) \\ &= (x \mid v_j) - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) \delta_{ij} = (x \mid v_j) - (x \mid v_j) = 0.\end{aligned}$$

Znači da je $Q(x) \perp v_1, \dots, v_k$, a to je prema teoremu 4.1 ekvivalentno $Q(x) \perp \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Ako je $x \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, onda zbog (4.1) imamo $Q(x) = 0$. Obratno, ako je $Q(x) = 0$, onda je očito $x \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. $\square$

5.2. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. *Ako je $a_1, \dots, a_n$ linearno nezavisan skup vektora u unitarnom prostoru V, onda postoji ortonormirani skup vektora $v_1, \dots, v_n$ takav da je*

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Nadalje, ako je V konačno dimenzionalan unitaran prostor, onda se svaki ortonormirani skup može dopuniti do ortonormirane baze od V.

Dokaz. Konstruktivni dokaz provodimo u koracima koje zovemo *Gram-Scmidtov postupak ortogonalizacije*:

Za $n = 1$ stavimo $v_1 = \frac{1}{||a_1||} a_1$. Očito je v_1 normiran i $\langle v_1 \rangle = \langle a_1 \rangle$.

Pretpostavimo sada da već imamo ortonormirani skup $v_1, \dots, v_k$ za $k < n$ takav da je

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle. \tag{5.1}$$

[2] Kompleksne matrice tog oblika zovemo kvaternionima norme jedan.

Budući da je po pretpostavci $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ linearno nezavisan skup vektora, to a_{k+1} nije u linearnoj ljusci $\langle v_1, \dots, v_k\rangle = \langle a_1, \dots, a_k\rangle$, pa iz teorema 5.1 slijedi da je

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1} \mid v_i) v_i \neq 0.$$

Tada imamo normirani vektor

$$v_{k+1} = \tfrac{1}{||b_{k+1}||} b_{k+1} \perp v_1, \dots, v_k,$$

pa je $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ ortonormirani skup vektora. Iz relacije

$$||b_{k+1}||\, v_{k+1} - a_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} \in \langle v_1, \dots, v_k\rangle$$

i pretpostavke indukcije (5.1) slijedi

$$\langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\rangle = \langle a_1, \dots, a_k, v_{k+1}\rangle = \langle a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\rangle.$$

□

5.3. Primjer. Neka je $c = (1, 0)$ i $d = (1, 1)$. Primijenimo li Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije na vektore c, d, dobivamo ortonormiranu bazu $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$$v_1 = \tfrac{1}{||c||} c = (1, 0),$$

$$b_2 = d - (d \mid v_1) v_1 = d - v_1 = (1, 1) - (1, 0) = (0, 1),$$

$$v_2 = \tfrac{1}{||b_2||} b_2 = (0, 1).$$

Primijenimo li pak Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije na vektore d, c, dobivamo ortonormiranu bazu u_1, u_2

$$u_1 = \tfrac{1}{||d||} d = \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1, 1),$$

$$b_2 = c - (c \mid u_1) u_1 = c - \tfrac{1}{\sqrt{2}} u_1 = (1, 0) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1, 1) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}),$$

$$u_2 = \tfrac{1}{||b_2||} b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1, -1).$$

5.4. Zadatak. Gram-Schmidtov postupkom ortogonalizacije ortonormirajte baze u $\mathbb{R}^3$:

(1) $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ i
(2) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0)$.

5.5. Koordinatizacija n-dimenzionalnog unitaranog prostora. Neka je V n-dimenzionalni unitarni prostor nad poljem $K = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Prema teoremu 5.2 postoji uređena ortonormirana baza $B = (v_1, \dots, v_n)$ prostora V. Ako je $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u K^n, onda je koordinatizacija

$$K_B \colon V \to K^n, \qquad K_B \colon\ x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i \mapsto x_B = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

izomorfizam vektorskih prostora V i K^n. Štoviše, za

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i \quad \text{i} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i,$$

imamo

$$(x \mid y) = (\sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} (v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}\,.$$

Znači da koordinatizacija K_B *čuva skalarni produkt* u smislu

$$(x \mid y) = (K_B x \mid K_B y) = (x_B \mid y_B),$$

gdje je $(x \mid y)$ skalarni produkt vektora u V, a $(x_B \mid y_B)$ je kanonski skalarni produkt vektora u K^n.

Znači da svaki n-dimenzionalni unitarni prostor nad poljem $\mathbb{R}$ izgleda isto kao $\mathbb{R}^n$ s kanonskim skalarnim produktom, a svaki n-dimenzionalni unitarni prostor nad poljem $\mathbb{C}$ izgleda isto kao $\mathbb{C}^n$ s kanonskim skalarnim produktom.

5.6. Parsevalova jednakost. Budući da su koordinate vektora u ortonormiranoj bazi Fourierovi koeficijenti dani formulom (4.1), formulu za skalarni produkt $(x \mid y)$ iz prethodnog dokaza možemo zapisati kao tzv. *Parsevalovu jednakost*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i) \overline{(y \mid v_i)}, \tag{5.2}$$

a za normu vrijedi

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid v_i)|^2. \tag{5.3}$$

5.7. Besselova nejednakost. *Ako je $v_1, \dots, v_k$ ortonormirani skup u V, vektor x u V i $Q(x)$ kao u teoremu 5.1, onda je*

$$||x||^2 = ||Q(x)||^2 + \sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2. \tag{5.4}$$

Posebno, vrijedi Besselova nejednakost

$$\sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2 \leq ||x||^2, \tag{5.5}$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

DOKAZ. Stavimo

$$P(x) = x - Q(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i.$$

Tada je po definiciji i teoremu 5.1

$$x = P(x) + Q(x), \quad P(x) \perp Q(x),$$

pa je po Pitagorinom poučku

$$||x||^2 = ||P(x)||^2 + ||Q(x)||^2. \tag{5.6}$$

Budući da je $v_1, \ldots, v_k$ ortonormirana baza od $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, to prema (5.3) za $P(x) \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ imamo

$$||P(x)||^2 = \sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2,$$

pa jednakost (5.4) slijedi iz (5.6).

Ako u (5.5) vrijedi jednakost, onda iz (5.4) slijedi $||Q(x)|| = 0$. No onda je $Q(x) = 0$ i $x = P(x) \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Obratno, ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, onda prema (4.1) imamo $x = P(x)$, pa zbog (5.3) imamo jednakost u (5.5). □

5.8. Potpunost ortonormiranog skupa. *Neka je* $v_1, \ldots, v_n$ *ortonormirani skup vektora u unitarnom prostoru* V. *Tada je ekvivalentno:*

(1) $v_1, \ldots, v_n$ *je ortonormirana baza od* V.

(2) *Za sve* x *u* V *je*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i) v_i.$$

(3) *Za sve* x *u* V *vrijedi Besselova jednakost*

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid v_i)|^2.$$

(4) *Za sve* x *i* y *u* V *vrijedi Parsevalova jednakost*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i) \overline{(y \mid v_i)}.$$

Ortonormirani skup $v_1, \ldots, v_n$ *za koji vrijedi jedno od ova četiri svojstva zovemo potpunim ortonormiranim skupom.*

Dokaz. (1) povlači (4) jer vrijedi (5.2). (4) povlači (3) zbog definicije norme. (3) povlači (2) zbog teorema 5.7 i (4.1). (2) povlači (1) jer po pretpostavci $v_1, \ldots, v_n$ razapinje prostor, a ortonormirani skup jest linearno nezavisan. $\square$

6. Metoda najmanjih kvadrata

6.1. Teorem o projekciji. *Neka je V unitaran prostor i neka je Y konačno dimenzionalni potprostor. Tada za vektor x u V postoje jedinstveni vektori $P(x)$ u Y i $Q(x) \perp Y$ takvi da je*

$$x = P(x) + Q(x).$$

Dokaz. Po pretpostavci je Y konačno dimenzionalni potprostor, pa prema teoremu 5.2 postoji ortonormirana baza $v_1, \ldots, v_k$ od Y. Stavimo

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i, \quad Q(x) = x - P(x).$$

Tada je $x = P(x) + Q(x)$ traženi rastav jer je prema teoremu 5.1 $Q(x) \perp Y$.
Dokažimo jedinstvenost. Ako je $x = P(x) + Q(x) = y + u$ za neki $y \in Y$ i $u \perp Y$, onda je $P(x) - y = u - Q(y)$ i vrijedi

$$P(x) - y \in Y \quad \text{i} \quad u - Q(x) \perp Y.$$

Odavle slijedi

$$u - Q(x) \perp u - Q(x),$$

što povlači $u - Q(x) = 0$, odnosno $u = Q(x)$. No onda mora biti i $y = P(x)$. $\square$

6.2. Teorem o najboljoj aproksimaciji. *Neka je V unitaran prostor i neka je Y konačno dimenzionalni potprostor. Tada za vektor x u V postoji jedinstveni vektor $P(x)$ u Y takav da je*

$$||x - P(x)|| \leq ||x - y|| \quad \textit{za svaki} \quad y \in Y,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $y = P(x)$.

Kažemo da je od svih vektora iz potprostora Y vektor $P(x)$ najbolja aproksimacija od x.

Dokaz. Po pretpostavci je Y konačno dimenzionalni potprostor, pa prema teoremu 5.2 postoji ortonormirana baza $v_1, \ldots, v_k$ od Y. Stavimo

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i, \quad Q(x) = x - P(x).$$

Tada je po teoremu 5.1

$$Q(x) \perp P(x) - y \in Y,$$

pa je po Pitagorinom poučku

$$||x-y||^2 = ||x-P(x)+P(x)-y||^2 = ||x-P(x)||^2 + ||P(x)-y||^2 \geq ||x-P(x)||^2,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $||P(x)-y|| = 0$, odnosno $P(x)-y=0$. Budući da je $||x-P(x)|| < ||x-y||$ za $y \neq P(x)$, vektor $P(x) \in Y$ mora biti jedinstven. Stoga $P(x)$ ne ovisi o izboru ortonormirane baze $v_1, \dots, v_k$ u Y. $\square$

6.3. Primjer. Vektori

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

čine ortonormirani skup u $\mathbb{R}^3$ i razapinju 2-dimenzionalni potprostor $Y = \langle v_1, v_2 \rangle$. Za vektor

$$b = (-1,-2,1)$$

je točka

$$P(b) = (b \mid v_1)v_1 + (b \mid v_2)v_2 = \tfrac{1}{2}(1,-1,0) - \tfrac{2}{3}(1,1,1) = (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{2}{3})$$

najbolja aproksimacija od b točkama iz ravnine Y jer je za sve y iz Y

$$\tfrac{5}{\sqrt{6}} = ||(-1,-2,1) - (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{2}{3})|| \leq ||(-1,-2,1) - y||.$$

Vektor $Q(b) = b - P(b) = (-1,-2,1) - (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{2}{3})$ interpretiramo kao vektor-okomicu na ravninu Y sa hvatištem u točki ravnine $P(b)$ i završetkom u točki $b = Q(b) + P(b)$, a duljinu $\tfrac{5}{\sqrt{6}} = ||Q(b)||$ tog vektora interpretiramo kao udaljenost točke b od ravnine Y.

6.4. Zadatak. Nađite udaljenost točke b od ravnine $\langle v_1, v_2 \rangle$, gdje je

$$v_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}, \quad v_2 = (1,1,-2)/\sqrt{6}, \quad b = (1,0,1).$$

6.5. Metoda najmanjih kvadrata. Neka su dani vektori $a_1, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$ i vektor b koji nije u linearnoj ljusci $Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Tada sistem od m jednadžbi s n nepoznanica

$$Ax - b = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n - b = 0$$

nema rješenja, a najbolje što možemo tražiti su takvi $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ za koje je

$$||a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n - b||^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_{i1}\xi_1 + \dots + \alpha_{in}\xi_n - \beta_i|^2$$

najmanje moguće. Ponekad taj problem zapisujemo kao

$$||a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n - b||^2 \longrightarrow \min.$$

Prema teoremu o najboljoj aproksimaciji rješenje tog problema su oni $x \in \mathbb{R}^n$ za koje je

$$Ax = P(b), \tag{6.1}$$

gdje je $P(b)$ najbolja aproksimacija od b vektorima iz Y. Budući da je $P(b) \in Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, sistem (6.1) uvijek ima rješenje x. Rješavanje sistema (6.1) zovemo *metodom najmanjih kvadrata.*

6.6. Sistem jednadžbi za metodu najmanjih kvadrata. Neka V unitaran prostor, b vektor u V i $Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ potprostor u V razapet vektorima $a_1, \dots, a_n$. Prema teoremu 6.1 postoji jedinstveni

$$P(b) = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \in Y$$

takav da je

$$b - P(b) \perp Y.$$

To je, prema teoremu 4.1, ekvivalentno

$$(\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n - b \mid a_i) = 0 \quad \text{za sve} \quad i = 1, \dots, n,$$

ili, zapisano kao sistem jednadžbi,

$$\begin{aligned} (a_1 \mid a_1)\xi_1 + (a_2 \mid a_1)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_1)\xi_n &= (b \mid a_1), \\ (a_1 \mid a_2)\xi_1 + (a_2 \mid a_2)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_2)\xi_n &= (b \mid a_2), \\ &\vdots \\ (a_1 \mid a_n)\xi_1 + (a_2 \mid a_n)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_n)\xi_n &= (b \mid a_n). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Znači da koeficijente $\xi_1, \dots, \xi_n$ za najbolju aproksimaciju $\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = P(b)$ možemo tražiti rješavanjem sistema jednadžbi (6.2).

6.7. Primjer. Vratimo se primjeru 6.3: zadan je ortonormirani skup

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

u $\mathbb{R}^3$ i vektor

$$b = (-1, -2, 1),$$

a traži se najbolja aproksimacija od b u 2-dimenzionalnom potprostoru $Y = \langle v_1, v_2 \rangle$. Da bismo učinili primjer zanimljivijim, stavimo

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}v_1 + \sqrt{3}v_2 = (2, 0, 1), \\ a_2 &= \sqrt{3}v_2 = (1, 1, 1), \\ a_3 &= \sqrt{2}v_1 - \sqrt{3}v_2 = (0, -2, -1), \end{aligned}$$

pa još uvijek imamo isti $Y = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Sada tražimo

$$P(b) = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$$

rješavanjem sistema jednadžbi (6.2):

$$\begin{aligned} 5\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 &= -1, \\ 3\xi_1 + 3\xi_2 - 3\xi_3 &= -2, \\ -\xi_1 - 3\xi_2 + 5\xi_3 &= 3. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema Gaussovom metodom eliminacija vidimo da sistem nema jedinstveno rješenje. Lako se provjeri da je $x = (\frac{3}{6}, -\frac{7}{6}, 0)$ jedno rješenje, pa je

$$P(b) = \tfrac{3}{6}a_1 - \tfrac{7}{6}a_2 = \tfrac{3}{6}(2, 0, 1) - \tfrac{7}{6}(1, 1, 1) = (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{4}{6}).$$

6.8. Zadatak. Nađite udaljenost točke b od ravnine $\langle a_1, a_2\rangle$, gdje je

$$a_1 = (1,1,1), \quad a_2 = (2,2,-1), \quad b = (1,0,1).$$

6.9. Primjer. Zamislimo si da eksperimentalno mjerimo veličine x i y koje su vezane "zakonom"

$$y = Ax + B,$$

a na nama je odrediti koeficijente A i B. Recimo da smo za (x, y) redom dobili $(1,2)$, $(2,3)$ i $(3,5)$. Tada sistem

$$\begin{aligned} A + B &= 2,\\ 2A + B &= 3,\\ 3A + B &= 5, \end{aligned}$$

nema rješenja i najbolje što možemo je da nepoznanice A i B odredimo metodom najmanjih kvadrata. Sistem prvo zapišemo kao $Aa_1 + Ba_2 = b$, tj.

$$A(1,2,3) + B(1,1,1) = (2,3,5) \quad \text{ili} \quad A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}.$$

a odgovarajući sistem (6.2) kao

$$\begin{aligned} (a_1 \mid a_1)A + (a_2 \mid a_1)B &= (b \mid a_1),\\ (a_1 \mid a_2)A + (a_2 \mid a_2)B &= (b \mid a_2). \end{aligned}$$

To je u našem primjeru sistem

$$\begin{aligned} 14A + 6B &= 23,\\ 6A + 3B &= 10, \end{aligned}$$

a rješenje tog sistema je $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{1}{3}$. Znači da je za taj izbor A i B suma kvadrata

$$|A + B - 2|^2 + |2A + B - 3|^2 + |3A + B - 5|^2$$

najmanja moguća. Nacrtajte pravac $y = \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{3}$ i točke $(1,2)$, $(2,3)$ i $(3,5)$ "dobivene mjerenjem".

6.10. Zadatak. Metodom najmanjih kvadrata odredite koeficijente A i B u "zakonu"

$$y = Ax + B,$$

gdje smo "mjerenjem" za (x, y) redom dobili $(3,7)$, $(4,10)$, $(5,11)$ i $(6,12)$.

7. Teorem o projekciji

7.1. Ortogonalni komplement potprostora. Neka je V unitaran prostor i Y potprostor od V. Tada je zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu

$$Y^{\perp} = \{x \in V \mid (x \mid y) = 0 \text{ za sve } y \in Y\}$$

potprostor od Y. Potprostor $Y^{\perp}$ zovemo ga *ortogonalnim komplementom od* Y.

7.2. Suma potprostora. *Neka su* W *i* U *potprostori od* V. *Skup svih vektora*

$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}$$

zovemo sumom potprostora. Suma potprostora $W + U$ *je vektorski prostor.*

Dokaz. Za vektore $w, w', w'' \in W$ i $u, u', u'' \in U$ i skalar λ imamo

$$(w' + u') + (w'' + u'') = (w' + w'') + (u' + u''), \quad \lambda(w + u) = \lambda w + \lambda u \in W + U.$$

□

7.3. Ortogonalna suma potprostora. *Neka su* W *i* U *potprostori od* V. *Ako je* $W \perp U$, *onda* $W + U$ *zovemo ortogonalnom sumom potprostora i pišemo*

$$W \oplus U.$$

U tom slučaju imamo jedinstveni prikaz svakog elementa $x \in W \oplus U$ *kao sumu*

$$x = w + u, \quad w \in W, \ u \in U.$$

Dokaz. Ako je $w + u = w' + u'$ za neke $w' \in W$ i $u' \in U$, onda je

$$w - w' = u' - u$$

element iz W i U, pa okomitost $W \perp U$ povlači

$$||w - w'||^2 = (w - w' \mid w - w') = (w - w' \mid u' - u) = 0.$$

No tada zbog svojstva norme (3.3) mora biti $w - w' = 0$, što povlači $w' = w$, a onda i $u' = u$. □

Uz uvedenu terminologiju teorem 6.1 možemo iskazati na sljedeći način

7.4. Teorem o projekciji. *Neka je* V *unitaran prostor i neka je* Y *konačno dimenzionalni potprostor. Tada je*

$$V = Y \oplus Y^{\perp}.$$

7.5. Teorem. *Neka je V unitaran konačno dimenzionalni prostor i neka je Y potprostor. Tada je*

$$\dim Y + \dim(Y^{\perp}) = \dim V \qquad \text{i} \qquad (Y^{\perp})^{\perp} = Y.$$

DOKAZ. □

Neka je $v_1, \dots, v_k$ ortonormirana baza u Y i $u_1, \dots, u_r$ ortonormirana baza u $Y^{\perp}$. Tada je $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r$ ortonormirani skup u V. Budući da je po teoremu o projekciji svaki vektor x iz V suma vektora iz Y i $Y^{\perp}$, to je x linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_k$ i vektora $u_1, \dots, u_r$. No to onda znači da je skup

$$v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r$$

ortonormirana baza od V, pa je $k + r = \dim V$. Nadalje, vektor

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i + \sum_{j=1}^{r} (x \mid u_j) u_j$$

je okomit na $Y^{\perp} = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ ako i samo ako su mu Fourierovi koeficijenti $(x \mid u_1) = \cdots = (x \mid u_r) = 0$, odnosno ako i samo ako je $x \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle = Y$. Znači da je $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$.

7.6. Primjedba. Iz gornjeg teorema slijedi da se svaki potprostor $W \subset \mathbb{R}^n$ može napisati kao skup rješenja nekog homogenog sistema jednadžbi. Naime,

$$W = (W^{\perp})^{\perp},$$

pa ako ortonormiranu bazu $e_1, \dots, e_k$ od W nadopunimo do ortonormirane baze $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ od $\mathbb{R}^n$, onda je

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x \mid e_{k+1}) = \cdots = (x \mid e_n) = 0\}.$$

7.7. Zadatak. Napišite potprostor $W = \langle a_1, a_2 \rangle$ kao skup rješenja nekog homogenog sistema jednadžbi, pri čemu je

$$a_1 = (1, 1, 0, 1), \quad a_2 = (0, 1, 1, 0).$$

POGLAVLJE 6

Površina, volumen i determinante

U ovom poglavlju proučavamo osnovna svojstva determinanti kvadratnih matrica. Nakon induktivne definicije dokazujemo da je determinanta multilinearna alternirajuća funkcija stupaca matrice i da je svaka multilinearna alternirajuća funkcija stupaca matrice proporcionalna determinanti. Iz tog svojstva determinante slijedi Cramerovo pravilo o rješavanju kvadratnih sistema jednadžbi, kao i računajne determinate pomoću elementarnih transformacija. Sva su razmatranja provedena za slučaj realnih brojeva, no osim geometrijskih argumenata u prva dva paragrafa i geometrijske interpretacije determinante kao volumena, sve ostale tvrdnje i dokazi vrijede jednako i za kompleksne brojeve. Na kraju poglavlja pomoću determinante na 3×3 matricama definiramo vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$ i dokazujemo njegova osnovna svojstva.

1. Površina paralelograma

1.1. Površina pravokutnika. Zamislimo si $\mathbb{R}^2$ kao euklidsku ravninu, a kanonsku bazu e_1, e_2 kao jedinične vektore u Kartezijevom sustavu. Tada je jedinični kvadrat (s vrhovima $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$) skup svih vektora

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,\ 0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1\},$$

a površina $P(e_1, e_2)$ tog jediničnog kvadrata je 1. Slično, pravokutnik s vrhovima $(0,0)$, $(\alpha, 0)$, $(0, \beta))$, (α, β) je skup svih vektora

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda_1 \alpha e_1 + \lambda_2 \beta e_2,\ 0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1\}, \tag{1.1}$$

a površina tog pravokutnika

$$P(\alpha e_1, \beta e_2) = \alpha\beta \tag{1.2}$$

(baza α puta visina β). Ovdje pretpostavljamo $\alpha, \beta > 0$. Za površinu pravokutnika očito vrijede formule:

$$\begin{aligned} &P(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_1, \beta e_2) = P(\alpha_1 e_1, \beta e_2) + P(\alpha_2 e_1, \beta e_2),\\ &P(\mu\alpha e_1, \beta e_2) = \mu P(\alpha e_1, \beta e_2),\\ &P(\alpha e_1, \beta_1 e_2 + \beta_2 e_2) = P(\alpha e_1, \beta_1 e_2) + P(\alpha e_1, \beta_2 e_2),\\ &P(\alpha e_1, \mu\beta e_2) = \mu P(\alpha e_1, \beta e_2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

To su, za α_1, α_2, β_1, β_2, $\mu > 0$, samo komplicirano zapisane formule

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\beta = \alpha_1\beta + \alpha_2\beta,\\ (\mu\alpha)\beta = \mu(\alpha\beta),\\ \alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2,\\ \alpha(\mu\beta) = \mu(\alpha\beta). \tag{1.4}$$

Ako formulom (1.2) definiramo površinu pravokutnika za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda još uvijek vrijedi (1.3) jer vrijedi (1.4) za sve α_1, α_2, β_1, β_2, $\mu \in \mathbb{R}$. Naravno, u tom slučaju dozvoljavamo i negativne površine, na primjer, $P(-e_1, e_2) = -1$.

Primijetimo da sama definicija (1.1) pravokutnika ne igra nikakvu ulogu u ovom razmatranju, bitna je samo definicija **površine pravokutnika** *(1.2)!*

1.2. Površina paralelograma. Ako su $a, b \in \mathbb{R}^2$, onda definiramo *paralelogram razapet vektorima a i b* kao skup svih vektora

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda_1 a + \lambda_2 b,\ 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\}. \tag{1.5}$$

Naravno, dozvoljavamo i slučaj $a = b$ kada je "paralelogram" razapet vektorima a i a zapravo dužina

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda a,\ 0 \leq \lambda \leq 2\}. \tag{1.6}$$

Iz euklidske geometrije znamo računati površinu paralelograma: to je baza puta visina. Zato je razumno pretpostaviti da svakom paru vektora $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ možemo pridružiti površinu $P(a, b) \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$P(a_1 + a_2, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b), \quad P(\mu a, b) = \mu P(a, b),\\ P(a, b_1 + b_2) = P(a, b_1) + P(a, b_2), \quad P(a, \mu b) = \mu P(a, b). \tag{1.7}$$

Naime, jasno je da μ puta duže stranica daje μ puta veću površinu, a geometrijski možemo interpretirati i jednakost $P(a_1 + a_2, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b)$ (nacrtajte sliku!).

Te su formule u potpunosti u skladu s formulama za površinu pravokutnika (1.3). Međutim, površine dužine (1.6) u euklidskoj ravnini mora biti nula, tj.

$$P(a, a) = 0,$$

što ne slijedi iz svojstava (1.7).

1.3. Definicija. *Kažemo da je funkcija*

$$P\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto P(a, b),$$

površina paralelograma ako za sve $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$ *i* $\mu \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

(1) $P(a_1 + a_2, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b), \quad P(\mu a, b) = \mu P(a, b),$

(2) $P(a, b_1 + b_2) = P(a, b_1) + P(a, b_2), \quad P(a, \mu b) = \mu P(a, b),$

(3) $P(a, a) = 0,$

(4) $P(e_1, e_2) = 1.$

U ovoj definiciji relacije (1) zovemo *linearnost od P u prvom argumentu*, a relacije (2) zovemo *linearnost od P u drugom argumentu.* Budući da je P linearno u oba argumenta, kažemo da je P *bilinearno.*

1.4. Linearnost u prvom argumentu funkcije P povlači (dokažite indukcijom!)

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, b\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i, b),$$

pa imamo formulu koja **sliči distributivnosti množenja s desna** (elementom b) u odnosu na zbrajanje (elemenata $\lambda_i a_i$). Naime, ako pišemo $a \bullet b = P(a, b)$, onda imamo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \bullet b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i \bullet b).$$

1.5. Linearnost u drugom argumentu funkcije P povlači

$$P\left(a, \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j P\left(a, b_j\right)$$

pa imamo formulu koja **sliči distributivnosti množenja s lijeva** (elementom a) u odnosu na zbrajanje (elemenata $\mu_j b_j$). Naime, ako pišemo $a \bullet b = P(a, b)$, onda imamo:

$$a \bullet \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j (a \bullet b_j).$$

1.6. Bilinearnost funkcije P povlači

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j\right) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P\left(a_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j\right) \\ = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \mu_j P\left(a_i, b_j\right) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_j P\left(a_i, b_j\right), \end{aligned}$$

pa imamo formulu koja **sliči pravilu množenja "svaki sa svakim"** elementa $\lambda_i a_i$ s elementima $\mu_j b_j$. Naime, ako pišemo $a \bullet b = P(a, b)$, onda imamo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)\bullet\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_j(a_i\bullet b_j).$$

1.7. Lema. *Za bilinearno preslikavanje P je ekvivalentno*[1]

(1) $P(a,a)=0$ *za svaki* $a\in\mathbb{R}^2$,
(2) $P(a,b)=-P(b,a)$ *za sve* $a,b\in\mathbb{R}^2$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2). Zaista, zbog (1) i bilinearnosti imamo

$$0=P(a+b,a+b)=P(a,a)+P(b,a)+P(a,b)+P(b,b)=P(b,a)+P(a,b).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Zaista, za $a=b$ relacija $P(a,b)+P(b,a)=0$ povlači $2P(a,a)=0$, pa imamo $P(a,a)=0$. □

Zbog svojstva $P(a,b)=-P(b,a)$ bilinearnu funkciju P zovemo *alternirajućom* ili *antisimetričnom.*

1.8. Teorem. *Površina paralelograma $P\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ postoji i jedinstvena je.*

DOKAZ. Pretpostavimo da površina paralelograma postoji. Tada za

$$a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2\quad\text{i}\quad b=\beta_1e_1+\beta_2e_2$$

imamo

$$\begin{aligned}P(a,b)&=P(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2,\beta_1e_1+\beta_2e_2)\\&=\alpha_1\beta_1P(e_1,e_1)+\alpha_1\beta_2P(e_1,e_2)+\alpha_2\beta_1P(e_2,e_1)+\alpha_2\beta_2P(e_2,e_2)\\&=\alpha_1\beta_2P(e_1,e_2)+\alpha_2\beta_1P(e_2,e_1)\\&=\alpha_1\beta_2P(e_1,e_2)-\alpha_2\beta_1P(e_1,e_2)\\&=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1.\end{aligned}$$

Ovdje druga jednakost slijedi množenjem svakog sa svakim, treća jednakost vrijedi zbog $P(e_1,e_1)=P(e_2,e_2)=0$, četvrta zbog $P(e_2,e_1)=-P(e_1,e_2)$, peta zbog $P(e_1,e_2)=1$. Budući da je prikaz vektora a i b u kanonskoj bazi jedinstven, to imamo jednu jedinu mogućnost za površinu P:

$$P(a,b)=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1. \tag{1.8}$$

Da bismo dokazali egzistenciju površine, jednostavno je definiramo formulom (1.8) i provjerimo da tako definirana funkcija ima tražena svojstva. Na primjer,

[1] Naše polje je $\mathbb{R}$. Tvrdnja leme vrijedi i za polje $K=\mathbb{C}$ i bilinearnu funkciju $P\colon\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$, ali ne i za polje $K=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i bilinearnu funkciju $P\colon K^2\times K^2\to K$! Zašto?

$$
\begin{aligned}
&P(a+a',b) = (\alpha_1+\alpha_1')\beta_2 - (\alpha_2+\alpha_2')\beta_1 = P(a,b)+P(a',b),\\
&P(\lambda a,b) = (\lambda\alpha_1)\beta_2 - (\lambda\alpha_2)\beta_1 = \lambda P(a,b),\\
&P(a,b) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) = -P(b,a),\\
&P(e_1,e_2) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 0.
\end{aligned}
$$

□

1.9. Determinanta 2×2 matrice. Jedinstvenu površinu paralelograma zovemo *determinantom* 2×2 *matrice* i pišemo

$$\det(a,b) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

ili

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\right) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

1.10. Primjer paralelograma iste površine. Nacrtajte u ravnini, za razne $\lambda\in\mathbb{R}$, paralelograme s vrhovima $(0,0)$, $(2,0)$, $(\lambda,1)$, $(2+\lambda,1)$. Ti paralelogrami imaju iste baze duljine 2 i iste visine 1, pa i iste površine $2\cdot 1$. Funkcija det "računa"

$$\det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 2.$$

Interpretirajte geometrijski formule[2]

$$\det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix} = 2,\quad \det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = 1.$$

1.11. Slučaj nul-stupca. Geometrijski je jasno da je $\det(a,0) = \det(0,b) = 0$. Prva formula slijedi algebarski iz linearnosti funkcije det u drugom argumentu. Naime,

$$\det(a,0) = \det(a,0+0) = \det(a,0)+\det(a,0),$$

a to povlači $\det(a,0)=0$. Formula $\det(0,b)=0$ vrijedi zbog linearnosti funkcije det u prvom argumentu.

2. Volumen paralelepipeda

2.1. Volumen kvadra i paralelepipeda. Zamislimo si $\mathbb{R}^3$ kao euklidski trodimenzionalni prostor, a kanonsku bazu e_1, e_2, e_3 kao jedinične vektore u Kartezijevom sustavu. Tada je volumen $V(e_1,e_2,e_3)$ te jedinične kocke jednak 1. Slično, kvadar sa stranicama $\alpha e_1, \beta e_2, \gamma e_3$ ima volumen

$$V(\alpha e_1,\beta e_2,\gamma e_3) = \alpha\beta\gamma. \tag{2.1}$$

[2] Za funkcije sin i cos vrijedi $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1$.

Geometrijski je jasno značenje formula:

$$(\alpha_1+\alpha_2)\beta\gamma=\alpha_1\beta\gamma+\alpha_2\beta\gamma,\quad (\mu\alpha)\beta\gamma=\mu(\alpha\beta\gamma),$$
$$\alpha(\beta_1+\beta_2)\gamma=\alpha\beta_1\gamma+\alpha\beta_2\gamma,\quad \alpha(\mu\beta)\gamma=\mu(\alpha\beta\gamma),\tag{2.2}$$
$$\alpha\beta(\gamma_1+\gamma_2)=\alpha\beta\gamma_1+\alpha\beta\gamma_2,\quad \alpha\beta(\lambda\gamma)=\lambda(\alpha\beta\gamma).$$

Paralelepiped razapet vektorima $a,b,c\in\mathbb{R}^3$ definiramo kao skup oblika

$$\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x=\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c,\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\le 1\}.\tag{2.3}$$

Naravno, dozvoljavamo i slučaj $b=a$ kada je "paralelepiped" razapet vektorima a, a i c zapravo paralelogram

$$\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x=\lambda a+\mu c,\ 0\le\lambda\le 2,\ 0\le\mu\le 1\}.\tag{2.4}$$

Iz euklidske geometrije znamo računati volumen paralelepipeda: to je površina baze puta visina. Zato je razumno pretpostaviti da svakoj trojki vektora $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ možemo pridružiti volumen $V(a,b,c)\in\mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$V(a_1+a_2,b,c)=V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c),\quad V(\mu a,b,c)=\mu V(a,b,c),$$
$$V(a,b_1+b_2,c)=V(a,b_1,c)+V(a,b_2,c),\quad V(a,\mu b,c)=\mu V(a,b,c),\tag{2.5}$$
$$V(a,b,c_1+c_2)=V(a,b,c_1)+V(a,b,c_2),\quad V(a,b,\mu c)=\mu V(a,b,c).$$

Naime, jasno je da μ puta duža stranica daje μ puta veći volumen, a geometrijski možemo interpretirati i jednakost $V(a_1+a_2,b,c)=V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c)$ (nacrtajte sliku).

Te su formule u potpunosti u skladu s formulama za volumen kvadra (2.2). Međutim, volumen paralelograma (2.4) u ravnini trodimenzionalnog prostora mora biti nula, tj.

$$V(a,a,c)=0,$$

što ne slijedi iz svojstava (2.5).

2.2. Definicija. *Kažemo da je funkcija*

$$V\colon\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad (a,b,c)\mapsto V(a,b,c),$$

volumen paralelepipeda ako za sve $a,a_1,a_2,b,b_1,b_2,c,c_1,c_2\in\mathbb{R}^3$ *i* $\mu\in\mathbb{R}$ *vrijedi*

(1) $V(a_1+a_2,b,c)=V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c),\quad V(\mu a,b,c)=\mu V(a,b,c),$

(2) $V(a,b_1+b_2,c)=V(a,b_1,c)+V(a,b_2,c),\quad V(a,\mu b,c)=\mu V(a,b,c),$

(3) $V(a,b,c_1+c_2)=V(a,b,c_1)+V(a,b,c_2),\quad V(a,b,\mu c)=\mu V(a,b,c),$

(4) $V(a,a,c)=0,\quad V(a,b,a)=0,\quad V(a,b,b)=0,$

(5) $V(e_1,e_2,e_3)=1.$

U ovoj definiciji relacije (1) zovemo *linearnost od* V *u prvom argumentu*, relacije (2) zovemo *linearnost od* V *u drugom argumentu*, a relacije (3) zovemo *linearnost od* V *u trećem argumentu*. Budući da je V linearno u sva tri argumenta, kažemo da je V *trilinearno*. Svojstvo trilinearnosti treba shvatiti kao poopćenje svojstva množenja brojeva (2.2).

2.3. Trilinearnost za višestruke sume. Trilinearnost povlači

$$\begin{aligned}
V\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i, \sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j, \sum_{k=1}^{p}\nu_k c_k\right) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i V\left(a_i, \sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j, \sum_{k=1}^{p}\nu_k c_k\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sum_{j=1}^{m}\mu_j V\left(a_i, b_j, \sum_{k=1}^{p}\nu_k c_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sum_{j=1}^{m}\mu_j \sum_{k=1}^{p}\nu_k V\left(a_i, b_j, c_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_j\nu_k V\left(a_i, b_j, c_k\right),
\end{aligned}$$

pa imamo formulu koja **sliči pravilu množenja "svaki sa svakim"** elemenata $\lambda_i a_i$, elemenata $\mu_j b_j$ i elemenata $\nu_k c_k$. Naime, ako pišemo $a \bullet b \bullet c = V(a,b,c)$, onda imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)\bullet\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right)\bullet\left(\sum_{k=1}^{p}\nu_k c_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_j\nu_k (a_i \bullet b_j \bullet c_k).$$

Tu formulu trebamo shvatiti kao poopćenje pravila množenja "svaki sa svakim" za produkte višestrukih suma brojeva

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j\right)\left(\sum_{k=1}^{p}\nu_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_j\nu_k.$$

2.4. Lema. *Za trilinearno preslikavanje V je ekvivalentno:*
(1) $V(a,a,c) = 0$ *za svaki* $a \in \mathbb{R}^2$,
(2) $V(a,b,c) = -V(b,a,c)$ *za sve* $a, b \in \mathbb{R}^2$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2). Zaista, zbog (1) i trilinearnosti imamo

$$\begin{aligned}
0 = V(a+b, a+b, c) &= V(a,a,c) + V(b,a,c) + V(a,b,c) + V(b,b,c)\\
&= V(b,a,c) + V(a,b,c).
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Zaista, za $a = b$ relacija $V(a,b,c) + V(b,a,c) = 0$ povlači $2V(a,a,c) = 0$, pa imamo $V(a,a,c) = 0$. □

Primijetimo da je ovaj dokaz u suštini prepisani dokaz leme 1.7. Naravno, na isti način vidimo da je $V(a,b,a) = 0$ za sve a ekvivalentno $V(a,b,c) = -V(c,b,a)$ za sve a i c. Zbog svojstva

$$V(a,b,c) = -V(b,a,c), \quad V(a,b,c) = -V(c,b,a), \quad V(a,b,c) = -V(a,c,b),$$

trilinearnu funkciju V zovemo *alternirajućom*.

2.5. Teorem. *Volumen paralelepipeda* $V\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *postoji i jedinstven je.*

DOKAZ. Pretpostavimo da volumen paralelepipeda postoji. Tada za

$$a = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{j=1}^{3} \beta_j e_j, \quad c = \sum_{k=1}^{3} \gamma_k e_k,$$

imamo

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{3} \beta_j e_j, \sum_{k=1}^{3} \gamma_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \alpha_i \beta_j \gamma_k V(e_i, e_j, e_k) \\ &= \sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \alpha_i \beta_j \gamma_k V(e_i, e_j, e_k) \\ &= \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(2)} \gamma_{\sigma(3)} V(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) \\ &= \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(2)} \gamma_{\sigma(3)} (-1)^{\sigma} V(e_1, e_2, e_3) \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(2)} \gamma_{\sigma(3)} \\ &= \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 \\ &\quad + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1. \end{aligned}$$

Ovdje druga jednakost slijedi množenjem svakog sa svakim, primijetimo da se u sumi javljaju i članovi poput $\alpha_1\beta_1\gamma_3 V(e_1, e_1, e_3)$, a koji je nula zbog $V(e_1, e_1, e_3) = 0$. Suma $\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}$ označava da uzimamo samo indekse i, j, k koji su međosobno različiti. Budući da za indekse i, j, k koji nisu međosobno različiti $V(e_i, e_j, e_k) = 0$, treća jednakost vrijedi. Suma $\sum_\sigma$ označava sumu po svim permutacijama skupa $\{1, 2, 3\}$. Budući da su za permutaciju σ indeksi $i = \sigma(1)$, $j = \sigma(2)$ i $k = \sigma(3)$ međosobno različiti, to četvrta jednakost vrijedi jer smo samo malo drugačije zapisali sumu po međusobno različitim indeksima i, j, k. Oznaka $(-1)^\sigma = \pm 1$ je definirana relacijom

$$(-1)^\sigma V(e_1, e_2, e_3) = V(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}).$$

Na primjer, $V(e_1, e_3, e_2) = -V(e_1, e_2, e_3)$, pa je $(-1)^\sigma = -1$ za permutaciju $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 2$. Zato po definiciji vrijedi peta jednakost. Šesta jednakost vrijedi zbog $V(e_1, e_3, e_2) = 1$, a sedma jednakost daje formulu za $(-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(2)} \gamma_{\sigma(3)}$ za sve permutacije σ.

Budući da je prikaz vektora a, b i c u kanonskoj bazi jedinstven, to imamo jednu jedinu mogućnost za volumen V:

$$V(a,b,c) = \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1. \tag{2.6}$$

Da bismo dokazali egzistenciju volumena V, jednostavno ga definiramo formulom (2.6) i provjerimo da tako definirana funkcija ima sva tražena svojstva. $\square$

2.6. Determinanta 3×3 **matrice.** Jedinstveni volumen paralelepipeda zovemo *determinantom* 3×3 *matrice* i pišemo

$$\det(a,b,c) = \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1,$$

ili

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}\right) = \det(a,b,c).$$

Formulu za determinantu 3×3 matrice možemo zapamtiti po *Sarrusovom pravilu*: napišemo matricu

$$\begin{matrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3\end{matrix}$$

i zbrajamo produkte po "glavnim dijagonalama" i oduzimamo produkte po "sporednim dijagonalama":

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \beta_3\gamma_2\alpha_1 - \gamma_3\alpha_2\beta_1.$$

2.7. Zadatak. Dokažite da je determinata transponirane 3×3 matrice A^t jednaka determinanti početne matrice A, tj.

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}.$$

2.8. Laplaceov razvoj 3×3 **determinante.** Sarrusovo pravilo vrijedi samo za determinante matrica tipa 3×3. Pravilo koje vrijedi općenito je tzv. Laplaceov razvoj determinante. Na primjer, Laplaceov razvoj determinante matrice tipa 3×3 po trećem stupcu je

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix} = \gamma_1\det\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix} - \gamma_2\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix} + \gamma_3\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix},$$

a Laplaceov razvoj determinante po prvom retku je

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix} = \alpha_1\det\begin{pmatrix}\beta_2 & \gamma_2\\ \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix} - \beta_1\det\begin{pmatrix}\alpha_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \gamma_3\end{pmatrix} + \gamma_1\det\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix}.$$

Općenito je Laplaceov razvoj po nekom stupcu (ili retku) suma elemenata u tom stupcu (odnosno retku) množenih determinantama 2×2 matrica dobivenih brisanjem retka i stupca u kojem se element nalazi, a predznaci se biraju po pravilu

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

2.9. Napomena. Ponekad pravilo o Laplaceovom razvoju koristimo za preglednije zapisivanje formula. Na primjer, ako su G_1, G_2 i G_3 vektori i $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, 3$, onda izraz

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)G_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)G_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)G_3$$

kraće zapisujemo kao

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & G_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & G_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & G_3 \end{pmatrix},$$

misleći pritom da treba primijeniti formulu (kao što je ona) za Laplaceov razvoj determinante po trećem stupcu.

3. Determinanta kvadratne matrice

3.1. Determinanta 1×1 matrice. *Determinanta* 1×1 *matrice* α_{11} je sam taj broj α_{11}.

3.2. Determinanta 2×2 matrice. *Determinanta* 2×2 *matrice* je broj

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

3.3. Primjer.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -2, \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -3.$$

3.4. Zadatak. Izračunajte $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\det \begin{pmatrix} i & \sqrt{2} \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

3.5. Determinanta 3×3 matrice. *Determinanta* 3×3 *matrice* je broj

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \alpha_{11} \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} - \alpha_{12} \det \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \alpha_{13} \det \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}.$$

3.6. Primjer.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

3.7. Zadatak. Izračunajte $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.8. Zadatak. Pokažite da se definicija 3.5 determinante 3×3 matrice podudara s definicijom iz točke 2.6.

3.9. Oznake za brisanje stupaca i redaka matrice. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ matrica tipa $n \times n$, zapisana po stupcima kao $A = (a_1, \dots, a_n)$. Za proizvoljne indekse $j, k \in \{1, \dots, n\}$ označimo s

$$A_{jk} = (a_1^{(k)}, \dots, a_{j-1}^{(k)}, a_{j+1}^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$$

matricu tipa $(n-1) \times (n-1)$ dobivenu od matrice A **brisanjem j-tog stupca i k-tog retka u matrici** A. Posebno, **u matrici A_{jk} nema matričnog elementa** α_{kj}. Naša oznaka $a_1^{(k)}$ znači da je u prvom stupcu a_1 brisana k-ta koordinata. Matricu A_{jk} možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varnothing_k & \varnothing_k & \dots & \varnothing_{kj} & \dots & \varnothing_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

gdje smo s oznakom $\varnothing$ za prazan skup naznačili da je izostavljen j-ti stupac i k-ti redak iz matrice A. Na primjer,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 100 & 2 & 3 \\ 1 & 200 & -1 & 2 \\ 200 & 100 & 300 & 600 \\ 7 & 100 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.10. Determinanta $n \times n$ matrice. *Determinanta $n \times n$ matrice* $A = (\alpha_{ij})$ je broj

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \alpha_{1j} \det A_{j1}.$$

U ovoj induktivnoj definiciji determinante $n \times n$ matrice A koristimo (po pretpostavci već definirane) determinante $(n-1) \times (n-1)$ matrica A_{j1} dobivenih brisanjem **j-tog stupca i prvog retka u matrici** A. Formulu si možemo bolje predočiti ako pišemo

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \alpha_{1j} \det(a_1^{(1)}, \dots, a_{j-1}^{(1)}, a_{j+1}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}). \tag{3.1}$$

Također valja uočiti da sumiramo po svim elementima **prvog retka** matrice A i da predznaci u $(-1)^{1+j}\alpha_{1j}$ alterniraju

$$\alpha_{11}, \quad -\alpha_{12}, \quad \alpha_{13}, \quad -\alpha_{14}, \dots, \quad (-1)^{1+n}\alpha_{1n}.$$

Valja primijetiti da je definicija za $n = 2$ i 3 u skladu s općom definicijom determinante $n \times n$ matrice.

3.11. Zadatak. Računanjem pokažite da je $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -5.$

3.12. Determinanta jedinične matrice.

$$\det I = \det(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je očita. Također je očito da brisanjem prvog retka i prvog stupca u jediničnoj $n \times n$ matrici I_n dobivamo jediničnu $(n-1) \times (n-1)$ matricu I_{n-1}, pa iz definicije slijedi

$$\det I_n = 1 \cdot \det I_{n-1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

3.13. Zadatak. Dokažite formulu za determinantu donje trokutaste matrice

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn}.$$

4. Osnovni teorem o determinanti

4.1. Linearne funkcije. Za funkciju

$$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)$$

kažemo da je *linearna funkcija na* $\mathbb{R}^n$ ako za sve vektore $x, x', x'' \in \mathbb{R}^n$ i skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi svojstvo linearnosti

$$g(x' + x'') = g(x') + g(x''), \quad g(\lambda x) = \lambda g(x). \tag{4.1}$$

Općenitije, za preslikavanje

$$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto g(x)$$

kažemo da je *linearno preslikavanje sa* $\mathbb{R}^n$ *u* $\mathbb{R}^m$ ako za sve vektore $x, x', x'' \in \mathbb{R}^n$ i skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi svojstvo linearnosti (4.1).

4.2. Napomena. *Kompozicija linearnih preslikavanja g i f je linearno preslikavanje jer očito vrijedi*

$$f(g(x' + x'')) = f(g(x') + g(x'')) = f(g(x')) + f(g(x'')),$$
$$f(g(\lambda x)) = f(\lambda g(x)) = \lambda f(g(x)).$$

4.3. Napomena. *Za linearnu funkciju g vrijedi $g(0) = 0$ jer je*

$$g(0) = g(0 + 0) = g(0) + g(0).$$

4.4. Determinanta na skupu $n \times n$ matrica. Matrice tipa $n \times n$ su po definiciji n-torke $(a_1, \dots, a_n)$ vektora $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, pa skup svih $n \times n$ matrica označavamo kao Kartezijev produkt

$$\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^n.$$

Determinanta je funkcija

$$\det\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}, \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \det(a_1, \dots, a_n)$$

koja svakoj matrici $A = (a_1, \dots, a_n)$ pridružuje broj $\det A$. Ako želimo naglasiti o kojoj funkciji det govorimo napisat ćemo $\det_n$.

4.5. Multilinearne funkcije. Za funkciju

$$f\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}, \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$$

kažemo da je *linearna u i-toj varijabli (argumentu)* ako je za svaki niz od $n-1$ vektora $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ funkcija

$$x \mapsto g(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

linearna funkcija na $\mathbb{R}^n$, tj. vrijedi svojstvo linearnosti (4.1). Kažemo da je funkcija *n-linearna* ili *multilinearna funkcija* ako je linearna u i-toj varijabli za svaki indeks $i = 1, \dots, n$. Očito je 1-linearna funkcija linearna funkcija, a u slučaju 2-linearne funkcije govorimo o *bilinearnoj* funkciji.

4.6. Napomena. *Budući da za linearnu funkciju g vrijedi $g(0) = 0$, to za multilinearnu funkciju f vrijedi*

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0.$$

4.7. Lema. *Determinanta je multilinearna funkcija.*

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za $n - 1 \geq 1$, tj. da je

$$\det{}_{n-1}\colon (\mathbb{R}^{n-1})^{n-1} \to \mathbb{R}$$

multilinearna funkcija. Neka je indeks $i \in \{1, \dots, n\}$ i neka su dani vektori $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^n$. Kao u točki 3.9 označimo s $x^{(1)}$ vektor u $\mathbb{R}^{n-1}$ dobiven iz vektora x u $\mathbb{R}^n$ brisanjem prve koordinate ξ_1. Tada je preslikavanje

$$x \mapsto x^{(1)}$$

linearno preslikavanje s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^{n-1}$. Iz toga slijedi da je za $j > i$ kompozicija

$$x \mapsto x^{(1)} \mapsto \det{}_{n-1}(a_1^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, x^{(1)}, a_{i+1}^{(1)}, \dots, a_{j-1}^{(1)}, a_{j+1}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$$

linearna funkcija jer je $\det_{n-1}$ linearna u i-toj varijabli, a a za $j < i$ je kompozicija

$$x \mapsto x^{(1)} \mapsto \det{}_{n-1}(a_1^{(1)}, \dots, a_{j-1}^{(1)}, a_{j+1}^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, x^{(1)}, a_{i+1}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$$

linearna funkcija jer je $\det_{n-1}$ linearna u $(i-1)$-toj varijabli. No onda i za sumu

$$x \mapsto g(x) = \sum_{j \neq i} (-1)^{1+j} \alpha_{1j} \det_{n-1}(a_1^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, x^{(1)}, a_{i+1}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$$

vrijedi svojstvo linearnosti (4.1). U definiciji determinante (3.1) imamo još i član za $j = i$

$$x \mapsto (-1)^{1+i} \xi_1 \det_{n-1}(a_1^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, a_{i+1}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$$

za koji očito vrijedi svojstvo linearnosti. Znači da je

$$x \mapsto \det(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

linearna funkcija. $\square$

4.8. Zadatak. Dokažite formulu za determinantu gornje trokutaste matrice

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}.$$

4.9. Alternirajuće multilinearne funkcije. Za multilinearnu funkciju

$$f\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}, \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$$

kažemo da je *alternirajuća* ako za sve n-torke vektora $a_1, \dots, a_n$ i sve parove indeksa $i < j$ vrijedi

$$\begin{aligned} &f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \\ &= -f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Obično (neprecizno) kažemo da zamjenom mjesta dvaju vektora u alternirajućoj funkciji mijenjamo predznak. Kopirajući dokaze lema 1.7 i 2.4 vidimo da je uvjet (4.2) za sve vektore $a_i, a_j \in \mathbb{R}^n$ ekvivalentan uvjetu

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_n) = 0 \tag{4.3}$$

za sve vektore $a \in \mathbb{R}^n$.

4.10. Napomena. Valja primijetiti da je svojstvo (4.2) alternirajuće funkcije, ili njemu ekvivalentno svojstvo (4.3), dovoljno provjeriti za sve susjedne parove indeksa $k < k+1$ jer nam je potreban neparan broj $(j-i)+(j-i-1)$ zamjena susjednih stupaca da bismo zamijenili mjesta stupcima

a_i i a_j:

$$
\begin{aligned}
&(\dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots)\\
\mapsto&(\dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots)\\
&\quad\vdots\\
\mapsto&(\dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_i, a_j, a_{j+1}, \dots)\\
\mapsto&(\dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j, a_i, a_{j+1}, \dots)\\
&\quad\vdots\\
\mapsto&(\dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_j, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots)\\
\mapsto&(\dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots).
\end{aligned}
$$

Na primjer, za par indeksa $1 < 4$ trebamo $3 + 2$ zamjene susjednih stupaca

$$
\begin{aligned}
&(a_1, a_2, a_3, a_4)\\
\mapsto&(a_2, a_1, a_3, a_4)\\
\mapsto&(a_2, a_3, a_1, a_4)\\
\mapsto&(a_2, a_3, a_4, a_1)\\
\mapsto&(a_2, a_4, a_3, a_1)\\
\mapsto&(a_4, a_2, a_3, a_1).
\end{aligned}
$$

4.11. Lema. *Determinanta je alternirajuća multilinearna funkcija.*

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $n \geq 2$. Za $n = 2$ imamo

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = -\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{22} & \alpha_{21} \end{pmatrix}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za $n-1$. Prema prethodnoj napomeni dovoljno je dokazati svojstvo (4.3) za sve susjedne parove indeksa $i < i + 1$ i vektore a. Po definiciji (3.1) imamo

$$
\begin{aligned}
&\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a, a_{i+2}, \dots, a_n) =\\
&\sum_{j<i} (-1)^{1+j}\alpha_{1j} \det{}_{n-1}(a_1^{(1)}, \dots, a_{j-1}^{(1)}, a_{j+1}^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, a^{(1)}, a^{(1)}, a_{i+2}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})\\
&+ (-1)^{1+i}\alpha_1 \det{}_{n-1}(a_1^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, a^{(1)}, a_{i+2}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})\\
&(-1)^{1+i+1}\alpha_1 \det{}_{n-1}(a_1^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, a^{(1)}, a_{i+2}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}) +\\
&\sum_{j>i+1} (-1)^{1+j}\alpha_{1j} \det{}_{n-1}(a_1^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, a^{(1)}, a^{(1)}, a_{i+2}^{(1)}, \dots, a_{j-1}^{(1)}, a_{j+1}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pri čemu su prva i zadnja suma jednake nuli jer se u alternirajućoj funkciji $\det_{n-1}$ isti vektor $a^{(1)}$ javlja u dva argumenta, a dva sumanda za $j = i, i+1$ se krate jer je $(-1)^{1+i} + (-1)^{1+i+1} = 0$. $\square$

4.12. Lema. *Neka je $g\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ multilinearna alternirajuća funkcija. Ako je niz vektora $(a'_1, \dots, a'_n)$ dobiven uzastopnom primjenom elementarnih transformacija iz niza $(a_1, \dots, a_n)$, onda postoji $\mu \neq 0$ takav da je*

$$g(a_1, \dots, a_n) = \mu g(a'_1, \dots, a'_n).$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdnju u slučaju elementarne transformacije

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a'_1, \dots, a'_n).$$

U slučaju elementarne transformacije zamjene mjesta dvama vektorima imamo $\mu = -1 \neq 0$ jer je g alternirajuća. U slučaju elementarne transformacije množenja i-tog vektora skalarom $\lambda \neq 0$ imamo $\mu = 1/\lambda \neq 0$ jer je g linearna u i-tom argumentu. U slučaju elementarne transformacije dodavanja λa_i vektoru a_j imamo $\mu = 1$ jer zbog linearnosti u j-tom argumentu

$$\begin{aligned}
&g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_j + \lambda a_i, \dots, a_n)\\
&= g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_n)\\
&\ \ + \lambda g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_i, \dots, a_n)\\
&= 1 \cdot g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_n),
\end{aligned}$$

pri čemu je $g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_i, \dots, a_n) = 0$ jer je g alternirajuća. □

4.13. Osnovni teorem o determinanti. *Neka je $f\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ multilinearna alternirajuća funkcija. Tada je*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det(x_1, \dots, x_n).$$

Posebno, determinanta je jedinstvena multilinearna alternirajuća funkcija f takva da je

$$f(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Dokaz. Već smo dokazali da je $\det\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ multilinearna alternirajuća funkcija i da je $\det I = 1$. Po pretpostavci je f multilinearna alternirajuća funkcija. Stavimo

$$\kappa = f(e_1, \dots, e_n) \quad \text{i} \quad g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \kappa \det(x_1, \dots, x_n).$$

Tvrdimo da je g multilinearna alternirajuća funkcija. Naime, f i det su linearne u prvoj varijabli, pa

$$f(x' + x'', x_2, \dots, x_n) = f(x', x_2, \dots, x_n) + f(x'', x_2, \dots, x_n) \quad \text{i}$$
$$\kappa \det(x' + x'', x_2, \dots, x_n) = \kappa \det(x', x_2, \dots, x_n) + \kappa \det(x'', x_2, \dots, x_n)$$

povlači

$$g(x' + x'', x_2, \dots, x_n) = g(x', x_2, \dots, x_n) + g(x'', x_2, \dots, x_n).$$

Očito na taj način možemo provjeriti svojstva linearnosti od g u svakoj varijabli. Budući da pri zamjeni mjesta dvaju vektora i $\kappa \det(a_1, \dots, a_n)$ i $f(a_1, \dots, a_n)$ mijenjaju predznak, onda je jasno da mijenjaja predznak i $g(a_1, \dots, a_n)$. Znači da je g alternirajuća funkcija.

Ako su vektori $a_1, \dots, a_n$ baza u $\mathbb{R}^n$, onda prema teoremu 3.1.12 tu bazu možemo elementarnim transformacijama prevesti u kanonsku bazu

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (e_1, \dots, e_n),$$

pa prema lemi 4.12 postoji μ takav da je

$$g(a_1, \dots, a_n) = \mu g(e_1, \dots, e_n) = \mu(f(e_1, \dots, e_n) - \kappa \det(e_1, \dots, e_n)).$$

Sada $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ i $\kappa = f(e_1, \dots, e_n)$ povlači $g(a_1, \dots, a_n) = 0$. Ako vektori $a_1, \dots, a_n$ nisu baza, onda su linearno zavisni i svođenjem na stepenastu formu elementarnim transformacijama dobivamo niz vektora

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (c_1, \dots, c_k, 0 \dots, 0)$$

za $k < n$, pa prema lemi 4.12 postoji μ takav da je

$$g(a_1, \dots, a_n) = \mu g(c_1, \dots, c_k, 0 \dots, 0).$$

Sada linearnost funkcije g u n-tom argumentu povlači $g(a_1, \dots, a_n) = 0$. Znači da za svaku n-torku vektora $a_1, \dots, a_n$ vrijedi $g(a_1, \dots, a_n) = 0$, odnosno

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det(a_1, \dots, a_n).$$

Time je dokazana prva tvrdnja teorema. Ako je $f(e_1, \dots, e_n) = 1$, onda slijedi da je f determinanta. $\square$

4.14. Primjedbe. Kao i za $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, determinantu možemo interpretirati kao volumen paralelotopa[3] u $\mathbb{R}^n$. Intuitivno osnovni teorem o determinanti znači da postoji samo jedan način mjerenja volumena paralelotopa, ovisno o tome kojom jedinicom za mjeru $\gamma = f(e_1, \dots, e_n)$ mjerimo kocku $(e_1, \dots, e_n)$. Taj jedinstveni način je multilinearna alternirajuća funkcija $f = \gamma \det$.

4.15. Zadatak. Za $n \times n$ matrice $A = (\alpha_{ij})$ induktivno definirajte funkciju

$$\det\nolimits_\bullet A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \alpha_{nj} \det\nolimits_\bullet (a_1^{(n)}, \dots, a_{j-1}^{(n)}, a_{j+1}^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}) \tag{4.4}$$

i dokažite da je $\det_\bullet$ multilinearna alternirajuća i da je $\det_\bullet I = 1$. Tada iz osnovnog teorema o determinanti slijedi formula[4] $\det A = \det_\bullet A$.

Ponavljajući argumente iz dokaza teorema 4.13 dobivamo:

---

[3] *Paralelotop razapet vektorima* $a_1, \dots, a_n$ definiramo kao skup

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_1 a + \dots + \lambda_n a_n,\ 0 \le \lambda_1, \dots, \lambda_n \le 1\}.$$

[4] Ta se formula zove Lapalaceov razvoj determinante po n-tom retku.

4.16. Teorem. *Vektori* $a_1, \ldots, a_n$ *su baza od* $\mathbb{R}^n$ *ako i samo ako je*

$$\det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Dokaz. Ako su vektori $a_1, \ldots, a_n$ baza u $\mathbb{R}^n$, onda prema teoremu 3.1.12 tu bazu možemo elementarnim transformacijama prevesti u kanonsku bazu

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim (e_1, \ldots, e_n),$$

pa prema lemi 4.12 postoji $\mu \neq 0$ takav da je

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \mu \det(e_1, \ldots, e_n) = \mu \neq 0.$$

Obrat. Ako vektori $a_1, \ldots, a_n$ nisu baza, onda su linearno zavisni i svođenjem na stepenastu formu elementarnim transformacijama dobivamo niz vektora

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim (c_1, \ldots, c_k, 0 \ldots, 0)$$

za $k < n$, pa prema lemi 4.12 postoji μ takav da je

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \mu \det(c_1, \ldots, c_k, 0 \ldots, 0).$$

Sada linearnost det u n-tom argumentu povlači $\det(a_1, \ldots, a_n) = 0$. $\square$

4.17. Zadatak. Računajući determinante pokažite da su stupci matrica

$$J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

tri uređene baze u $\mathbb{C}^2$.

5. Determinanta matrice i elementarne transformacije

5.1. Računanje determinante matrice pomoću elementarnih transformacija. Osim u slučaju 2×2 matrica i (možda) 3×3 matrica, determinantu "konkretne" matrice **ne računamo** po formuli danoj u definiciji determinante. Najefikasniji način računanja determinante "konkretne" matrice je izvođenjem elementarnih transformacija

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a'_1, \ldots, a'_n)$$

na stupcima matrice i korištenjem veze između

$$\det(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{i} \quad \det(a'_1, \ldots, a'_n).$$

5.2. Zamjena mjesta dvaju vektora. Budući da je po definiciji funkcija det alternirajuća, imamo

$$\begin{aligned} &\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\ &= -\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

5.3. Množenje jednog vektora skalarom $\lambda \neq 0$. Budući da je po definiciji funkcija det multilinearna, imamo

$$\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, \lambda a, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \lambda \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

5.4. Pribrajanje jednog vektora pomnoženog skalarom drugom vektoru. Budući da je funkcija det multilinearna i alternirajuća, imamo

$$\begin{aligned}
&\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b + \lambda a, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\
&\quad + \lambda \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

(Ovdje smo zapisali slučaj $i < j$, no isto vrijedi i za $i > j$.) Znači da nakon ove transformacije na stupcima matrice determinanta ostaje ista.

5.5. Računanje determinante matrice. *Računanje determinante pomoću elementarnih transformacija svodi se, u suštini, na uzastopnu primjenu transformacije trećeg tipa: Odaberemo li jedan matrični element $\alpha_{ki} \neq 0$ u i-tom stupcu $a = a_i$ matrice*

$$A = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

i odaberemo li $\lambda = -\alpha_{kj}/\alpha_{ki}$, onda u j-tom stupcu matrice

$$A' = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j + \lambda a, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

vektor $a_j + \lambda a$ ima k-tu koordinatu jednaku $\alpha_{kj} + (-\alpha_{kj}/\alpha_{ki})\alpha_{ki} = 0$. Uzastopnom primjenom takovih transformacija dobijamo matricu u kojoj su svi elementi u k-tom retku nula, osim početnog $\alpha_{ki} \neq 0$. Stavimo $k_1 = k$ i $i_1 = i$. Na primjer,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ovdje smo odabrali $\alpha_{32} = 1 \neq 0$. U prvom koraku mijenjamo prvi stupac i biramo $\lambda = -2$. U drugom koraku mijenjamo treći stupac i biramo $\lambda = 3$. Četvrti stupac ne mijenjamo jer na trećem mjestu već stoji 0. Stavimo $k_1 = 3$ i $i_1 = 2$.

Nakon toga biramo $\alpha_{ki} \neq 0$, $i \neq i_1$. Ako takav ne postoji, matrica ima nul-stupac i determinanta je nula. Ako postoji, nastavimo postupak kao ranije. Primijetimo da pritom nećemo mijenjati postojeći k_1-ti redak. Stavimo $k_2 = k$ i $i_2 = i$. U našem primjeru možemo odabrati $\alpha_{41} = -1 \neq 0$. U prvom koraku mijenjamo drugi stupac i biramo $\lambda = 1$. U drugom koraku mijenjamo treći stupac i biramo $\lambda = 5$. U trećem koraku mijenjamo četvrti stupac i biramo $\lambda = 5$. Stavimo $k_2 = 4$ i $i_2 = 1$.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \cdots = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 14 & 18 \\ -3 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nakon toga biramo $\alpha_{ki} \neq 0$, $i \neq i_1, i_2$ itd. U postupku dobivamo ili nul-stupac ili završavamo s $\alpha_{k_n i_n} \neq 0$. U potonjem slučaju primijenimo elementarne transformacije drugog tipa i dobivamo

$$\det A = \alpha_{k_1 i_1} \alpha_{k_2 i_2} \dots \alpha_{k_n i_n} \det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

za neku permutaciju σ. Na kraju primijenimo elementarne transformacije zamjene stupaca i svojstvo $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. U našem primjeru

$$10 \det \begin{pmatrix} -3 & 2 & -7/5 & 18 \\ 3 & -1 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = 10 \det \begin{pmatrix} 6/5 & 3/5 & -7/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 10(-1/5) \det \begin{pmatrix} 6/5 & 3/5 & -7/5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = -2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na kraju imamo $\det A = -2 \det(e_4, e_3, e_2, e_1) = -2 \det(e_1, e_2, e_3, e_4) = -2$.

5.6. Zadatak. Korištenjem elementarnih transformacije stupaca matrice izračunajte

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Cramerovo pravilo

6.1. Cramerovo pravilo. *Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$ kvadratna matrica i $\det A \neq 0$. Tada za svaki $b \in \mathbb{R}^n$ sistem jednadžbi*

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b$$

ima jedinstveno rješenje $x \in \mathbb{R}^n$. Štoviše, koordinate ξ_i rješenja x dane su formulom

$$\xi_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(a_1, \dots, a_n)} \quad \text{za sve} \quad i = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Prema teoremu 4.16 pretpostavka $\det A \neq 0$ povlači da su vektori $a_1, \dots, a_n$ baza od $\mathbb{R}^n$, pa sistem $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje x. Znači da postoje $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b.$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
&\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b\,, a_{i+1}, \dots, a_n) \\
&= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \ \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j \ , a_{i+1}, \dots, a_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\
&= \xi_i \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n).
\end{aligned}
$$

Druga jednakost vrijedi zbog linearnosti determinante u i-tom argumentu. Ako je $j \neq i$, onda se u nizu $a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n$ vektor a_j pojavljuje dvaput, pa zbog alternirajućeg svojstva determinante imamo

$$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0$$

i treća jednakost vrijedi. Budući da je po pretpostavci $\det A \neq 0$, imamo formulu

$$\xi_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(a_1, \dots, a_n)}.$$

□

6.2. Pitanje. Da li se sistem

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

može riješiti Cramerovim pravilom? DA NE

6.3. Zadatak. Riješite sistem

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cramerovim pravilom i potom Gaussovom metodom.

7. Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$

Važnu ulogu u geometriji prostora $\mathbb{R}^3$ igra vektorski produkt. Općenito na $\mathbb{R}^n$ postoje algebarske strukture koje u nekim aspektima poopćuju vektorski produkt, ali ni jedna od njih nije sasvim kao vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$.

7.1. Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$. Za vektore $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiramo *vektorski produkt vektora a i b* kao vektor

$$a \times b = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 \tag{7.1}$$

u $\mathbb{R}^3$, što kraće zapisujemo kao

$$a \times b = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & e_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & e_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & e_3\end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Očito je *vektorski produkt u* $\mathbb{R}^3$

$$\times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (a,b) \mapsto a \times b$$

bilinearno preslikavanje[5], tj. vrijedi

$$(a' + a'') \times b = a' \times b + a'' \times b, \quad (\lambda a) \times b = \lambda(a \times b),$$
$$a \times (b' + b'') = a \times b' + a \times b'', \quad a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b),$$

i alternirajuće preslikavanje[6], tj. vrijedi

$$a \times b = -\, b \times a.$$

7.2. Primjer.

$$a = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\ a\times b = \det\begin{pmatrix}1 & -1 & e_1\\ 2 & 0 & e_2\\ 1 & 3 & e_3\end{pmatrix} = 6e_1 - 4e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix}.$$

7.3. Zadatak. Izračunajte $a \times b$ za $a = (1, 1, 1)$ i $b = (1, -1, 0)$.

7.4. Pitanje. Da li je definirano $a \times b$ za $a = b = (1, 1)$? DA NE

7.5. Mješoviti produkt u $\mathbb{R}^3$. Za $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$ skalarni produkt

$$(a \times b \mid c) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\gamma_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma_3, \tag{7.3}$$

zovemo *mješovitim produktom vektora a, b i c.* Očito je

$$(a \times b \mid c) = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

pa zbog alternirajućeg svojstva determinante slijedi

$$(a \times b \mid a) = 0, \qquad (a \times b \mid b) = 0. \tag{7.5}$$

[5]ponekad kažemo i da vrijedi *distributivnost vektorskog množenja u odnosu na zbrajanje* i *homogenost vektorskog množenja u odnosu na množenje skalarom*

[6]ponekad kažemo i da je vektorski produkt *antikomutativno množenje*

7.6. Lema. *Vektori $a, b \in \mathbb{R}^3$ su linearno nezavisni ako i samo ako je njihov vektorski produkt $a \times b \neq 0$.*

DOKAZ. Zbog linearnosti u drugom argumentu imamo $a \times 0 = 0$. Ako je $a = \lambda b$, onda je opet $a \times b = (\lambda b) \times b = \lambda(b \times b) = \lambda 0 = 0$. S druge strane, ako su a i b linearno nezavisni, onda ih možemo nadopuniti do baze a, b, c od $\mathbb{R}^3$ i teorem 4.16 povlači da je mješoviti produkt $(a \times b \mid c) = \det(a, b, c) \neq 0$. No onda je nužno $a \times b \neq 0$. $\square$

7.7. Konstrukcija okomice na ravninu u $\mathbb{R}^3$. Neka su a i b linearno nezavisni vektori. Tada je linearna ljuska $\langle a, b\rangle$ ravnina u $\mathbb{R}^3$. Iz relacije (7.5) i teorema 5.4.1 slijedi da je $a \times b$ okomica na ravninu, odnosno

$$a \times b \perp \langle a, b\rangle.$$

Po teoremu o projekciji 2-dimenzionalnu ravninu $W = \langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}^3$ možemo zadati jednom jednadžbom

$$W = (W^\perp)^\perp = (\mathbb{R}c)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (c \mid x) = 0\}$$

za neki vektor (odnosno bazu) $c \neq 0$ u $W^\perp$. Ako uzmemo $c = a \times b$, onda je

$$W = \langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a \times b \mid x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \det(a, b, x) = 0\}.$$

Tako je, na primjer, za vektore a i b iz primjera 7.2 ravnina $\langle a, b\rangle$ zadana jednadžbom

$$6\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 = 0,$$

odnosno

$$\langle a, b\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & \xi_1 \\ 2 & 0 & \xi_2 \\ 1 & 3 & \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

7.8. Primjer. Neka je

$$\Sigma = c + \langle a, b\rangle = \{x = c + d \mid d \in \langle a, b\rangle\}$$

ravnina u $\mathbb{R}^3$ kroz točku $c = (1, -1, 2)$ paralelna potprostoru razapetom vektorima $a = (1, 1, 0)$ i $b = (0, 1, 1)$. Tada uvjet $x - c = d \in \langle a, b\rangle$ možemo napisati pomoću jednadžbe

$$\det(a, b, x - c) = 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi_1 - 1 \\ 1 & 1 & \xi_2 + 1 \\ 0 & 1 & \xi_3 - 2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{x \mid (\xi_1 - 1) - (\xi_2 + 1) + (\xi_3 - 2) = 0\}. \end{aligned}$$

Kažemo da je

$$(\xi_1 - 1) - (\xi_2 + 1) + (\xi_3 - 2) = 0$$

jednadžba ravnine Σ.

7.9. Zadatak. Napišite jednadžbu ravnine Σ u $\mathbb{R}^3$ kroz točku $c = (1, -1, -1)$ paralelnu potprostoru razapetom vektorima $a = (1, -1, 2)$ i $b = (2, 1, 1)$.

7.10. Udaljenost točke od ravnine u $\mathbb{R}^3$. Ako je x točka i W potprostor u $\mathbb{R}^n$, onda je udaljenost točke x od W jednaka normi $||Q(x)||$ vektora $Q(x) = x - P(x)$ okomitog na potprostor W, a projekciju $P(x) \in W$ računamo metodom najmanjih kvadrata. U slučaju kad je $W = \langle a, b\rangle$ ravnina u $\mathbb{R}^3$ razapeta vektorima a i b, onda je

$$e = \frac{a \times b}{||a \times b||}$$

jedinični vektor okomit na ravninu W, a komponenta od x duž vektora e je

$$Q(x) = (x \mid e)e, \quad ||Q(x)|| = |(x \mid e)| = \frac{|(x \mid a \times b)|}{||a \times b||}.$$

7.11. Primjer. Vratimo se primjeru 5.6.3 iz prethodnog poglavlja u kojem je izračunata udaljenost točke b od ravnine $Y = \langle v_1, v_2\rangle$ u $\mathbb{R}^3$ za vektore

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad b = (-1, -2, 1).$$

Tada je

$$v_1 \times v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ -1 & 1 & e_2 \\ 0 & 1 & e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad ||v_1 \times v_2|| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1,$$

pa je projekcija od b na okomicu $e = v_1 \times v_2$ na ravninu Y jednaka

$$Q(b) = (b \mid e)e = \frac{1+2+2}{\sqrt{6}}\, e = \frac{5}{\sqrt{6}}\, e.$$

Znači da je udaljenost b od Y jednaka $||Q(b)|| = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

7.12. Zadatak 5.6.4. Nađite udaljenost točke b od ravnine $\langle v_1, v_2\rangle$ za

$$v_1 = (1, 1, 1)/\sqrt{3}, \quad v_2 = (1, 1, -2)/\sqrt{6} \quad \text{i} \quad b = (1, 0, 1).$$

7.13. Zadatak. Nađite udaljenost točke d od ravnine $\Pi = c + \langle v_1, v_2\rangle$,

$$v_1 = (1, 1, 1)/\sqrt{3}, \quad v_2 = (1, 1, -2)/\sqrt{6}, \quad c = (1, 1, 1) \quad \text{i} \quad d = (2, 1, 2).$$

(Uputa: Budući da je $d(x - c, y - c) = d(x, y)$, to je udaljenost točke d od ravnine Π jednaka udaljenosti točke $d - c$ od ravnine $\Pi - c = \langle v_1, v_2\rangle$.)

7.14. Lema. *Neka su a, b, c, a', b', c' vektori u $\mathbb{R}^3$. Tada vrijedi*
(7.6)
$$\det\begin{pmatrix}(a' \mid a) & (a' \mid b) & (a' \mid c)\\ (b' \mid a) & (b' \mid b) & (b' \mid c)\\ (c' \mid a) & (c' \mid b) & (c' \mid c)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3'\\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3'\\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3'\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}.$$

Dokaz. Fiksirajmo vektore a', b', c' i označimo s $f(a, b, c)$ lijevu stranu jednakosti (7.6). Budući da je skalarni produkt linearan u drugom argumentu, to prvi stupac
$$\begin{pmatrix}(a' \mid a)\\ (b' \mid a)\\ (c' \mid a)\end{pmatrix}$$
koji se javlja u formuli za f ovisi linearno o a. Zbog toga linearnost determinante u prvom argumentu povlači linearnost od f u prvom argumentu. Na isti način zaključujemo da je f linearna u drugom i u trećem argument. Očito je f alternirajuća funkcija jer je determinanta alternirajuća funkcija. Iz teorema 4.13 slijedi da je
$$f(a, b, c) = f(e_1, e_2, e_3)\det(a, b, c) = f(e_1, e_2, e_3)\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix},$$
pa (7.6) vrijedi jer je
$$f(e_1, e_2, e_3) = \det\begin{pmatrix}(a' \mid e_1) & (a' \mid e_2) & (a' \mid e_3)\\ (b' \mid e_1) & (b' \mid e_2) & (b' \mid e_3)\\ (c' \mid e_1) & (c' \mid e_2) & (c' \mid e_3)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3'\\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3'\\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3'\end{pmatrix}.$$
□

7.15. Teorem. *Za sve $a, b \in \mathbb{R}^3$ vrijedi*
$$||a \times b||^2 = \det\begin{pmatrix}(a \mid a) & (a \mid b)\\ (b \mid a) & (b \mid b)\end{pmatrix} = ||a||^2||b||^2 - |(a \mid b)|^2. \tag{7.7}$$

Dokaz. Ako su vektori a i b linearno zavisni, onda su obje strane (7.7) jednake nuli i jednakost vrijedi. Pretpostavimo zato da su vektori a i b linearno nezavisni. Tada je prema lemi 7.6 $a \times b \neq 0$. Budući da je determinanta 3×3 matrice jednaka determinanti njoj transponirane matrice, to iz (7.6) za $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$ imamo
$$|(a \times b \mid c)|^2 = \left(\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}\right)^2 = \det\begin{pmatrix}(a \mid a) & (a \mid b) & (a \mid c)\\ (b \mid a) & (b \mid b) & (b \mid c)\\ (c \mid a) & (c \mid b) & (c \mid c)\end{pmatrix}.$$
Prema (7.5) za $c = a \times b$ imamo $(a \mid c) = (b \mid c) = 0$, pa Laplaceov razvoj zadnje determinante po trećem stupcu daje
$$||c||^4 = ||a \times b||^4 = (c \mid c)\det\begin{pmatrix}(a \mid a) & (a \mid b)\\ (b \mid a) & (b \mid b)\end{pmatrix}.$$
Pokratimo li s $||c||^2 = (c \mid c) \neq 0$, dobijamo formulu (7.7). □

7.16. Površina paralelograma u $\mathbb{R}^3$. Primijetimo da iz teorema 7.15 dobivamo Cauchyjevu nejednakost (5.3.7). Podsjetimo se da je Cauchyjeva nejednakost vezana uz formulu za kosinus kuta između vektora

$$(a \mid b) = ||a||\,||b||\cos\varphi,$$

pa ako to uvrstimo u (7.7) dobivamo

$$||a \times b||^2 = ||a||^2||b||^2(1 - \cos\varphi^2) = ||a||^2||b||^2\sin\varphi^2.$$

U paralelogramu razapetom vektorima $a, b \in \mathbb{R}^3$ duljina baze je $||a||$, a visina je $||b||\sin\varphi$. Zato $||a \times b||^2$ možemo interpretirati kao **kvadrat površine paralelograma** razapetog vektorima $a, b \in \mathbb{R}^3$ danog formulom

$$\Gamma(a,b) = \det\begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) \\ (b \mid a) & (b \mid b) \end{pmatrix}.$$

Iz formule u dokazu teorema 7.15 vidimo da je **kvadrat volumena paralelepipeda** razapetog vektorima $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ dan formulom

$$\Gamma(a,b,c) = \det\begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) & (a \mid c) \\ (b \mid a) & (b \mid b) & (b \mid c) \\ (c \mid a) & (c \mid b) & (c \mid c) \end{pmatrix}.$$

Determinante $\Gamma(a,b)$ i $\Gamma(a,b,c)$ zovemo *Gramovim determinantama.*

7.17. Zadatak. Izračunajte površinu paralelograma razapetog vektorima $a = (1,1,1)$ i $b = (1,1,0)$ koristeći

(1) Gramovu determinantu $\Gamma(a,b)$ i
(2) neki drugi način.

Iz teorema 7.15 i formule (7.5) slijedi

7.18. Teorem. *Neka su f_1 i f_2 ortonormirani vektori u $\mathbb{R}^3$. Tada je f_1, f_2 i $f_3 = f_1 \times f_2$ ortonormirana baze u $\mathbb{R}^3$.*

7.19. Konstrukcija ortonormirane baze u $\mathbb{R}^3$. Ako je f_1 normirani vektor u $\mathbb{R}^3$, onda nije teško naći normirani vektor f_2 okomit na f_1. Tako, na primjer, za

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

možemo "pogoditi" niz vektora okomitih na f_1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Uzmemo li, na primjer, prvi od tih vektora i normiramo li ga, dobivamo

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stavimo li

$$f_3 = f_1 \times f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ 1 & -1 & e_2 \\ 1 & 0 & e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

onda je f_1, f_2, f_3 ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$.

7.20. Primjer. Neka su a i b vektori iz primjera 7.2. Želimo li naći ortonormiranu bazu potprostora $\langle a, b\rangle$, onda možemo računati

$$g_1 = \frac{a}{||a||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g_3 = \frac{a \times b}{||a \times b||} = \frac{1}{\sqrt{56}} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$g_2 = g_1 \times g_3 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{14}} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & e_1 \\ 2 & -2 & e_2 \\ 1 & 1 & e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 14}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

vektor iz potprostora $\langle a, b\rangle$ jer je okomit na okomicu $a \times b = \sqrt{56}\, g_3$. No onda je g_1, g_2 ortonormirana baza potprostora $\langle a, b\rangle$, tj.

$$\langle a, b\rangle = \langle g_1, g_2\rangle.$$

7.21. Jednadžbe pravca u $\mathbb{R}^3$. Neka je $v \neq 0$ vektor smjera pravca $p = \langle v\rangle$. Po teoremu o projekciji 1-dimenzionalni potprostor p u $\mathbb{R}^3$ možemo zadati dvjema jednadžbama

$$p = (p^\perp)^\perp = (\mathbb{R}a + \mathbb{R}b)^\perp = \{x \mid (a \mid x) = (b \mid x) = 0\}$$

za neku bazu a, b potprostora $p^\perp$ od $\mathbb{R}^3$. Za dani vektor $v \in \mathbb{R}^3$ lako je naći jedan vektor $a \neq 0$ okomit na v, a za drugi vektor onda uzmemo $b = a \times v$.

7.22. Primjer. Neka je $v = (1, 2, 1)$ vektor smjera pravca $p = \langle v\rangle$. Očito je $a = (1, 0, -1)$ okomit na v. Ako stavimo

$$b = a \times v = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ 0 & 2 & e_2 \\ -1 & 1 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

onda je a, b baza potprostora $p^\perp$ i $p = (p^\perp)^\perp$ je zadan sistemom jednadžbi

$$(a \mid x) = \xi_1 - \xi_3 = 0,$$
$$(b \mid x) = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = 0.$$

7.23. Primjer. Neka je pravac $q = \{x = c + d \mid d \in p\}$ kroz točku $c = (3, -2, 1)$ paralelan s pravcem $p = \langle v\rangle$ iz prethodnog primjera. Uvjet $x - c \in p$ možemo zapisati kao sistem jednadžbi

$$(a \mid x - c) = (\xi_1 - 3) - (\xi_3 - 1) = 0,$$
$$(b \mid x - c) = 2(\xi_1 - 3) - 2(\xi_2 + 2) + (\xi_3 - 1) = 0$$

kojeg zovemo jednadžbama pravca q.

7.24. Zadatak. Neka je $q = \{x = c + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ pravac kroz točku $c = (3, -2, 1)$ s vektorom smjera $v = (-2, 1, -1)$. Napišite jednadžbe pravca q.

Dio 2

Linearna algebra 2

POGLAVLJE 7

Linearna preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$

U ovom poglavlju uvodimo pojam linearnog preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ i pokazujemo da je linearno preslikavanje u potpunosti određeno svojom matricom. Za linearno preslikavanje A definiramo sliku i jezgru od A i dokazujemo teorem o rangu i defektu. Pokazujemo da je kompozicija linearnih preslikavanja linearno preslikavanje, te da kompoziciji preslikavanja odgovara množenje matrica. Na kraju poglavlja pokazujemo da su općenito linearni operatori u potpunosti određeni svojim vrijednostima na bazi prostora.

0.1. Kompozicija preslikavanja. Neka su A, B i C skupovi i $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ preslikavanja. Tada preslikavanje

$$h\colon A \to C,$$

koje elementu a iz A pridružuje element $h(a)$ iz C po pravilu

$$h(a) = g(f(a)),$$

zovemo *kompozicijom preslikavanja f i g* i pišemo $h = g \circ f$.

0.2. Asocijativnost kompozicije preslikavanja. Neka su A, B, C i D skupovi i $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ i $h\colon C \to D$ preslikavanja. Tada je

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Naime, s jedne je strane $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$, a s druge strane je $(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$, dakle jednako prvom, i to za svaki $a \in A$.

0.3. Identiteta na skupu. Neka je A skup. *Identiteta* id *na skupu* A, ili id_A ako želimo naglasiti skup A, je bijekcija

$$\mathrm{id}\colon A \to A, \qquad \mathrm{id}(a) = a \quad \text{za sve} \quad a \in A.$$

0.4. Kompozicija preslikavanja s identitetom. Za svako preslikavanje $f\colon A \to B$ vrijedi

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Naime, za sve $a \in A$ vrijedi $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a)$. Isto tako, za sve $a \in A$ vrijedi $(\mathrm{id}_B \circ f)(a) = \mathrm{id}_B(f(a)) = f(a)$.

1. Linearna preslikavanja

1.1. Definicija linearnog preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. Kažemo da je preslikavanje

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

linearno preslikavanje ili *linearan operator* ako za sve vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ i sve skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Ako je A linearno, onda je običaj umjesto $A(x)$ pisati Ax.

1.2. Linearne funkcije. Uz oznake iz prethodne točke za $m = 1$ imamo poseban slučaj linearnog preslikavanja

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

kojeg zovemo *linearna funkcija* ili *linearni funkcional na* $\mathbb{R}^n$. Ako je A linearna funkcija, onda je za vrijednost funkcije u točki x običaj pisati $A(x)$, a ne Ax.

1.3. Pitanje. Za koje je $n = 0, 1, 2, 3$ funkcija f_n linearna funkcija,

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n\,?$$

1.4. Svojstvo linearnosti preslikavanja i linearne kombinacije. Primijetimo da je zbrajanje vektora $x + y$ operacija u području definicije $\mathbb{R}^n$ preslikavanja A, a da je zbrajanje vektora A(x)+A(y) operacija u području vrijednosti $\mathbb{R}^m$ preslikavanja A. Grubo govoreći, u slučaju linearnog preslikavanja je svejedno da li izvodimo operacije zbrajanja i množenja skalarom prije "primjene" preslikavanja A ili nakon "primjene" preslikavanja A. To vrijedi i za proizvoljne linearne kombinacije:

$$A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s. \tag{1.1}$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po s. Za $s = 1$ tvrdnja vrijedi jer po pretpostavci imamo $A(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 A x_1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $s \geq 1$. Tada je

$$\begin{aligned}
&A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s + \lambda_{s+1} x_{s+1})\\
&= A((\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) + \lambda_{s+1} x_{s+1})\\
&= A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) + A(\lambda_{s+1} x_{s+1})\\
&= (\lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s) + \lambda_{s+1} A x_{s+1}\\
&= \lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s + \lambda_{s+1} A x_{s+1}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da druga jednakost vrijedi zbog pretpostavljenog svojstva za sumu dva vektora. □

1.5. Primjer: identiteta $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je linearno preslikavanje. Običaj je identitetu na skupu $\mathbb{R}^n$ označavati s I. Identiteta je očito linearno preslikavanje

$$I(x+y) = x+y = I(x)+I(y), \qquad I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x).$$

1.6. Pitanje. Da li je centralna simetrija $x \mapsto -x$ u $\mathbb{R}^3$ linearno preslikavanje? DA NE

1.7. Primjer: rotacija u ravnini za kut $\frac{\pi}{2}$ je linearno preslikavanje. Preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano formulom

$$A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\xi_2\\ \xi_1\end{pmatrix}$$

je linearno preslikavanje. Naime,

$$A(a+b) = A\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(\alpha_2+\beta_2)\\ \alpha_1+\beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\beta_2\\ \beta_1\end{pmatrix} = Aa + Ab,$$

a na sličan način vidimo i

$$A(\lambda a) = A\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda\alpha_2\\ \lambda\alpha_1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \lambda Aa.$$

Linearnost preslikavanja A možemo dokazati i geometrijski: Interpretiramo li $a = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{smallmatrix}\right)$ kao vektor-strelicu u euklidskoj ravnini, onda je vektor-strelica $Aa = \left(\begin{smallmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{smallmatrix}\right)$ dobiven iz a rotacijom oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$ (nacrtajte sliku!). Rotacija A prevodi paralelogram s vrhovima $0, a, b, a+b$ u paralelogram s vrhovima $0, Aa, Ab, A(a+b)$, a ovaj drugi mora biti (zbog definicije zbrajanja vektor-strelica) paralelogram $0, Aa, Ab, Aa+Ab$. Sada jednakost vrhova daje relaciju

$$A(a+b) = Aa + Ab.$$

Na sličan geometrijski način možemo dokazati i relaciju

$$A(\lambda a) = \lambda Aa.$$

1.8. Primjer: rotacija u ravnini za kut φ je linearno preslikavanje. Geometrijski argument o linearnosti rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ možemo ponoviti za bilo koju rotaciju oko ishodišta: *rotacija $R_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oko ishodišta u euklidskoj ravnini za kut φ je linearno preslikavanje.*

2. Zadavanje linearnog preslikavanja matricom

2.1. Zadavanje linearnog preslikavanja matricom. Neka je zadan niz od n vektora $a_1, a_2, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$, ili, što je isto, matrica

$$(a_1,\dots,a_n) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Budući da proizvoljni vektor $x \in \mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način zapisati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n,$$

možemo definirati preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A(x)$, formulom

$$A(x) = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n. \tag{2.2}$$

Tako definirano preslikavanje je linearno. Naime, budući da je i-ta koordinata od λx jednaka $\lambda\xi_i$, to je

$$A(\lambda x) = (\lambda\xi_1)a_1 + \cdots + (\lambda\xi_n)a_n = \lambda(\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n) = \lambda A(x).$$

Budući da je i-ta koordinata od $x + y$ jednaka $\xi_i + \eta_i$, to je

$$\begin{aligned} A(x+y) &= (\xi_1 + \eta_1)a_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)a_n \\ &= (\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n) + (\eta_1 a_1 + \cdots + \eta_n a_n) = A(x) + A(y). \end{aligned}$$

Primijetimo da je $Ae_i = a_i$ jer je i-ta koordinata od e_i jednaka jedan, a sve ostale su nula. Zato obično kažemo da smo *linearno preslikavanje A zadali vrijednostima $(a_1, \dots, a_n)$ na vektorima kanonske baze.*

2.2. Primjer. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano je na kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3 u $\mathbb{R}^3$ nizom od tri vektora

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formulom

$$A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ 2\xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix}.$$

2.3. Pitanje. Da li je matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zadano linearno preslikavanje s $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^4$? DA NE

2.4. Pitanje. Kojom je matricom zadano linearno preslikavanje

$$A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \\ 3\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix}?$$

3. Matrica linearnog preslikavanja

3.1. Linearno preslikavanje određeno je vrijednostima na kanonskoj bazi. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearano preslikavanje i $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada su u potpunosti određeni vektori

$$a_1 = Ae_1, \quad a_2 = Ae_2, \quad \dots \quad a_n = Ae_n$$

u $\mathbb{R}^m$, napišimo ih kao

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Budući da je A linearno, dovoljno je znati vektore $a_1, a_2, \dots, a_n$ da bi odredili Ax za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Naime, proizvoljni vektor $x \in \mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način zapisati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n,$$

pa zbog linearnosti preslikavanja A imamo

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 Ae_1 + \dots + \xi_n Ae_n = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n. \tag{3.1}$$

Znači da je vektor Ax izražen kao linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$ u kojoj su koeficijenti koordinate $\xi_1, \dots, \xi_n$ vektora x:

$$Ax = \xi_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \xi_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

3.2. Pitanje. Da li je linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ određeno vrijednostima u kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3 prostora $\mathbb{R}^3$? DA NE

3.3. Matrica linearnog preslikavanja. Razmatranje u prethodnoj točki pokazuje da je linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u potpunosti određeno n-torkom vektora $(Ae_1, \dots, Ae_n) = (a_1, \dots, a_n)$ iz $\mathbb{R}^m$ koju zovemo *matricom linearnog preslikavanja A u kanonskoj bazi* i zapisujemo kao

$$(Ae_1, \dots, Ae_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica je tipa $m \times n$.

3.4. Matrica linearnog preslikavanja zadanog matricom. Primijetimo li da je i-ta koordinata vektora e_i kanonske baze jednaka 1, a sve ostale 0, onda vidimo da za linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definirano formulom (2.2) vrijedi

$$Ae_i = a_i.$$

Znači da je matrica (2.1) s kojom smo zadali linearno preslikavanje A u stvari matrica $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ tog linearnog preslikavanja A.

3.5. Matrica identitete je jedinična matrica. Budući da je za identitetu $Ie_j = e_j$, to su stupci matrice preslikavanja $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ upravo elementi kanonske baze prostora $\mathbb{R}^n$. Tu matricu označavamo s I,

$$I = (e_1, \dots, e_n),$$

i zovemo je *jediničnom matricom.* Na primjer,

$$1 = I, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

gdje je redom I jedinična matrica tipa 1×1, tipa 2×2 i tipa 4×4.

3.6. Pitanje. Da li je $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ matrica centralne simetrije $x \mapsto -x$ u $\mathbb{R}^3$? DA NE

3.7. Primjer: matrica rotacije u ravnini za kut φ. Rotacija $A = R_\varphi$ oko ishodišta za kut φ je linearno preslikavanje, pa je u potpunosti određeno vektorima (nacrtajte sliku!)

$$a_1 = Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad a_2 = Ae_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Matrica rotacije za kut φ je

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Posebno su matrice rotacija za kuteve 0, $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3\pi}{2}$ redom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.8. Zadatak. Napišite matrice rotacija u $\mathbb{R}^3$ za kuteve 0, $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3\pi}{2}$ oko 1) x-osi, 2) y-osi i 3) z-osi.

3.9. Zadatak. Geometrijskim argumentom dokažite da je refleksija u euklidskoj ravnini s obzirom na simetralu prvog kvadranta linearno preslikavanje. Napišite matricu odgovarajućeg linearnog preslikavanja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

3.10. Zadatak. Neka je $a=(-1,1)$ i neka je preslikavanje $T\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ zadano formulom

$$T(x)=x-\frac{2(x\mid a)}{(a\mid a)}a.$$

Dokažite da je T linearno preslikavanje i izračunajte mu matricu. Interpretirajte preslikavanje T geometrijski.

3.11. Matrica linearne funkcije. Kao i u općem slučaju, linearna je funkcija $A\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ zadana vrijednostima $A(e_1)=\alpha_1,\ \dots,\ Ae_n=\alpha_n$ na kanonskoj bazi, odnosno $1\times n$ matricom

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n).$$

Vrijednost funkcije $A(x)$ računamo po formuli

$$A(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\dots+\alpha_n\xi_n.$$

Na primjer, $f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1-3\xi_2+4\xi_3$ je linearna funkcija na $\mathbb{R}^3$ s matricom $(1,-3,4)$.

3.12. Množenje matrice i vektora. Za linearno preslikavanje A s matricom $(Ae_1,\dots,Ae_n)$ slika $Ax\in\mathbb{R}^m$ proizvoljnog vektora $x\in\mathbb{R}^n$ dana je formulom (3.1). Tu formulu (3.1) za računanje Ax, po koordinatama zapisanu kao (3.2), obično zovemo *množenje matrice* $(a_1,\dots,a_n)$ *i vektora s koordinatama* $\xi_1,\dots,\xi_n$ i pišemo:

$$Ax=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\xi_1+\dots+\alpha_{1n}\xi_n\\ \alpha_{21}\xi_1+\dots+\alpha_{2n}\xi_n\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\xi_1+\dots+\alpha_{mn}\xi_n\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Primijetimo da je definirano množenje matrice s vektorom **samo** za $m\times n$ matrice A s vektor-stupcem x tipa $n\times 1$, i da je rezultat vektor-stupac Ax tipa $m\times 1$. Istaknimo to kao "formulu"

$$(m\times n)\cdot(n\times 1)=(m\times 1).$$

Stavimo li $b=Ax$ i označimo li koordinate vektora b s $\beta_1,\dots,\beta_m$, tada formulu (3.3) za množenje matrice s vektorom možemo zapisati kraće kao

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\qquad \text{za sve}\quad i=1,\dots,m. \tag{3.4}$$

Primijetimo da je formula (2.2) kojom smo definirali preslikavanje A u stvari formula za množenje matrice i vektora. Zbog toga vrijedi svojstvo da je množenje vektora matricom A linearno preslikavanje

$$A(x+y)=Ax+Ay,\qquad A(\lambda x)=\lambda Ax.$$

3.13. Primjeri produkta matrice i vektora.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.14. Pitanje. Da li je definiran produkt matrice i vektora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}? \qquad \text{DA} \quad \text{NE}$$

3.15. Produkt jedinične matrice i vektora. Budući da je za identitetu $Ix = x$, to je formula za računanje vektora Ix množenjem jedinične matrice I s vektorom x opet vektor x. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.16. Primjer. Za rotaciju $A = R_\varphi$ vektor Ax računamo koristeći množenje matrice rotacije (Ae_1, Ae_2) i vektora x

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi \\ \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Posebno rotacije vektora x za kuteve $\frac{\pi}{2}$ i π računamo koristeći množenje matrice i vektora

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix}.$$

3.17. Primjer. Za linearnu funkciju $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3$ na $\mathbb{R}^3$ vrijednost funkcije $f(x)$ na vektoru x računamo koristeći množenje matrice linearne funkcije $(1, -3, 4)$ i vektora x:

$$(1, -3, 4)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3.$$

3.18. Poistovjećivanje linearnog preslikavanja i matrice. Budući da svakom linearnom preslikavanju pripada matrice, i da svakoj matrici pripada linearno preslikavanje kojemu je to pripadna matrica, mi vrlo često ne pravimo razliku[1] između $m \times n$ matrice $(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ i linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$x \mapsto Ax,$$

[1]Kod poistovjećivanja zanemarujemo razlike među stvarima, ali je dobro pamtiti što smo zanemarili. U ovom konkretnom slučaju treba imati na umu i posebnu ulogu kanonske baze u formuli (3.1).

definiranog formulom (3.3) za produkt Ax matrice $(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ i vektora x, već pišemo $A = (Ae_1, \ldots, Ae_n)$. U tom je smislu matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano formulom

$$A\colon \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 \\ 4\xi_1 + 5\xi_2 + 6\xi_3 \end{pmatrix}.$$

4. Linearno preslikavanje kao sistem linearnih funkcija

4.1. Sistem linearnih funkcija. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ možemo shvatiti kao m-torku funkcija

$$A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \qquad Ax = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

odnosno $A = (f_1, \ldots, f_m)$, koju ponekad zovemo *sistemom od m funkcija* $f_1, \ldots, f_m$. Te su funkcije dane formulom (3.3) za množenje vektora matricom

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n\,, \\ f_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n\,, \\ &\cdots \\ f_m(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

a i-ti redak $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ matrice A je matrica i-te linearne funkcije f_i.

4.2. Primjer. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

možemo shvatiti kao sistem od dvije linearne funkcije od tri varijable

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3, \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\xi_1 + \xi_3 \end{aligned}$$

možemo ga zapisati i kao

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3, -\xi_1 + \xi_3).$$

4.3. Pitanje. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadano je formulom $A(\xi_1, \xi_2) = (5\xi_1 + \xi_2, -\xi_1, -\xi_1 + 2\xi_2)$. Da li je

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrica linearnog preslikavanja A? DA NE

4.4. Sistem jednadžbi $Ax = b$ i linearno preslikavanje A. Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$ matrica tipa $m \times n$ i b vektor u $\mathbb{R}^m$. Tada sistem jednadžbi

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b$$

možemo shvatiti kao problem nalaženja svih vektora

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

koje linearno preslikavanje

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

preslikava u vektor b, tj. da je

$$Ax = b.$$

Očito je matrica sistema A ujedno i matrica linearnog preslikavanja.

5. Slika i jezgra linearnog preslikavanja

5.1. Slika linearnog operatora. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. *Slika preslikavanja A* je skup

$$\mathrm{im} A = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Slika linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^m$. Štoviše,

$$\mathrm{im} A = \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle. \tag{5.1}$$

DOKAZ. $Ax, Ay \in \mathrm{im} A$ povlači $Ax + Ay = A(x + y) \in \mathrm{im} A$. Također imamo $\lambda Ax = A(\lambda x) \in \mathrm{im} A$. Znači da je slika od A potprostor vektorskg prostora $\mathbb{R}^m$. Budući da za vektor $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$ u $\mathbb{R}^n$ imamo

$$Ax = \xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n,$$

to očito vrijedi (5.1). □

5.2. Rang matrice i linearnog operatora. *Rang linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$* je dimenzija slike od A, tj.

$$\mathrm{rang}\, A = \dim \mathrm{im} A = \dim\langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle.$$

Rang matrice $A = (a_1, \dots, a_n)$ je rang pripadnog preslikavanja, tj.

$$\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\,(a_1, \dots, a_n) = \dim\langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

5.3. Surjektivnost preslikavanja i slika. *Po definiciji je A surjekcija ako i samo ako je* $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^m$*. Štoviše, A je surjekcija ako i samo ako je* $\operatorname{rang} A = m$*.*

Naime, prema teoremu 3.4.7, $\mathbb{R}^m$ je jedini m-dimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^m$.

5.4. Egzistencija rješenja sistema $Ax = b$ i slika od A. Očito sistem jednadžbi $Ax = b$ ima rješenje ako i samo ako je $b \in \operatorname{im} A$.

5.5. Jezgra linearnog operatora. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. *Jezgra preslikavanja A* je skup

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Jezgra linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. $x, y \in \ker A$ povlači $A(x + y) = Ax + Ay = 0$, odnosno $x + y \in \ker A$. Također imamo $A(\lambda x) = \lambda Ax = 0$, pa je $\lambda x \in \ker A$. Znači da je jezgra od A potprostor vektorskg prostora $\mathbb{R}^n$. □

5.6. Defekt matrice i linearnog operatora. *Defekt linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$* je dimenzija jezgre od A, tj.

$$\operatorname{defekt} A = \dim \ker A.$$

Defekt matrice $A = (a_1, \dots, a_k)$ je defekt pripadnog preslikavanja.

5.7. Injektivnost preslikavanja i jezgra. Podsjetimo se da je preslikavanje A injekcija ako $Ax = Ay$ povlači $x = y$. U slučaju linearnih preslikavanja imamo:

Linearno preslikavanje A je injekcija ako i samo ako je $\ker A = 0$*. Štoviše, A je injekcija ako i samo ako je* $\operatorname{defekt} A = 0$*.*

Naime, za linearnu injekciju $Ax = 0 = A0$ povlači $x = 0$, pa je $\ker A = 0$. Obratno. Ako je jezgra od A nula, onda je A injekcija jer $Ax - Ay = A(x - y) = 0$ povlači $x - y = 0$. Druga tvrdnja slijedi iz prve jer samo nul-prostor ima dimenzija nula.

5.8. Jedinstvenost rješenja sistema $Ax = b$ i jezgra od A. Ako je $\ker A = 0$, onda $Ax = b = Ay$ povlači $x = y$.

5.9. Teorem o rangu i defektu. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Tada je*

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{defekt} A = n.$$

Dokaz. Neka je

$$v_1, \dots, v_p$$

baza jezgre od A. Taj linearno nezavisan skup u $\mathbb{R}^n$ nadopunimo do baze

$$v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n.$$

Vektori $Av_1, \ldots, Av_n$ razapinju sliku preslikavanja A. No vektori $v_1, \ldots, v_p$ su u jezgri preslikavanja A i za njih je $Av_i = 0$, pa imamo da vektori

$$Av_{p+1}, \ldots, Av_n$$

razapinju sliku preslikavanja A. Za dokaz teorema dovoljno je dokazati da je to baza slike preslikavanja A, tj. da je taj skup linearno nezavisan. Zato pretpostavljamo da je

$$\lambda_{p+1} Av_{p+1} + \cdots + \lambda_n Av_n = 0 \tag{5.2}$$

i dokazujemo da su svi koeficijenti nula. Zbog linearnosti preslikavanja A iz (5.2) slijedi

$$A(\lambda_{p+1} v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n) = 0.$$

Znači da je vektor $\lambda_{p+1} v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n$ u jezgri preslikavanja A. Prikažemo li taj vektor u bazi jezgre

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

dobivamo

$$-\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Budući da je $v_1, \ldots, v_n$ baza prostora $\mathbb{R}^n$, svi koeficijenti u toj kombinaciji moraju biti nula. Posebno je $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, što je i trebalo dokazati. □

6. Kompozicija linearnih preslikavanja

6.1. Kompozicija linearnih preslikavanja. *Ako su*

$$A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad i \quad B \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

linearna preslikavanja, onda je kompozicija

$$B \circ A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad (B \circ A)(x) = B(A(x))$$

također linearno preslikavanje. Naime, zbog linearnosti preslikavanja A i B imamo

$$B(A(x+y)) = B(A(x) + A(y)) = B(A(x)) + B(A(y)),$$

$$B(A(\lambda x)) = B(\lambda A(x)) = \lambda B(A(x)).$$

Kompoziciju $B \circ A$ linearnih preslikavanja A i B označavamo kratko s BA. Po dogovoru za linearno preslikavanje C pišemo Cx umjesto $C(x)$, pa po definiciji kompozicije BA imamo

$$(BA)x = B(Ax),$$

što onda pišemo bez zagrada kao

$$BAx.$$

6.2. Množenje matrica. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanja s matricom $(a_1,\dots,a_n)$ tipa $m\times n$ i neka je $B\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ linearno preslikavanja s matricom $(b_1,\dots,b_m)$ tipa $k\times m$. Kompozicija $BA\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je linearno preslikavanje i ima matricu

$$C = (c_1,\dots,c_n) = (BAe_1,\dots,BAe_n)$$

tipa $k\times n$, gdje je $e_1,\dots,e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Stupce $c_j = B(Ae_j) = Ba_j$ matrice C računamo po formuli (3.3) za množenje matrice i vektora. Matricu

$$C = (Ba_1,\dots,Ba_n) \tag{6.1}$$

zovemo *produktom matrica* $(b_1,\dots,b_m)$ i $(a_1,\dots,a_n)$.

Primijetimo da je definirano množenje dvije matrice **samo** za $k\times m$ matricu s $m\times n$ matricom i da je rezultat matrica tipa $k\times n$. Istaknimo to kao "formulu"

$$(k\times m)\cdot(m\times n) = (k\times n).$$

Stavimo li $A=(\alpha_{ij})$, $B=(\beta_{ij})$ i $C=(\gamma_{ij})$, tada formulu (6.1) za množenje matrica

$$C = BA$$

možemo zapisati pomoću matričnih koeficijenata kao

$$\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^{m} \beta_{ir}\alpha_{rj} \qquad \text{za sve} \quad i=1,\dots,k, \quad j=1,\dots,n. \tag{6.2}$$

6.3. Primjer. Za matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

produkt AB nije definiran, a za BA imamo

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix}.$$

6.4. Množenje $n\times n$ matrica nije komutativno. Za dvije $n\times n$ matrice A i B definirani su produkti AB i BA, no općenito oni nisu jednaki. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

6.5. Zadatak. Dokažite[2] da je $R_\varphi R_\psi = R_{\varphi+\psi}$, tj.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi)\\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi)\end{pmatrix}.$$

---

[2] Za funkcije sin i cos vrijede adicioni teoremi:

$$sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi,$$
$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi.$$

6.6. Množenje jediničnom matricom. Za linearna preslikavanja prirodno je definirana kompozicija preslikavanja, uz pretpostavku da je područje vrijednosti jednog preslikavanja jednako području definicije drugog preslikavanja. Množenje matrica definirano je tako da je produkt matrica preslikavanja upravo matrica kompozicije. Budući da kompozicija s identitetom ne mijenja linearno preslikavanje, to i množenje s njenom jediničnom matricom ne mijenja matricu preslikavanja. Zato za množenje jediničnom matricom I vrijedi

$$AI = A, \qquad IB = B$$

(kada su produkti matrica definirani).

6.7. Asocijativnost množenja matrica. Budući da je kompozicija asocijativna operacija, to je i pripadno množenje matrica asocijativno: za tri matrice A, B i C (tipa $k \times m$, $m \times n$ i $n \times p$) je

$$(AB)C = A(BC).$$

6.8. Višestruki produkti operatora na $\mathbb{R}^n$. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ linearni operatori s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$. Tada višestruki produkt operatora definiramo induktivno koristeći množenje dva po dva operatora:

$$A_1A_2A_3 = (A_1A_2)A_3, \quad A_1A_2A_3A_4 = (A_1A_2A_3)A_4$$

i općenito

$$A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k = (A_1A_2\cdots A_{k-1})A_k.$$

Produkt od k faktora $A_i = A$ zovemo *k-tom potencijom operatora A* i zapisujemo kao A^k.

6.9. Asocijativnost za višestruke produkte. Zbog asocijativnosti množenja operatora za sve r i s imamo

$$(A_1\cdots A_r)(A_{r+1}\cdots A_{r+s}) = A_1\cdots A_rA_{r+1}\cdots A_{r+s}. \tag{6.3}$$

Formulu dokazujemo indukcijom po $r + s = k$ koristeći svojstvo asocijativnosti za produkt tri operatora

$$\begin{aligned}
&(A_1\cdots A_r)(A_{r+1}\cdots A_{r+s})\\
&= (A_1\cdots A_r)((A_{r+1}\cdots A_{r+s-1})A_{r+s})\\
&= ((A_1\cdots A_r)(A_{r+1}\cdots A_{r+s-1}))A_{r+s}\\
&= (A_1\cdots A_rA_{r+1}\cdots A_{r+s-1})A_{r+s}\\
&= A_1\cdots A_rA_{r+1}\cdots A_{r+s-1}A_{r+s}
\end{aligned}$$

(treća jednakost vrijedi zbog pretpostavke indukcije za $r + s - 1 = k - 1$). Formulu (6.3) zovemo *svojstvom asocijativnosti za višestruke produkte operatora.*

6.10. Potencije operatora na $\mathbb{R}^n$. Zbog asocijativnosti množenja za linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$A^{k+m} = A^kA^m.$$

6.11. Zadatak. Izračunajte sve potencije od J za

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Pojam linearnog operatora

7.1. Definicija linearnog operatora. Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K. Kažemo da je preslikavanje

$$A\colon V \to W$$

linearan operator ili *linearno preslikavanje* s V u W ako za sve vektore $x, y \in V$ i sve skalare $\lambda \in K$ vrijedi

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Ako je A linearno, onda je običaj umjesto $A(x)$ pisati Ax.

7.2. Svojstvo linearnosti preslikavanja i linearne kombinacije. Ponavljajući doslovce argument iz točke 1.4 vidimo da je A linearan operator ako i samo ako za proizvoljne linearne kombinacije vrijedi

$$A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s. \tag{7.1}$$

7.3. Linearna preslikavanja $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$. Osim linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, posebno su važna linearnih preslikavanja s $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$. Budući da smo u dosadašnjem proučavanju linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ koristili samo svojstva zbrajanja i množenja realnih brojeva popisanih u definiciji polja, to se sva razmatranja jednako prenose za svako dano polje, pa posebno i za polje kompleksnih brojeva— samo treba zamijeniti $\mathbb{R}$ sa $\mathbb{C}$.

7.4. Realne matrice kao kompleksne matrice. Budući da realne brojeve možemo shvatiti kao kompleksne brojeve, to realne matrice možemo shvatiti kao matrice linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ ili kao matrice linearnih operatora sa $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$. No operatori na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ nemaju ista svojstva. Na primjer, realna matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je matrica rotacije A u $\mathbb{R}^2$ za kut $\frac{\pi}{2}$, pa ne postoji vektor $v \neq 0$ koji bi bio proporcionalan vektoru Av. S druge strane, shvatimo li tu matricu kao matricu linearnog preslikavanja B sa $\mathbb{C}^2$ u $\mathbb{C}^2$, onda je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},$$

pa je vektor $B\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ proporcionalan vektoru $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ovaj primjer pokazuje da operator B na kompleksnom prostoru ima svojstvo koje operator A na realnom prostoru nema. Kao što ćemo vidjeti, to je vezano za svojstvo skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ da jednadžba $x^2 + 1 = 0$ ima rješenje u $\mathbb{C}$ (rješenje je $x = \pm i$).

7.5. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}? \qquad \text{DA} \quad \text{NE}$$

7.6. Zadatak. Izračunajte

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2.$$

7.7. Množenje linearnih operatora. Ako su U, V i W vektorski prostori nad istim poljem K i

$$B\colon U \to V \quad \text{i} \quad A\colon V \to W$$

dva linearna operatora, onda produkt operatora AB definiramo kao kompoziciju

$$(AB)(x) = (A \circ B)(x) = A(B(x)) \quad \text{za svaki } x \in U.$$

Lako je provjeriti da je AB također linearan operator s U u W. Operacija množenja je asocijativna

$$(AB)C = A(BC).$$

Kao i obično, identitetu id_V na V obično označavamo s I,

$$I\colon V \to V, \quad I\colon x \mapsto x \quad \text{za svaki } x \in V.$$

Za identite na V i W i operator $A\colon V \to W$ imamo

$$AI = A, \quad IA = A.$$

7.8. Linearan operator određen je vrijednostima na bazi. Ključni moment našeg razmatranja linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ je jednostavna primjedba da je to linearno preslikavanje u potpunosti određeno svojim vrijednostima u (kanonskoj) bazi. To ključno svojstvo vrijedi i općenito za linearne operatore:

Teorem *Neka su V i W vektorski prostori i B baza od V.*

(1) *Linearno preslikavanje $A\colon V \to W$ u potpunosti je određeno svojim vrijednostima*

$$A(e), \quad e \in B$$

na elementima baze B vektorskog prostora V.

(2) *Ako je na bazi B vektorskog prostora V zadano preslikavanje*

$$a\colon B \to W, \quad e \mapsto a(e),$$

onda postoji jedinstveno linearno preslikavanje $A\colon V \to W$ takvo da je $A(e) = a(e)$.

DOKAZ. Za dokaz teorema treba samo ponoviti argumente iz točke 3.1 i točke 2.1:

(1) Ako je v vektor u V, onda postoje vektori baze $x_1, \ldots, x_s \in B$ takvi da imamo jedinstveni prikaz vektora v kao kombinacije

$$v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s.$$

No tada zbog linearnosti (7.1) operatora A imamo

$$Av = \lambda_1 Ax_1 + \cdots + \lambda_s Ax_s.$$

Budući da su za dani v u potpunosti određeni koeficijenti $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, a po pretpostavci su određene i vrijednosti $Ax_1, \ldots, Ax_s$ operatora A na elementima baze, to je u potpunosti određen i vektor Av. Znači da je preslikavanje $v \mapsto Av$ u potpunosti određeno.

(2) Neka su zadani vektori $a(e) \in W$ za svaki $e \in B$. Ako je vektor $v \in V$ prikazan kao $v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s$ pomoću vektora baze $x_1, \ldots, x_s \in B$, onda stavimo

$$A(v) = \lambda_1 a(x_1) + \cdots + \lambda_s a(x_s) \in W.$$

Time smo definirali preslikavanje

$$A\colon V \to W, \quad v \mapsto A(v)$$

i preostaje vidjeti da je to preslikavanje linearno. Za skalar μ zbog prikaza vektora $\mu v = \mu\lambda_1 x_1 + \cdots + \mu\lambda_s x_s$ po definiciji imamo

$$A(\mu v) = \mu\lambda_1 a(x_1) + \cdots + \mu\lambda_s a(x_s) = \mu A(v).$$

Na sličan način dokazujemo i da je $A(v+u) = A(v) + A(u)$. □

7.9. Teorem. *Neka su V i W vektorski prostori i B baza od V. Tada je linearno preslikavanje $A\colon V \to W$ izomorfizam ako i samo ako su vektori*

$$Ae, \quad e \in B \tag{7.2}$$

baza vektorskog prostora W.

DOKAZ. Neka je A izomorfizam, tj. linearna bijekcija. Zbog surjektivnosti preslikavanja A za svaki vektor $w \in W$ postoji $v \in V$ takav da je $w = Av$, pa raspisujući v kao linearnu kombinaciju vektora baze $x_1, \ldots, x_s \in B$ dobivamo

$$w = Av = A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 Ax_1 + \cdots + \lambda_s Ax_s.$$

Znači da skup vektora (7.2) razapinje W. Zbog injektivnosti preslikavanja A imamo $Av = 0$ samo za $v = 0$, pa relacija

$$\lambda_1 Ax_1 + \cdots + \lambda_s Ax_s = 0$$

povlači

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s = 0.$$

Sada iz linearne nezavisnosti baze B slijedi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$, a to znači da je skup vektora (7.2) linearno nezavisan.

Obratno, ako su vektori (7.2) baza u W, onda prema prethodnom teoremu 7.8 postoji jedinstveno linearno preslikavanje

$$C\colon W \to V$$

koje je na bazi (7.2) od W zadano vrijednostima

$$C(Ae) = e, \quad e \in B.$$

Tada su $CA\colon V \to V$ i $AC\colon W \to W$ linearna preslikavanja koja su na odgovarajućim bazama identitete

$$CAe = e, \quad AC(Ae) = A(CAe) = Ae,$$

pa zbog jedinstvenosti takvih preslikavanja mora biti

$$CA = \mathrm{id}_V, \quad AC = \mathrm{id}_W.$$

Znači da je A bijekcija s inverznim preslikavanjem C. □

POGLAVLJE 8

Regularni operatori na $\mathbb{R}^n$

0.1. Pojmovi injekcije i surjekcije. Neka su A i B dva skupa i $f\colon A \to B$ preslikavanje sa skupa A u skup B.

Kažemo da je preslikavanje f *injekcija* ako $x \neq y$ povlači $f(x) \neq f(y)$. Drugim riječima, injekcija pridružuje različitim elementima iz A različite elemente u B. Očito je preslikavanje f injekcija ako i samo ako $f(x) = f(y)$ povlači $x = y$.

Kažemo da je preslikavanje f *surjekcija* ako za svaki element $b \in B$ postoji neki element $a \in A$ takav da je $b = f(a)$. Drugim riječima, pri preslikavanju f svaki je element iz B slika nekog elementa iz A.

0.2. Bijekcija. Kažemo da je preslikavanje f *bijekcija* ako je injekcija i surjekcija. Ako je f bijekcija, onda možemo identificirati elemente skupa A s elementima skupa B tako da element a identificiramo s njegovom slikom $f(a)$, pišemo

$$a \longleftrightarrow f(a).$$

Naime, zbog injektivnosti različite elemente $x, y \in A$ identificiramo s različitim elementima $f(x), f(y) \in B$, a zbog surjektivnosti smo svaki element $b \in B$ identificirali s nekim elementom $a \in A$. Grubo govoreći, ako je f bijekcija, onda skupovi A i B "izgledaju isto".

0.3. Inverzno preslikavanje. Ako je f bijekcija, onda postoji *inverzno preslikavanje* $g\colon B \to A$ koje elementima $f(a) \in B$ pridružuje elemente $a \in A$, pišemo

$$g\colon f(a) \mapsto a.$$

Drugim riječima, ako je $b = f(a)$, onda je $g(b) = a$. Očito je inverzno preslikavanje također bijekcija i vrijedi

$$g(f(a)) = a, \qquad f(g(b)) = b.$$

Inverzno preslikavanje g označavamo s f^{-1}.

0.4. Identiteta i inverzno preslikavanje. Ako je $f\colon A \to B$ bijekcija i $g\colon B \to A$ inverzno preslikavanje od f, onda je

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{i} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B$$

jer je $g(f(a)) = a$ za sve $a \in A$ i $f(g(b)) = b$ za sve $b \in B$.

0.5. Lema. Neka su $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to A$ preslikavanja. Ako je

$$g \circ f = \mathrm{id}_A\,,$$

onda je f injekcija i g surjekcija.

Dokaz. $f(x) = f(y)$ povlači $x = y$ jer je

$$x = \mathrm{id}_A(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = \mathrm{id}_A(y) = y.$$

Znači da je f injekcija. S druge strane, iz upravo izvedene formule $x = g(f(x))$ vidimo da je svaki $x \in A$ slika $g(y)$ elementa $y = f(x)$, pa je g surjekcija. $\square$

1. Linearne surjekcije i injekcije

1.1. Linearne surjekcije. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Kažemo da je A *linearna surjekcija (sa $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$)* ako je preslikavanje A surjektivno, tj. ako za svaki vektor b u $\mathbb{R}^m$ postoji neki vektor x u $\mathbb{R}^n$ takav da je $b = Ax$. Drugim riječima, *linearno preslikavanje A je surjekcija ako i samo ako sistem jednadžbi*

$$Ax = b$$

ima rješenje za svaki $b \in \mathbb{R}^m$.

1.2. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje i $e_1, \ldots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada je A surjekcija ako i samo ako vektori $Ae_1, \ldots, Ae_n$ razapinju $\mathbb{R}^m$.*

Dokaz. Neka vektori $Ae_1, \ldots, Ae_n$ razapinju $\mathbb{R}^m$. Tada svaki $y \in \mathbb{R}^m$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju

$$y = \lambda_1 Ae_1 + \cdots + \lambda_n Ae_n.$$

No zbog linearnosti preslikavanja A imamo

$$y = A(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n),$$

tj. y je slika vektora $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ iz $\mathbb{R}^n$. Znači da je A surjekcija.

Obrat. Pretpostavimo da je A surjekcija. Neka je $y = Ax$ za vektor

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

iz $\mathbb{R}^n$. Tada zbog linearnosti preslikavanja A imamo

$$y = A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n,$$

tj. y je linearna kombinacija vektora $Ae_1, \ldots, Ae_n$. Znači da ti vektori razapinju $\mathbb{R}^m$. $\square$

Prema teoremu 3.3.10 je broj izvodnica od $\mathbb{R}^m$ veći ili jednak m, pa u slučaju linearne surjekcije imamo neposrednu posljedicu prethodnog teorema:

1.3. Korolar. *Ako je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna surjekcija, onda je $n \geq m$.*

1.4. Pitanje. Da li je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

surjekcija? DA NE

1.5. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije dokažite da je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

surjekcija.

1.6. Linearne injekcije. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Kažemo da je A *linearna injekcija (sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$)* ako je preslikavanje A injektivno, tj. ako $Ax = Ay$ povlači $x = y$.

1.7. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Tada je A injekcija ako i samo ako homogeni sistem jednadžbi*

$$Ax = 0$$

ima jedinstveno rješenje $x = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da jednadžba $Ax = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = 0$. Neka je $Au = Av$. Tada je zbog linearnosti preslikavanja A

$$A(u - v) = Au - Av = 0,$$

pa je rješenje sistema $x = u - v = 0$, odnosno $u = v$. Znači da je A injekcija.

Obrat. Pretpostavimo da je A injekcija. Budući da je $A0 = 0$, to zbog injektivnosti $Ax = 0$ povlači $x = 0$. □

1.8. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje i $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada je A injekcija ako i samo su vektori $Ae_1, \dots, Ae_n$ linearno nezavisni.*

Dokaz. Pretpostavimo da su vektori $Ae_1, \dots, Ae_n$ linearno nezavisni. Ako je $Ax = 0$ za vektor

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n,$$

onda je zbog linearnosti preslikavanja A

$$Ax = \xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n = 0,$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $Ae_1, \dots, Ae_n$ slijedi $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$, tj. $x = 0$. Sada iz teorema 1.7 slijedi da je A injekcija.

Obrat. Pretpostavimo da je A injekcija. Ako je

$$\xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n = 0,$$

onda je zbog linearnosti preslikavanja A

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = 0,$$

pa zbog injektivnosti preslikavanja A imamo $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n = 0$, tj. $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$. Znači da su vektori $Ae_1, \ldots, Ae_n$ linearno nezavisni. $\square$

Prema teoremu 3.3.10 je broj linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^m$ manji ili jednak m, pa u slučaju linearne injekcije imamo neposrednu posljedicu prethodnog teorema:

1.9. Korolar. *Ako je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna injekcija, onda je $n \leq m$.*

1.10. Pitanje. Da li je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

injekcija? DA NE

1.11. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije dokažite injektivnost linearnog preslikavanja zadanog matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.12. Linearne bijekcije na $\mathbb{R}^n$. *Ako je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna bijekcija, onda je $n = m$.*

Naime, s jedne je strane A surjekcija, pa je prema korolaru 1.3 $n \geq m$, a s druge je strane A injekcija, pa je prema korolaru 1.9 $n \leq m$. Primijetimo da je to u suštini isti dokaz kao dokaz iste tvrdnje teorema 3.**??**. Neposredna posljedica teorema 1.2 i 1.8 je i teorem 7.7.9:

Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje i $e_1, \ldots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada je A bijekcija ako i samo ako su vektori $Ae_1, \ldots, Ae_n$ baza u $\mathbb{R}^n$.

Koristeći teorem 3.3.18 dobivamo i treću neposrednu posljedicu teorema 1.2 i 1.8:

1.13. Teorem. *Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje. Tada je ekvivalentno:*

(1) *A je bijekcija,*
(2) *A je surjekcija,*
(3) *A je injekcija.*

Ovo je jedan od najvažnijih teorema linearne algebre. Posebno je važna i korisna tvrdnja da injektivnost preslikavanja povlači surjektivnost. Naime, provjera da je A injekcija svodi se na provjeru da **jedan sistem jednadžbi**

$$Ax = 0$$

ima jedinstveno rješenje $x = 0$, a provjera da je A surjekcija svodi se na provjeru da svaki od **beskonačno mnogo sistema jednadžbi**

$$Ax = b, \qquad b \in \mathbb{R}^n$$

ima rješenje.

1.14. Primjer. Za dokaz da je linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

linearna bijekcija dovoljno je dokazati da su stupci matrice linearno nezavisni.

2. Regularni operatori na $\mathbb{R}^n$

2.1. Regularni linearni operatori. Ako je

$$A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

linearna bijekcija[1], onda je i inverzno preslikavanje

$$A^{-1} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

linearno preslikavanje[2]. Zbog ovog svojstva linearne bijekcije na na $\mathbb{R}^n$ zovemo *invertibilnim* ili *regularnim linearnim operatorima na* $\mathbb{R}^n$, a operator A^{-1} zovemo *inverzom od* A.

2.2. Inverzna matrica. Neka je A matrica tipa $n\times n$. Za $n\times n$ matricu B kažemo da je *inverzna matrica* ili *inverz* od A ako vrijedi

$$AB = BA = I.$$

Ako inverz od A postoji, onda mora biti jedinstven. Naime, ako za neku $n \times n$ matricu B' vrijedi $AB' = B'A = I$, onda zbog svojstva množenja s I i asocijativnosti množenja matrica imamo

$$B' = B'I = B'(AB) = (B'A)B = IB = B.$$

Ako postoji, inverz od A označavamo s A^{-1}.

[1] odnosno: izomorfizam od $\mathbb{R}^n$ ili automorfizam na $\mathbb{R}^n$

[2] Naime, za proizvoljna dva vektora a i b postoje jedinstveni vektori x i y takvi da je $a = A(x)$ i $b = A(y)$, odnosno $x = A^{-1}(a)$ i $y = A^{-1}(b)$, pa koristeći linearnost preslikavanja A dobivamo

$$A^{-1}(a+b) = A^{-1}(A(x)+A(y)) = A^{-1}(A(x+y)) = x+y = A^{-1}(a) + A^{-1}(b).$$

Na sličan način dokazujemo i svojstvo linearnosti u odnosu na množenja skalarom

$$A^{-1}(\alpha a) = A^{-1}(\alpha A(x)) = A^{-1}(A(\alpha x)) = \alpha x = \alpha A^{-1}(a).$$

2.3. Primjer. Matrica $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ nema inverznu matricu jer za sve 2×2 matrice (β_{ij}) imamo

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}\\\beta_{21}&\beta_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

2.4. Zadatak. Razmišljajte geometrijski i nađite inverz matrice

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

2.5. Regularni operatori i regularne matrice. Ako je A regularan operator, onda iz relacije

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I,$$

slijedi da je matrica preslikavanja A^{-1} inverzna matrica matrice preslikavanja A. Obratno, ako matrica A ima inverznu matricu B, tj. ako je

$$AB=BA=I,$$

onda je linearno preslikavanje definirano matricom A bijekcija. Naime, poistovjetimo li matrice i pripadna preslikavanja, onda je prema lemi 0.5 zbog relacije

$$AB=I$$

preslikavanje A surjekcija, a zbog relacije

$$BA=I$$

je preslikavanje A injekcija. Matrice koje imaju inverz zovemo *invertibilnim* ili *regularnim matricama.* U skladu s prijašnjim dogovorom mi ćemo često poistovjećivati regularne operatore i regularne matrice

2.6. Primjedba. Linearno preslikavanje A može biti bijekcija samo ako je $A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ za neki n. Zato iz prethodnog razmatranja slijedi da za matrice A i B može biti $AB=BA=I$ samo ako su obe matrice tipa $n\times n$ za neki n. Tako je, na primjer

$$\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1,\quad\text{ali}\quad\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

2.7. Zadatak. Nađite 2×3 matricu A i 3×2 m atricu B tako da je $AB=I$ i izračunajte BA.

2.8. Teorem. *Neka su A i B kvadratne matrice tipa $n\times n$. Tada su sljedeće tri tvrdnje ekvivalentne:*

(1) $AB=BA=I$,
(2) $AB=I$,
(3) $BA=I$.

Ako vrijedi jedna od tvrdnji, onda je $B=A^{-1}$ i $A=B^{-1}$.

DOKAZ. Shvatimo matrice A i B kao linearna preslikavanja $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ako je $AB = I$, onda je prema lemi 0.5 preslikavanje A surjekcija. No onda je prema teoremu 1.13 preslikavanje A bijekcija i postoji inverz A^{-1}. Sada iz pretpostavke $AB = I$ slijedi

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1},$$

pa vrijedi $AB = BA = I$.

Ako je $BA = I$, onda je prema lemi 0.5 preslikavanje A injekcija. No onda je prema teoremu 1.13 preslikavanje A bijekcija i postoji A^{-1}. Sada iz pretpostavke $BA = I$ slijedi

$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1},$$

pa vrijedi $AB = BA = I$. $\square$

2.9. Pitanje. Da li iz relacije $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ slijedi $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$? DA NE

2.10. Teorem. *Kvadratna $n\times n$ matrica A je regularna ako i samo ako postoje rješenja $b_1, \dots, b_n$ sistema jednadžbi*

$$Ax_1 = e_1, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n, \tag{2.1}$$

pri čemu su desne strane sistema vektori kanonske baze u $\mathbb{R}^n$. Ako je A regularna, onda je

$$A^{-1} = (b_1, \dots, b_n).$$

DOKAZ. Ako je $A^{-1} = (b_1, \dots, b_n)$ inverzna matrica matrice A, onda zbog pravila o množenju matrica imamo

$$AA^{-1} = A(b_1, \dots, b_n) = (Ab_1, \dots, Ab_n) = A^{-1} = (e_1, \dots, e_n) = I.$$

Znači da je vektor b_i rješenje sistema $Ax = e_i$.

Obratno, ako sistemi (2.1) imaju rješenja $b_1, \dots, b_n$, onda je $AB = I$ za matricu $B = (b_1, \dots, b_n)$ i tvrdnja slijedi iz teorema 2.8. $\square$

Primjedba. Ako su vektori $b_1, \dots, b_n$ iz $\mathbb{R}^n$ rješenja n sistema jednadžbi (2.1), onda je $(b_1, \dots, b_n) = A^{-1}$, pa zbog jedinstvenosti inverza slijedi da je za svaki $i = 1, \dots, n$ rješenje b_i sistema $Ax_i = e_i$ jedinstveno.

2.11. Primjer. Očito su stupci matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni, pa je A regularna matrica. Tri sistema jednadžbi (2.1) riješavamo istovremeno Gaussovom metodom:

$$(A \mid e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (I \mid b_1, b_2, b_3).$$

Dobivena matrica $B = (b_1, b_2, b_3)$ je inverz od A, tj.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.12. Zadatak. Stupci matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

su baza u $\mathbb{R}^3$. Izračunajte inverz od A.

2.13. Zadatak. Koristeći teorem 2.10 dokažite da kvadratna matrica koja ima jedan redak nula nema inverz.

2.14. Samo produkt regularnih matrica je regularna matrica. *Neka su A i B kvadratne $n \times n$ matrice i neka je produkt AB regularna matrica. Tada su A i B regularne matrice.*

Dokaz. Ako je AB regularna matrica, onda je operator $AB \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injekcija i surjekcija. Tada je očito B injekcija i A surjekcija, pa tvrdnja da su B i A bijekcije slijedi iz teorema 1.13. □

3. Opća linearna grupa $GL(n, \mathbb{R})$

3.1. Produkt regularnih operatora. *Ako su A i B regularni operatori na $\mathbb{R}^n$, onda je i kompozicija AB regularan operator i vrijedi*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

jer je zbog asocijativnosti kompozicije

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$
$$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Za višestruke produkte regularnih operatora imamo

$$(A_1A_2 \cdots A_{k-1}A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Produkt od k faktora $A_i = A^{-1}$ zapisujemo kao A^{-k}.

3.2. Pitanje. Da li je $(A^{-1})^{-1} = A^{-2}$? DA NE

3.3. Zadatak. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pokažite da $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

3.4. Pojam grupe. Za neprazan skup G kažemo da je *grupa* ako je zadana binarna operacija

$$\star\colon G\times G\to G,\quad (a,b)\mapsto a\star b,$$

tako da za sve elemente $a,b,c\in G$ vrijedi

(1) $(a\star b)\star c=a\star(b\star c)$ (asocijativnost);
(2) postoji neutralni element e tako da je $a\star e=e\star a=a$;
(3) svaki $a\in G$ ima inverzni element a^{-1} tako da je $a\star a^{-1}=a^{-1}\star a=e$.

Binarnu operaciju u grupi često zovemo množenjem[3], a neutralni element e zovemo jedinicom u grupi.

3.5. Opća linearna grupa $GL(n,\mathbb{R})$. Na skupu svih regularnih operatora na $\mathbb{R}^n$ imamo operaciju množenja (kompoziciju preslikavanja) koja je asocijativna, postoji jedinica I i svaki element A ima inverz A^{-1}. Znači da je taj skup grupa i zovemo ga *općom linearnom grupom* $GL(n,\mathbb{R})$ (čitamo "ge el en er").

3.6. Opća linearna grupa nije komutativna. Za $n\geq 2$ množenje nije komutativno. Na primjer, za $n=2$ imamo regularne operatore zadane matricama tako da je

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

Općenitije, za regularne $n\times n$ matrice

$$A=(e_1,e_1+e_2,e_3,\dots,e_n)\quad\text{i}\quad B=(e_1+e_2,e_1,e_3,\dots,e_n).$$

imamo $AB\neq BA$. Zbog toga kažemo da je $GL(n,\mathbb{R})$ nekomutativna grupa.

3.7. Uređena baza u $\mathbb{R}^n$. *Uređena baza u* $\mathbb{R}^n$ je baza $t_1,\dots,t_n$ shvaćena kao niz vektora, tj. kao n-torka vektora $(t_1,t_2,\dots,t_n)$ u kojem t_1 zovemo *prvim elementom baze*, t_2 zovemo *drugim elementom baze* itd. Prema teoremu 1.12 uređena baza je regularna matrica

$$T=(t_1,\dots,t_n)$$

čiji su stupci baza $t_1,\dots,t_n$ u $\mathbb{R}^n$. Zbog toga **skup** regularnih matrica $GL(n,\mathbb{R})$ možemo "geometrijski" shvatiti kao skup svih uređenih baza u $\mathbb{R}^n$. Na primjer, jediničnu matricu možemo shvatiti kao kanonsku bazu

$$I=(e_1,\dots,e_n),$$

a matricu

$$\begin{pmatrix}0&\dots&0&1\\0&\dots&1&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\dots&0&0\end{pmatrix}=(e_n,\dots,e_1)$$

[3]Primjer grupe je i skup svih cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ s obzirom na operaciju zbrajanja $+$. U slučaju operacije zbrajanja neutralni element zovemo nula i označavamo ga s 0, a inverzni element od a radije zovemo suprotnim elementom i označavamo ga s $-a$.

kao uređenu bazu $(e_n, \dots, e_1)$ u $\mathbb{R}^n$ kojoj je e_n prvi element, ..., e_1 n-ti element.

3.8. Elementarne matrice. Matricu dobivenu nekom elementarnom transformacijom stupaca jedinične matrice zovemo *elementarnom matricom.* Znači da imamo tri tipa elementarnih $n \times n$ matrica

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n), \qquad i < j, \tag{3.1}$$

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, \lambda e_i, e_{i+1}, \dots, , e_n), \qquad \lambda \neq 0, \tag{3.2}$$

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \lambda e_j, e_{i+1}, \dots, e_n), \qquad j \neq i. \tag{3.3}$$

Na primjer, imamo 4×4 elementarne matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.9. Množenje matrice elementarnom matricom. Neka je

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$

$m \times n$ matrica i E elementarna matrica (3.1). Tada je po definiciji množenja matrica

$$\begin{aligned} AE &= A(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= (Ae_1, \dots, Ae_{i-1}, Ae_j, Ae_{i+1}, \dots, Ae_{j-1}, Ae_i, Ae_{j+1}, \dots, Ae_n) \\ &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Znači da je $A \mapsto AE$ elementarna transformacija zamjene i-tog i j-tog stupca matrice A.

Ako je E elementarna matrica (3.2), onda je

$$\begin{aligned} AE &= A(e_1, \dots, e_{i-1}, \lambda e_i, e_{i+1}, \dots, , e_n) \\ &= (Ae_1, \dots, Ae_{i-1}, A\lambda e_i, Ae_{i+1}, \dots, Ae_n) \\ &= (a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Znači da je $A \mapsto AE$ elementarna transformacija množenja i-tog stupca matrice A skalarom $\lambda \neq 0$.

Ako je E elementarna matrica (3.3), onda je

$$\begin{aligned} AE &= A(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \lambda e_j, e_{i+1}, \dots, , e_n) \\ &= (Ae_1, \dots, Ae_{i-1}, A(e_i + \lambda e_j), Ae_{i+1}, \dots, Ae_n) \\ &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \lambda a_j, a_{i+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Znači da je $A \mapsto AE$ elementarna transformacija pribrajanja i-tom stupcu matrice A j-tog stupca pomnoženog skalarom λ.

3.10. Regularna matrica je produkt elementarnih matrica. Za regularnu matricu $T = (t_1, \dots, t_n)$ su vektori $t_1, \dots, t_n$ baza od $\mathbb{R}^n$, pa prema teoremu 3.1.17 postoji niz elementarnih transformacija

$$I \mapsto I' \mapsto \dots \mapsto T,$$

ili zapisano pomoću elementarnih matrica

$$I \mapsto IE_1 \mapsto IE_1E_2 \mapsto \dots \mapsto IE_1E_2 \dots E_s = T.$$

Znači da T možemo napisati kao produkt elementarnih matrica

$$T = E_1E_2 \dots E_s.$$

3.11. Primjer. Za niz elementarnih transformacija

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

imamo inverzne transformacije

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

pa je

$$A = IE_1E_2E_3 = I(e_1, e_2 + e_1, e_3)(e_1, e_2, e_3 + 3e_1)(e_1, e_2, e_3 - e_2).$$

Znači da je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.12. Zadatak. Napišite regularnu matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

kao produkt elementarnih matrica.

4. Matrice permutacija

4.1. Grupa permutacija S_n. Bijekciju

$$\sigma \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

obično zovemo *permutacijom skupa* $\{1, \dots, n\}$ i obično zapisujemo kao niz

$$\sigma(1), \dots, \sigma(n).$$

Tako, na primjer, niz 2431 označava permutaciju

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 3, \quad 4 \mapsto 1$$

skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Kompozicija permutacija $\sigma \circ \nu$ je permutacija koju zapisujemo $\sigma\nu$ i zovemo produktom permutacija σ i ν, a kompoziciju zovemo množenjem. Skup permutacija s tom binarnom operacijom je grupa jer je množenje asocijativno, postoji jedinica id i svaka permutacija σ ima inverz σ^{-1}. Grupu permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$ označavamo sa S_n.

4.2. Pitanje. Da li niz 123123 predstavlja permutaciju u S_6 ? DA NE

4.3. Primjer. Za permutaciju $\sigma = 3412$ je $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Naime

$$\begin{aligned}
\sigma^2(1) &= \sigma(\sigma(1)) = \sigma(3) = 1,\\
\sigma^2(2) &= \sigma(\sigma(2)) = \sigma(4) = 2,\\
\sigma^2(3) &= \sigma(\sigma(3)) = \sigma(1) = 3,\\
\sigma^2(4) &= \sigma(\sigma(4)) = \sigma(2) = 4.
\end{aligned}$$

4.4. Pitanje. Da li je 4231 inverz permutacije 4231 u S_4 ? DA NE

4.5. Matrice permutacija. Za permutaciju σ skupa $\{1, \dots, n\}$ definiramo $n \times n$ *matricu permutacije*

$$T_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Drugim riječima, matrica permutacije σ je matrica regularnog operatora T_σ na $\mathbb{R}^n$ definiranog na kanonskoj bazi relacijama

$$T_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}\,, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Na primjer, za permutaciju 4231 u S_4 imamo 4×4 matricu permutacije

$$T_\sigma = (e_4, e_2, e_3, e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a za identitetu $\mathrm{id} = 1234$ je matrica permutacije jedinična matrica

$$T_{\mathrm{id}} = (e_1, e_2, e_3, e_4) = I.$$

4.6. Pitanje. Da li je $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ matrica permutacije? DA NE

4.7. Množenje matrica permutacija. Budući da za produkt permutacija $\sigma\nu$ vrijedi

$$T_{\sigma\nu} e_j = e_{(\sigma\nu)(j)} = e_{\sigma(\nu(j))} = T_\sigma e_{\nu(j)} = T_\sigma(T_\nu e_j),$$

to za matrice permutacija vrijedi formula

$$T_{\sigma\nu} = T_\sigma T_\nu. \tag{4.1}$$

Budući da je $T_{\mathrm{id}} = I$, iz gornje formule slijedi $I = T_\sigma T_{\sigma^{-1}}$, odnosno

$$T_{\sigma^{-1}} = (T_\sigma)^{-1}. \tag{4.2}$$

4.8. Primjer. Budući da je $\sigma^2 = \mathrm{id}$ za permutaciju $\sigma = 3412$, to je

$$T_\sigma^2 = I, \qquad (T_\sigma)^{-1} = T_\sigma,$$

ili zapisano pomoću matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.9. Matrica inverza permutacije. *Neka je σ permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$. Tada je*

$$(T_\sigma)^t = T_{\sigma^{-1}}. \tag{4.3}$$

Na primjer,

$$(e_3, e_1, e_4, e_2)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (e_2, e_4, e_1, e_3).$$

DOKAZ. Matrica T_σ permutacije $\sigma \in S_n$ u svakom stupcu i svakom retku ima jednu jedinicu i sve ostale elemente nula. Zato je i transponirana matrica $(T_\sigma)^t$ matrica permutacije T_ν za neku permutaciju ν. Matrične elemente od $T_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = (\alpha_{ij})$ i transponirane matrice $T_\nu = (\beta_{ij})$ možemo zapisati

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kad je } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{inače,} \end{cases} \qquad \beta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{kad je } j = \nu(i) \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

No po definiciji transponirane matrice imamo $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$, pa

$$i = \sigma(j) = \sigma(\nu(i)) \quad \text{i} \quad j = \nu(i) = \nu(\sigma(j))$$

povlači $\sigma\nu = \nu\sigma = \mathrm{id}$, odnosno $\nu = \sigma^{-1}$. □

5. Trukutaste matrice

5.1. Pojam podgrupe. Ako je G s binarnom operacijom $\star$ grupa, onda kažemo da je podskup $H \subset G$ *podgrupa* ako je H s operacijom $\star$ grupa. To znači da H sadrži jedinicu i da je zatvoreno za operacije množenja i invertiranja.

5.2. Primjer. Skup svih matrica permutacija

$$\{T_\sigma \mid \sigma \in S_n\} \subset GL(n, \mathbb{R})$$

je podgrupa opće linearne grupe jer je zbog (4.1) zatvoren za množenje matrica, sadrži jediničnu matricu i zbog (4.2) je zatvoren za invertiranje matrica.

S druge strane, skup svih prirodnih brojeva $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ je zatvoren za operaciju zbrajanja u grupi cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, ali $\mathbb{N}$ nije podgrupa jer nema neutralni element 0 i za prirodan broj n ne sadrži njemu suprotni $-n$.

5.3. Množenje trokutastih matrica. *Neka su $A = (\alpha_{ij})$ i $B = (\beta_{ij})$ gornje trokutaste $n \times n$ matrice. Tada je i AB gornja trokutasta matrica.*

Naime, po pretpostavci je $\alpha_{ij} = 0$ i $\beta_{ij} = 0$ za $i > j$. Zato je za $i > j$

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum_{k=i}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} = 0,$$

gdje je prva jednakost definicija matričnog elementa u produktu matrica $C = AB$, druga jednakost vrijedi zbog $\alpha_{ik} = 0$ za $i > k$, a treća jednakost vrijedi jer je $\beta_{kj} = 0$ za $k \geq i > j$.

Na sličan način vidimo i da je produkt donjih trokutastih matrica donja trokutasta matrica.

5.4. Zadatak. Izračunajte produkte AB i BA za donje trokutaste matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i uvjerite se da je $AB \neq BA$.

5.5. Regularne trokutaste matrice. *Neka je A gornja ili donja trokutasta matrica. Tada je A regularna ako i samo ako su joj svi dijagonalni elementi α_{ii} različiti od nule.*

Naime, ako su svi dijagonalni elementi gornje trokutaste matrice A različiti od nule, onda obratnim hodom Gaussove metode vidimo da sistem jednadžbi $Ax = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = 0$ i da je prema teoremu 1.7 i 1.13 matrica A regularna. Obratno, neka je $\alpha_{jj} = 0$ za neki j i neka je j najmanji takav indeks, tj. neka je $\alpha_{ii} \neq 0$ za $i < j$. Tada obratnim hodom Gaussove metode za sistem $Ax = 0$ vidimo da je za $\xi_n = \cdots = \xi_{j+1} = 0$ jednadžba

$$0\xi_j + \alpha_{j,j+1}0 + \cdots + \alpha_{j,n}0 = 0$$

zadovoljena za svaki skalar ξ_j i da za svaki izbor ξ_j jednadžbe

$$\alpha_{ii}\xi_i + \alpha_{i,i+1}\xi_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\xi_n = 0$$

određuju jedinstvene ξ_i za $i < j$. Znači da sistem $Ax = 0$ nema jedinstveno rješenje i da prema teoremu 1.7 i 1.13 matrica A nije regularna.

Tvrdnju za donje trokutaste matrice dokazujemo na sličan način.

5.6. Pitanje. Da li je donja trokutasta matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

regularna? DA NE

5.7. Invertiranje trokutastih matrica. *Neka je A regularna gornja trokutasta matrica. Tada je inverz od A gornja trokutasta matrica.*

Naime, inverz od A računamo istovremenim rješavanjem n sistema jednadžbi Gaussovim eliminacijama

$$(A \mid I) \mapsto \ldots \mapsto (I \mid B),$$

gdje je B na kraju postupka traženi inverz. Postupak započinjemo dijeljenjem n-tog retka s $\alpha_{nn} \neq 0$ i eliminacijom prvih $n-1$ elemenata u n-tom stupcu matrice A, pri čemu umjesto vektora e_n u matrici I dobivamo neki novi vektor. Zatim dijelimo $(n-1)$-ti redak s $\alpha_{n-1,n-1} \neq 0$ i eliminiramo prvih $n-2$ elemenata u $(n-1)$-tom stupcu matrice A, pri čemu umjesto vektora e_{n-1} iz početne matrice I dobivamo neki novi vektor kojemu je zadnja koordinata 0. Nastavljajući taj postupak dobivamo gornju trokutastu matricu B.

Na sličan način vidimo i da je inverz donje trokutaste matrice donja trokutasta matrica započinjući postupak s elementom α_{11}.

5.8. Zadatak. Invertirajte donju trokutastu matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.9. Podgrupe gornjih i donjih trokutastih matrica. *Iz gornjih razmatranja slijedi da je skup svih regularnih gornjih trokutastih $n \times n$ realnih matrica podgrupa opće linearne grupe $GL(n, \mathbb{R})$. Isto tako je skup svih regularnih donjih trokutastih $n \times n$ realnih matrica podgrupa opće linearne grupe $GL(n, \mathbb{R})$.*

6. Matrica operatora u paru baza

6.1. Koordinate vektora u bazi. Neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K i neka je $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ uređena baza od V. Tada je koordinatizacija s obzirom na bazu B

$$V \to K^n, \quad x \mapsto x_B$$

izomorfizam vektorskih prostora koji vektoru x iz V pridružuje njegove koordinate x_B u K^n:

$$x = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \cdots + \xi_n b_n \mapsto x_B = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Linearnost koordinatizacije

$$(x+y)_B = x_B + y_B, \quad (\lambda x)_B = \lambda x_B.$$

možemo općenitije zapisati kao

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \right)_B = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i)_B. \tag{6.1}$$

6.2. Primjer. Neka je V realni vektorski prostor polinoma stupnja ≤ 2 i E uređena baza

$$(1, x, x^2).$$

Tada imamo koordinatizaciju $V \to \mathbb{R}^3$,

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)_E = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

6.3. Napomena. Primijetimo da u slučaju $V = K^n$ s kanonskom bazom $E = (e_1, \ldots, e_n)$ imamo

$$x = x_E.$$

Na primjer, u $\mathbb{R}^3$ imamo

$$x = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = x_E.$$

6.4. Matrica linearnog operatora. Neka je V vektorski prostor s uređenom bazom $E = (e_1, \ldots, e_n)$ i W vektorski prostor s uređenom bazom $F = (f_1, \ldots, f_m)$. Neka je

$$A \colon V \to W$$

linearan operator. Tom linearnom operatoru pridružujemo matricu tipa $m \times n$ čiji su stupci koordinate vektora $Ae_1, \ldots, Ae_n$

$$A_{FE} = ((Ae_1)_F, \ldots, (Ae_n)_F). \tag{6.2}$$

Ako je $A_{FE} = (\alpha_{ij})$, onda dogovor o matrici operatora znači

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad \text{za } j = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

6.5. Napomena. Primijetimo da je pojam matrice linearnog preslikavanja $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uveden u prethodnom poglavlju u skladu s općom konstrukcijom jer za kanonske baze E u $\mathbb{R}^n$ i F u $\mathbb{R}^m$ imamo matricu preslikavanja

$$A_{FE} = ((Ae_1)_F, \dots, (Ae_n)_F) = (Ae_1, \dots, Ae_n).$$

6.6. Primjer. Neka je V vektorski prostor polinoma stupnja ≤ 2 i E i F uređene baze

$$E = (1, x, x^2), \quad F = (1, x+1, (x+1)^2).$$

Da bismo izračunali matricu I_{EF} identitete I moramo računati vrijednosti identitete na elementima baze F i te vrijednosti raspisati u bazi E

$$\begin{aligned} I(1) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2, \\ I(x+1) &= x + 1 = 1 \cdot 1 + 1x + 0x^2, \\ I((x+1)^2) &= (x+1)^2 = 1 \cdot 1 + 2x + 1x^2. \end{aligned}$$

Sada koeficijente zapišemo u stupce

$$I_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.7. Zadatak. Neka su V, E i F kao u prethodnom zadatku. Napišite matricu identitete I_{FE}.

6.8. Pitanje. Neka je e_1, e_2 kanonska baza u prostoru $\mathbb{R}^2$ koji shvatimo kao euklidsku ravninu. Da li je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ u uređenoj bazi (e_2, e_1)? DA NE

6.9. Teorem. *Koordinate vektora Ax u bazi F računamo kao množenje matrice operatora A_{FE} i koordinata vektora x u bazi E, tj.*

$$(Ax)_F = A_{FE} x_E. \tag{6.4}$$

Dokaz. Zbog linearnosti operatora A i inearnosti koordinatizacije (6.1) imamo

$$(Ax)_F = \left(A \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \right)_F = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i A e_i \right)_F = \sum_{i=1}^n \xi_i \, (Ae_i)_F \,.$$

No zadnji izraz je upravo definicija množenja matrice $((Ae_1)_F, \dots, (Ae_n)_F)$ i vektora x_E s koordinatama $\xi_1, \dots, \xi_n$. □

6.10. Kompozicija operatora i množenje matrica. *Ako su* V, W, U *tri prostora s uređenim bazama* E, F, G

$$A\colon V \to W, \quad B\colon W \to U,$$

onda je za kompoziciju $BA\colon V \to U$ *matrica dobivena množenjem matrica*

$$(BA)_{GE} = B_{GF} A_{FE}. \tag{6.5}$$

Zaista, koristeći definiciju matrice operatora i formulu (6.4) za j-ti stupac dobivamo

$$(BAe_j)_G = B_{GF}(Ae_j)_F,$$

a to je upravo formula za j-ti stupac u produktu na desnoj strani (6.5).

6.11. Slučaj iste baze. Ako je V vektorski prostor s uređenom bazom E i $A\colon V \to V$ linearan operator, onda je običaj pisati

$$A_E = A_{EE}.$$

U tom slučaju formula (6.4) glasi

$$(Ax)_E = A_E x_E. \tag{6.6}$$

Očito je matrica identitete jedinična matrica, tj.

$$(\mathrm{id})_E = I.$$

6.12. Primjer. Neka je V vektorski prostor polinoma stupnja ≤ 2 i E uređena baza

$$E = (1, x, x^2).$$

Označimo s A deriviranje polinoma $A\colon V \to V$, $A\colon f \mapsto f'$. Deriviranje polinoma je linearan operator jer vrijede pravila deriviranja

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f'.$$

Matricu A_E operatora A u bazi E određujemo tako da izračunamo vrijednosti operatora na elementima baze

$$\begin{aligned} (1)' &= 0 = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2, \\ (x)' &= 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2, \\ (x^2)' &= 2x = 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2 \end{aligned}$$

i onda koeficijente upišemo u stupce matrice

$$A_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.13. Zadatak. Izračunajte produkte $I_{EF} I_{FE}$ i $I_{FE} I_{EF}$ iz primjera 6.6 i zadatka 6.7.

6.14. Matrica inverza operatora. Za regularan operator $T\colon V \to V$ formula (6.5) za $\mathrm{id} = T^{-1}T = TT^{-1}$ daje

$$(\mathrm{id})_E = (T^{-1})_E T_E = T_E (T^{-1})_E,$$

pa zbog jedinstvenosti inverza imamo

$$(T^{-1})_E = (T_E)^{-1}.$$

6.15. Promjena baze i operator prijelaza. Neka su $E = (e_1, \dots, e_n)$ i $E' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dvije uređene baze u V. Operator

$$T\colon V \to V$$

zadan na bazi $e_1, \dots, e_n$ formulom

$$Te_1 = e'_1, \quad \dots, \quad Te_n = e'_n$$

zovemo *operatorom prijelaza iz baze E u bazu E'*. Kvadratnu $n \times n$ matricu T_E zovemo *matricom operatora prijelaza iz baze E u bazu E'* ili *matricom prijelaza iz baze E u bazu E'*. Podsjetimo se da je T_E definirana kao

$$T_E = ((e'_1)_E, \dots, (e'_n)_E) = ((Te_1)_E, \dots, (Te_n)_E).$$

6.16. Primjer. Neka je E kanonska baza u $\mathbb{R}^3$ i neka je E' uređena baza

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Budući da u ovom primjeru imamo napisane koordinate vektora e'_1,e'_2 i e'_3 u kanonskoj bazi, jedino što nam preostaje da te koordinate napišemo u stupce matrice:

$$T_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.17. Operator prijelaza i matrica prijelaza u $\mathbb{R}^n$. Neka su

$$T = (t_1, \dots, t_n) \quad \text{i} \quad S = (s_1, \dots, s_n)$$

dvije uređene baze u $\mathbb{R}^n$. Tada su matrice T i S regularne, pa možemo definirati operatore

$$A = TS^{-1} \quad \text{i} \quad B = ST^{-1}.$$

Tada je

$$AS = (TS^{-1})S = T(S^{-1}S) = TI = T,$$

ili zapisano kao množenje matrica

$$(As_1, \dots, As_n) = (t_1, \dots, t_n).$$

Znači da je A operator prijelaza iz baze S u bazu T, odnosno

$$t_1 = As_1, \dots, \; t_n = As_n.$$

Na sličan način vidimo i da je B operator prijelaza iz baze T u bazu S, odnosno

$$s_1 = Bt_1, \ldots, \; s_n = Bt_n.$$

Matrice A i B **nisu**[4] matrice prijelaza iz jedne u drugu bazu jer je

$$A_S = S^{-1}AS = S^{-1}ST^{-1}S = T^{-1}S,$$

a matrica prijelaza iz baze T u bazu S je

$$B_T = T^{-1}BT = T^{-1}ST^{-1}T = T^{-1}S.$$

6.18. Promjena koordinata s promjenom baze. Za vektor x imamo zapis u bazi E'

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j' e_j',$$

pa zbog linearnosti koordinatizacije imamo

$$x_E = (\sum_{j=1}^{n} \xi_j' e_j')_E = \sum_{j=1}^{n} \xi_j' (e_j')_E.$$

Tu formulu prepoznajemo kao množenje matrice $T_E = ((e_1')_E, \ldots, (e_n')_E)$ i vektora $x_{E'}$ s kordinatama $\xi_1', \ldots, \xi_n'$. Dakle imamo formulu za transformaciju koordinata pri promjeni baze:

$$x_E = T_E x_{E'}. \tag{6.7}$$

Budući da je matrica prijelaza regularna matrica, *koordinate $x_{E'}$ vektora x u bazi E' računamo iz koordinata x_E vektora x u bazi E po formuli*

$$x_{E'} = (T_E)^{-1} x_E. \tag{6.8}$$

6.19. Promjena matrice operatora s promjenom baze. *Neka su $E = (e_1, \ldots, e_n)$ i $E' = (e_1', \ldots, e_n')$ dvije uređene baze u V s matricom prijelaza T_E i $F = (f_1, \ldots, f_m)$ i $F' = (f_1', \ldots, f_m')$ dvije uređene baze u W s matricom prijelaza S_F. Operatoru*

$$A \colon V \to W$$

možemo pridružiti matrice $A_{F,E}$ i $A_{F',E'}$. Tada je

$$A_{F'E'} = (S_F)^{-1} A_{FE} T_E.$$

Dokaz. Koristeći formulu (6.7) računamo koordinate vektora

$$S_F (Ae_j')_{F'} = (Ae_j')_F = (ATe_j)_F = A_{FE}(Te_j)_E.$$

Po definiciji množenja matrica to su j-ti stupci u matricama

$$S_F A_{F'E'} = A_{FE} T_E,$$

pa formula slijedi množenjem te jednakosti s lijeva inverzom $(S_F)^{-1}$. □

[4] Ovo je dobar primjer kako nije uvijek dobro identificirati operatore na $\mathbb{R}^n$ s njihovim matricama!

Posebno je važan slučaj kad je $A\colon V \to V$. Tada formula glasi

$$A_{E'} = (T_E)^{-1} A_E T_E. \tag{6.9}$$

6.20. Zadatak. Neka je V vektorski prostor polinoma stupnja ≤ 2 i E i F uređene baze

$$E = (1, x, x^2), \quad F = (1, x+1, (x+1)^2).$$

U primjeru 6.12 našli smo matricu A_E operatora deriviranja u bazi E. Izračunajte matricu operatora deriviranja A_F u bazi F.

POGLAVLJE 9

Determinanta operatora

U ovom poglavlju dokazujemo Binet-Cauchyjev teorem koristeći osnovni teorem o determinanti. Zbog Binet-Cauchyjevog teorema možemo definirati determinantu linearnog operatora na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru i pojam jednako orijentiranih baza na realnom prostoru, a predznak permutacije definiramo kao determinantu pripadne matrice permutacije. Nakon toga dokazujemo Laplaceov razvoj determinante, te formule za Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije koristeći Gramove matrice.

1. Binet-Cauchyjev teorem

1.1. Binet-Cauchyjev teorem. *Neka su A i B matrice tipa $n \times n$. Tada je*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

DOKAZ. Definirajmo funkciju $f\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \det(Av_1, \ldots, Av_n).$$

Budući da je A linearno preslikavanje i determinanta linearna funkcija u i-toj varijabli, to je i kompozicija

$$\begin{aligned} x \mapsto Ax \mapsto & \det(Av_1, \ldots, Av_{i-1}, Ax, Av_{i+1}, \ldots, Av_n) \\ &= f(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

linearna funkcija. Znači da je f multilinearna funkcija. Budući da je determinanta alternirajuća funkcija, to je i f alternirajuća:

$$\begin{aligned} & f(v_1, \ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= \det(Av_1, \ldots, Av_{i-1}, Aa, Av_{i+1}, \ldots, Av_{j-1}, Ab, Av_{j+1}, \ldots, Av_n) \\ &= -\det(Av_1, \ldots, Av_{i-1}, Ab, Av_{i+1}, \ldots, Av_{j-1}, Aa, Av_{j+1}, \ldots, Av_n) \\ &= -f(v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

Prema teoremu 9.4.13 vrijedi

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f(e_1, \ldots, e_n) \det(b_1, \ldots, b_n),$$

odnosno

$$\det(Ab_1, \ldots, Ab_n) = \det(Ae_1, \ldots, Ae_n) \det(b_1, \ldots, b_n),$$

a to i jest Binet-Cauchyjeva formula $\det(AB) = \det A \det B$. □

1.2. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja. Zapišemo li kompleksni broj $z = \alpha + i\beta$ kao realnu 2×2 matricu, onda je

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2.$$

Tada iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

1.3. Apsolutna vrijednost kvaterniona. Za kvaternione imamo

$$\det Z = \det \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |Z|^2.$$

Tada iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$.

1.4. Determinanta je invarijanta. Ako je T regularna $n \times n$ matrica, onda je prema Binet-Cauchyjevom teoremu za svaku $n \times n$ matricu A

$$\begin{aligned} \det T^{-1} A T &= \det T^{-1} \det A \det T = \det T^{-1} \det T \det A \\ &= \det T^{-1} T \det A = \det I \det A = \det A. \end{aligned}$$

Funkciju f na skupu $n \times n$ matrica zovemo *invarijantom* ako za svaku regularnu $n \times n$ matricu T vrijedi

$$f(T^{-1} A T) = f(A).$$

Posebno, funkcija det na skupu $n \times n$ matrica je invarijanta.

1.5. Determinanta linearnog operatora. Razmatranje iz prethodne točke možemo ponoviti i u općenitijoj situaciji: Neka je $A \colon V \to V$ linearni operator na konačno dimenzionalnom prostoru V i $E = (e_1, \dots, e_n)$ i $E' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dvije uređene baze u V. Tada su matrice operatora A u tim bazama vezane relacijom

$$A_{E'} = T_E^{-1} A_E T_E,$$

pri čemu je T_E matrica prijelaza, pa primjenom Binet-Cauchyjevog teorema dobivamo

$$\det A_{E'} = \det A_E.$$

Znači da determinanta matrice operatora ne ovisi o izboru baze, pa je zovemo determinantom operatora i pišemo

$$\det A = \det A_E.$$

1.6. Zadatak. Izračunajte determinantu $\det(I + \frac{d}{dx})$ linearnog operatora $I + \frac{d}{dx}$ na prostoru polinoma $P(x)$ stupnja ≤ 2.

1.7. Determinanta preslikavanja je faktor povećanja volumena. Neka je B matrica tipa 3×3, shvatimo je kao linearno preslikavanje

$$B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Neka su a_1, a_2, a_3 vektori u $\mathbb{R}^3$. Oni određuju paralelepiped

$$\{y \in \mathbb{R}^3 \mid y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3,\ 0 \le \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \le 1\}$$

volumena $\det(a_1, a_2, a_3)$ kojeg linearno preslikavanje B prevodi u paralelepiped

$$\begin{aligned} &B\left(\{y \in \mathbb{R}^3 \mid y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3,\ 0 \le \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \le 1\}\right) \\ &\quad = \{By \in \mathbb{R}^3 \mid By = \lambda_1 Ba_1 + \lambda_2 Ba_2 + \lambda_3 Ba_3,\ 0 \le \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \le 1\} \end{aligned}$$

volumena $\det(Ba_1, Ba_2, Ba_3)$. Prema Binet-Cauchyjevom teoremu

$$\det(Ba_1, Ba_2, Ba_3) = \det B \cdot \det(a_1, a_2, a_3)$$

preslikavanje B je povečalo volumen početnog paralelepipeda za faktor[1]

$$\det B.$$

Intuitivno shvaćanje determinate $\det(a_1, a_2, a_3)$ kao volumena ili $\det B$ kao faktora povećanja volumena daje nam geometrijsko razumijevanje nekih čisto algebarskih tvrdnji kao što je

Lema. *Ako je* $\det B = 0$*, onda* B *nije regularna matrica.*

Razmišljajući intiutivno, matrica B za koju je $\det B = 0$ nema inverz, jer paralelepiped (a_1, a_2, a_3) volumena $\det(a_1, a_2, a_3) \neq 0$ preslikava u paralelepiped (Ba_1, Ba_2, Ba_3) volumena 0 i nema tog preslikavanja C s faktorom povećanja volumena $\det C$ koje bi paralelepiped volumena 0 vratilo u početni paralelepiped volumena različitog od nula.

Formalni dokaz leme je u suštini isti: Neka je $\det B = 0$. Pretpostavimo li da B ima inverz C, onda bi, koristeći Binet-Cauchyjev teorem, dobili kontradikciju

$$0 = 0 \det C = \det B \det C = \det BC = \det I = 1.$$

1.8. Specijalna linearna grupa $SL(n, \mathbb{R})$. Linearna preslikavanja koja čuvaju volumen[2] čine grupu. Ta se grupa zove *specijalna linearna grupa* $SL(n, \mathbb{R})$ (čitamo: grupa es el en er):

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Naime, za $A, B \in SL(n, \mathbb{R})$ imamo $\det AB = \det A \det B = 1 \cdot 1 = 1$, dakle $AB \in SL(n, \mathbb{R})$. Također $\det I = 1$, pa je $I \in SL(n, \mathbb{R})$. Na kraju, $\det A^{-1} = 1/\det A = 1/1 = 1$, pa je $\det A^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$.

---

[1] Ova interpretacija determinante javlja se u integralnom računu kod teorema o zamjeni varijabli.

[2] tj. ona preslikavanja A za koja je faktor povečanja volumena $\det A = 1$

1.9. Orijentacija baze realnog vektorskog prostora. Neka su $E = (e_1, \dots, e_n)$ i $E' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dvije uređene baze u realnom vektorskom prostoru V. Matricu prijelaza T_E iz baze E u bazu E' možemo shvatiti i kao matricu identitete na V u paru baza

$$T_E = ((Te_1)_E, \dots, (Te_n)_E) = ((e'_1)_E, \dots, (e'_n)_E) = \mathrm{id}_{EE'}.$$

Kažemo da su *baze E i E' jednako orijentirane* ako je

$$\det\big(\mathrm{id}_{EE'}\big) > 0.$$

U tom slučaju zbog Binet-Cauchyjevog teorema imamo

$$\det\big(\mathrm{id}_{EE'}\big)\det\big(\mathrm{id}_{E'E}\big) = \det\big(\mathrm{id}_{EE'}\,\mathrm{id}_{E'E}\big) = \det\big(\mathrm{id}_{EE}\big) = \det I = 1 > 0,$$

pa je

$$\det\big(\mathrm{id}_{E'E}\big) > 0.$$

Znači da su baze E i E' jednako orijentirane ako i samo ako su baze E' i E jednako orijentirane. Štoviše, ako su baze E i E' i baze E' i E'' jednako orijentirane, onda su i su baze E i E'' jednako orijentirane jer je

$$\det\big(id_{EE''}\big) = \det\big(id_{EE'}\,id_{E'E''}\big) = \det\big(id_{EE'}\big)\det\big(id_{E'E''}\big) > 0.$$

Odavle slijedi da u V postoje dvije disjunktne klase baza takve da su baze iz iste klase jednako orijentirane, a baze iz različitih klasa nisu jednako orijentirane[3].

1.10. Pitanje. Da li su kanonska baza (e_1, e_2) u $\mathbb{R}^2$ i baza (e_2, e_1) suprotno orijentirane? DA NE

1.11. Zadatak. Neka je V vektorski prostor polinoma stupnja ≤ 2 i E i F uređene baze

$$E = (1, x, x^2), \quad F = (1, x+1, (x+1)^2).$$

Da li su E i F jednako orijentirane?

2. Determinanta i grupa permutacija

2.1. Matrice permutacija. Podsjetimo se da za permutaciju σ skupa $\{1, \dots, n\}$ definiramo $n \times n$ matricu permutacije

$$T_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Tako, na primjer, za permutaciju 4231 u S_4 imamo 4×4 matricu permutacije[4]

$$T_\sigma = (e_4, e_2, e_3, e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

[3] Obično kažemo da su baze *suprotno orijentirane* ako nisu jednako orijentirane.

[4] vidi točku 8.4.5

a za identitetu id = 1234 je matrica permutacije jedinična matrica

$$T_{\mathrm{id}} = (e_1, e_2, e_3, e_4) = I.$$

2.2. Predznak permutacije. *Neka je σ permutacija skupa* $\{1, \ldots, n\}$ *i T_σ matrica permutacije. Tada je*

$$\det T_\sigma = \det(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \in \{1, -1\}.$$

Naime, u matrici $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ vektor e_1 možemo premijestiti na prvo mjesto zamjenom s prvim vektorom u matrici. Potom e_2 možemo premijestiti na drugo mjesto, i tako redom sve dok ne dobijemo jediničnu matricu $I = (e_1, \ldots, e_n)$. Budući da kod zamjene mjesta dvaju vektora mijenjamo predznak alternirajućoj funkciji det, to je konačni rezultat $(-1)^s \det I$, gdje je s broj izvršenih zamjena. Budući da je $\det I = 1$, konačni rezultat je ± 1. Na primjer, za permutaciju 3241 imamo

$$\det(e_3, e_2, e_4, e_1) = -\det(e_1, e_2, e_4, e_3) = (-1)^2 \det(e_1, e_2, e_3, e_4) = 1.$$

To smo, doduše, mogli postići i na drugi način

$$\begin{aligned} \det(e_3, e_2, e_4, e_1) &= -\det(e_3, e_2, e_1, e_4) = (-1)^2 \det(e_3, e_1, e_2, e_4) \\ &= (-1)^3 \det(e_1, e_3, e_2, e_4) = (-1)^4 \det(e_1, e_2, e_3, e_4) = 1, \end{aligned}$$

ali rezultat je isti. Broj

$$\varepsilon(\sigma) = \det T_\sigma$$

zovemo *predznakom permutacije* σ i često ga označavamo i kao $(-1)^\sigma$. Tako je, na primjer, predznak permutacije 3241 jednak 1. Očito je predznak identitete 1, uz uvedene oznake pišemo

$$\varepsilon(\mathrm{id}) = \det T_{\mathrm{id}} = \det I = 1.$$

2.3. Zadatak. Izračunajte predznak permutacije 32514.

2.4. Predznak produkta permutacija. Neka su σ i ν permutacije skupa $\{1, \ldots, n\}$. Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema na formulu (8.4.1)

$$T_{\sigma\nu} = T_\sigma T_\nu$$

dobivamo formulu za predznak produkta permutacija

$$\det T_{\sigma\nu} = \det T_\sigma \det T_\nu.$$

Kada je $\sigma\nu = \mathrm{id}$, odnosno $\nu = \sigma^{-1}$, imamo

$$\det T_\sigma \det T_{\sigma^{-1}} = 1.$$

Budući da je predznak permutacije jednak ± 1, dobivamo da su predznaci permutacija σ i σ^{-1} isti

$$\det T_{\sigma^{-1}} = \det T_\sigma.$$

2.5. Zadatak. Napišite inverz permutacije 32514 i izračunajte predznak inverza.

3. Determinanta transponirane matrice

3.1. Indeksi s indeksima. Recimo da tri "opća" vektora a_1, a_2 i a_3 trebamo napisati u kanonskoj bazi. Tada bismo, u skladu s dogovorom, pisali

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} e_i, \quad a_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} e_i, \quad a_3 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i3} e_i.$$

Ako kojim slučajem treba koristiti različite indekse sumacije, onda se odlučimo za slova i, j i k i pišemo

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} e_i, \quad a_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} e_j, \quad a_3 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k3} e_k.$$

Birati tri različita slova i, j i k je lako, ali što ako treba birati sto različitih slova? Odgovor je u pisanju indeksa s indeksima: u našem slučaju možemo birati tri različita slova j_1, j_2, j_3 i pisati

$$a_1 = \sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{j_1 1} e_{j_1}, \quad a_2 = \sum_{j_2=1}^{n} \alpha_{j_2 2} e_{j_2}, \quad a_3 = \sum_{j_3=1}^{n} \alpha_{j_3 3} e_{j_3}.$$

3.2. Teorem. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ kvadratna $n \times n$ matrica. Tada je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}. \tag{3.1}$$

Dokaz.

$$\det A = \det(a_1, a_2 \ldots, a_n)$$

$$= \det\Big(\sum_{j_1} \alpha_{j_1 1} e_{j_1}, \sum_{j_2} \alpha_{j_2 2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n} \alpha_{j_n n} e_{j_n}\Big) \tag{3.2}$$

$$= \sum_{j_1} \alpha_{j_1 1} \det\Big(e_{j_1}, \sum_{j_2} \alpha_{j_2 2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n} \alpha_{j_n n} e_{j_n}\Big) \tag{3.3}$$

$$= \sum_{j_1} \alpha_{j_1 1} \sum_{j_2} \alpha_{j_2 2} \det\Big(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n} \alpha_{j_n n} e_{j_n}\Big) \tag{3.4}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{j_1} \alpha_{j_1 1} \sum_{j_2} \alpha_{j_2 2} \cdots \sum_{j_n} \alpha_{j_n n} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) \tag{3.5}$$

$$= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n} \alpha_{j_1 1} \alpha_{j_2 2} \cdots \alpha_{j_n n} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) \tag{3.6}$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \alpha_{j_1 1} \alpha_{j_2 2} \cdots \alpha_{j_n n} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) \tag{3.7}$$

$$= \sum_{\sigma \in S(n)} \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \cdots \alpha_{\sigma(n)n} \det(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}). \tag{3.8}$$

Ovdje smo u (3.2) napisali vektore $a_1, a_2 \ldots, a_n$ u kanonskoj bazi koristeći različite indekse. Potom smo u (3.3) koristili linearnost determinante u prvom argumentu, u (3.4) linearnost u drugom argumentu i tako redom do zadnjeg argumenta u (3.5). Koristeći distributivnost množenja prema zbrajanju dobili smo (3.6) i to prepisali kraće u (3.7) naznačivši da svi indeksi $j_1, j_2, \ldots, j_n$ poprimaju sve moguće vrijednosti iz skupa $\{1, \ldots, n\}$. Međutim, ako neka dva indeksa poprime istu vrijednost $j_r = j_s$, onda je $\det(e_{j_1}, e_{j_2} \ldots, e_{j_n}) = 0$ jer ima isti vektor $e_{j_r} = e_{j_s}$ na dva mjesta, r-tom i s-tom. Znači da je dovoljno napisati sumu za sve međusobno različite indekse $j_1, j_2, \ldots, j_n$. No svaki takav izbor određuje jedinstvenu permutaciju

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)) = (j_1, j_2, \ldots, j_n),$$

kako je i napisano u (3.8). Ovdje smo se odlučili pisati predznak permutacije kao $\det(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)$. $\square$

3.3. Teorem. *Za kvadratnu matricu $A = (\alpha_{ij})$ vrijedi*

$$\det A = \sum_{\tau \in S(n)} \varepsilon(\tau) \alpha_{1\tau(1)} \cdots \alpha_{n\tau(n)}.$$

DOKAZ. Neka je $A = (\alpha_{ij})$. Prema teoremu 3.2

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Budući da je za permutaciju σ skup vrijednosti $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ čitav skup $1, \ldots, n$, to produkt

$$\alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}$$

možemo prepisati u drugom poretku

$$\alpha_{1\tau(1)} \cdots \alpha_{n\tau(n)},$$

pri čemu je faktor $\alpha_{\sigma(k)k} = \alpha_{p\tau(p)}$ za $\sigma(k) = p$ i $k = \tau(p)$. Znači da je $\tau = \sigma^{-1}$, pa formulu za determinantu možemo prepisati kao

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S(n) \\ \tau = \sigma^{-1}}} \varepsilon(\tau^{-1}) \alpha_{1\tau(1)} \cdots \alpha_{n\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S(n)} \varepsilon(\tau) \alpha_{1\tau(1)} \cdots \alpha_{n\tau(n)}. \end{aligned}$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je svaki τ oblika $\tau = \sigma^{-1}$ za točno jedan $\sigma = \tau^{-1}$ i jer je $\varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(\tau)$. $\square$

3.4. Teorem. *Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi*

$$\det A^t = \det A.$$

DOKAZ. Prema teoremu 3.2 i teoremu 3.3 imamo

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha'_{\sigma(1)1} \cdots \alpha'_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} = \det A.$$

□

3.5. Funkcija $\det \colon A^t \mapsto \det A^t$ je n-linearna alternirajuća funkcija stupaca matrice A^t. Budući da su stupci matrice A^t reci u matrici A, teorem 3.4 daje

Teorem. *Funkcija* $\det \colon A \mapsto \det A$ *je n-linearna alternirajuća funkcija redaka matrice A.*

Zbog ovog teorema determinantu matrice možemo računati i elementarnim transformacijama na recima, ili čak kombinacijom elementarnih transformacija po stupcima i recima.

4. Laplaceov razvoj determinante

Ovdje zadržavamo oznake iz točke 3.9. Posebno, matrica A_{jk} dobivena je iz matrice A brisanjem j-tog stupca i k-tog retka.

4.1. Teorem. *Za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ za matricu A vrijedi Laplaceov razvoj determinante od A po j-tom stupcu:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \alpha_{kj} \det A_{jk}.$$

Za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ za matricu A vrijedi Laplaceov razvoj determinante od A po j-tom retku:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \alpha_{jk} \det A_{kj}.$$

DOKAZ.

$$\det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

$$= \det(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k \;, a_{j+1}, \dots, a_n) \tag{4.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \dots, a_n) \tag{4.2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j-1} \alpha_{kj} \det(e_k, a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j-1}(-1)^{k-1}\alpha_{kj} \det(a_1^{(k)}, \dots, a_{j-1}^{(k)}, a_{j+1}^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \qquad (4.4)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\alpha_{kj} \det A_{jk}.
\end{aligned}$$

U prvom smo koraku (4.1) stupac a_i zapisali u kanonskoj bazi, (4.2) vrijedi zbog multilinearnosti determinante, (4.3) vrijedi zbog alternirajućeg svojstva determinante. Da bismo vidjeli (4.4) računamo

$$\begin{aligned}
&\det(e_k, a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)\\
&= \det \begin{pmatrix}
0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{1n}\\
0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{2n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
1 & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \varnothing_{kj} & \dots & \alpha_{kn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{nn}
\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix}
1 & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{kn}\\
0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{1n}\\
0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{2n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
\varnothing_k & \varnothing_k & \varnothing_k & \dots & \varnothing_{kj} & \dots & \varnothing_k\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{nn}
\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{1n}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
\varnothing_k & \varnothing_k & \dots & \varnothing_{kj} & \dots & \varnothing_k\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \varnothing_j & \dots & \alpha_{nn}
\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{k-1} \det(a_1^{(k)}, \dots, a_{j-1}^{(k)}, a_{j+1}^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) = (-1)^{k-1} \det A_{jk}.
\end{aligned}$$

Prema teoremu 3.5 determinanta je alternirajuća funkcija redaka matrice, pa premještanjem k-tog retka na prvo mjesto dobivamo drugu jednakost. Treća jednakost slijedi iz početne definicije determinante.

Time je dokazan Laplaceov razvoj determinante po j-tom stupcu. Po teoremu 3.4 je $\det A = \det A^t$, pa Laplaceov razvoj $\det A$ po recima slijedi iz Laplaceovog razvoja $\det A^t$ po stupcima. $\square$

4.2. Primjedba. Primijetimo da matrica predznaka $(-1)^{k+j}$ počinje s $+$ na mjestu $k = j = 1$ i zatim "alternira". Na primjeru 4×4 matrice imamo

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

4.3. Primjer. Laplaceov razvoj determinante matrice tipa 3×3 po trećem stupcu je

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \gamma_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} - \gamma_2 \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} + \gamma_3 \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

a Laplaceov razvoj determinante po prvom retku je

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \det \begin{pmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} - \beta_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} + \gamma_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

4.4. Napomena. Ponekad pravilo o Laplaceovom razvoju koristimo za preglednije zapisivanje formula. Na primjer, ako su G_1, G_2 i G_3 vektori i $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, 3$, onda izraz

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)G_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)G_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)G_3$$

kraće zapisujemo kao

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & G_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & G_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & G_3 \end{pmatrix},$$

misleći pritom da treba primijeniti formulu (kao što je ona) za Laplaceov razvoj determinante po trećem stupcu.

5. Gramova determinanta

U ovom je paragrafu V realan ili kompleksan unitaran prostor sa skalarnim produltom $(\ |\ )$.

5.1. Gramova matrica i determinanta. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ vektori u V. Matricu

$$G(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} (a_1 \mid a_1) & (a_1 \mid a_2) & \ldots & (a_1 \mid a_n) \\ (a_2 \mid a_1) & (a_2 \mid a_2) & \ldots & (a_2 \mid a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n \mid a_1) & (a_n \mid a_2) & \ldots & (a_n \mid a_n) \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

zovemo *Gramovom matricom*, a determinantu Gramove matrice

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = \det G(a_1, \ldots, a_n) \tag{5.2}$$

zovemo *Gramovom determinantom.*

5.2. Teorem. *Vektori* $a_1, \ldots, a_n$ *su linearno nezavisni ako i samo ako je* $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

DOKAZ. Množimo li linearnu kombinaciju

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = 0 \tag{5.3}$$

s lijeva vektorima $a_1, \ldots, a_n$ dobivamo da je n-torka brojeva $(\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_n})$ rješenje sistema jednadžbi

$$\overline{\xi_1}(a_i \mid a_1) + \cdots + \overline{\xi_n}(a_i \mid a_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{5.4}$$

Prema Cramerovom pravilu $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ povlači da sistem (5.4) ima jedinstveno rješenje $\overline{\xi_1} = \cdots = \overline{\xi_n} = 0$. No to onda znači da je (5.3) trivijalna kombinacija i da su vektori $a_1, \ldots, a_n$ linearno nezavisni.

Obratno, pretpostavimo da su vektori $a_1, \ldots, a_n$ linearno nezavisni. Ako je $(\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_n})$ rješenje sistema jednadžbi (5.4), onda množenjem i-te jednadžbe s ξ_i i zbrajanjem po svim $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi_j}(a_i \mid a_j) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i \mid \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j)$$

i stroga pozitivnost skalarnog produkta povlači $\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i = 0$. Sada linearna nezavisnost vektora povlači $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$, što znači da homogeni sistem jednadžbi (5.4) ima jedinstveno rješenje i da su stupci Gramove matrice linearno nezavisni vektori u $\mathbb{C}^n$. Iz teorema 3.3.18 slijedi da su stupci Gramove matrice baza od $\mathbb{C}^n$, a teorem 9.4.16 povlači $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. $\square$

5.3. Gram-Scmidtov postupak ortogonalizacije. Neka su vektori $a_1, \ldots, a_n \in V$ linearno nezavisni. Tada definiramo niz vektora $y_1, \ldots, y_n$ formulom koju treba shvatiti kao Laplaceov razvoj determinante po k-tom stupcu

$$y_k = \det \begin{pmatrix} (a_1 \mid a_1) & (a_1 \mid a_2) & \ldots & (a_1 \mid a_{k-1}) & a_1 \\ (a_2 \mid a_1) & (a_2 \mid a_2) & \ldots & (a_2 \mid a_{k-1}) & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (a_{k-1} \mid a_1) & (a_{k-1} \mid a_2) & \ldots & (a_{k-1} \mid a_{k-1}) & a_{k-1} \\ (a_k \mid a_1) & (a_k \mid a_2) & \ldots & (a_{k-1} \mid a_{k-1}) & a_k \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

To znači da je

$$y_k = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_{k-1} a_{k-1} + \gamma_k a_k, \tag{5.6}$$

pri čemu je

$$\gamma_k = \Gamma(a_1, \ldots, a_{k-1}). \tag{5.7}$$

Iz teorema 5.2 slijedi $\gamma_k \neq 0$, pa indukcijom po k dokazujemo jednakost linearnih ljuski

$$\langle y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k \rangle = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, y_k \rangle = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \rangle.$$

Zbog jednakosti linearnih ljuski

$$\langle y_1, \dots, y_{k-1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$$

iz (5.6) slijedi

$$y_k = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_{k-1} y_{k-1} + \gamma_k a_k \tag{5.8}$$

za neke koeficijente $\beta_1, \dots \beta_{k-1}$. Pomnožimo li (5.5) (odnosno (5.6)) skalarno s desna sa a_j za $j = 1, \dots, k-1$ dobivamo

$$(y_k \mid a_j) = \det \begin{pmatrix} (a_1 \mid a_1) & (a_1 \mid a_2) & \dots & (a_1 \mid a_{k-1}) & (a_1 \mid a_j) \\ (a_2 \mid a_1) & (a_2 \mid a_2) & \dots & (a_2 \mid a_{k-1}) & (a_2 \mid a_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (a_{k-1} \mid a_1) & (a_{k-1} \mid a_2) & \dots & (a_{k-1} \mid a_{k-1}) & (a_{k-1} \mid a_j) \\ (a_k \mid a_1) & (a_k \mid a_2) & \dots & (a_{k-1} \mid a_{k-1}) & (a_k \mid a_j) \end{pmatrix} = 0$$

jer je u gornjoj matrici j-ti stupac jednak k-tom stupcu. Znači da je

$$y_k \perp \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle = \langle y_1, \dots, y_{k-1} \rangle,$$

pa množenjem (5.8) sa y_k dobivamo

$$(y_k \mid y_k) = (y_k \mid \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_{k-1} y_{k-1} + \gamma_k a_k) = \overline{\gamma_k} (y_k \mid a_k). \tag{5.9}$$

S druge strane, skalarnim množenjem (5.5) s desna s a_k dobivamo

$$(y_k \mid a_k) = \Gamma(a_1, \dots, a_k), \tag{5.10}$$

pa iz (5.9) i (5.7) slijedi

$$(y_k \mid y_k) = \overline{\Gamma(a_1, \dots, a_{k-1})}\, \Gamma(a_1, \dots, a_k). \tag{5.11}$$

5.4. Teorem. *Neka su $a_1, \dots, a_n$ linearno nezavisni vektori u realnom unitarnom prostoru V. Tada je $\Gamma(a_1, \dots, a_n) > 0$, a $\sqrt{\Gamma(a_1, \dots, a_n)}$ je volumen paralelotopa razapetog vektorima $a_1, \dots, a_n$.*

Dokaz. Iz teorema 5.2 i linearne nezavisnosti vektora $a_1, \dots, a_k$ slijedi $\Gamma(a_1, \dots, a_k) \neq 0$. Za $k = 1$ iz pozitivnosti skalarnog produkta slijedi $\Gamma(a_1) = (a_1 \mid a_1) > 0$. Općenito $\Gamma(a_1, \dots, a_k) > 0$ slijedi indukcijom koristeći (5.11) i $(y_k \mid y_k) > 0$.

Za $n = 1$ je "volumen" dužine koju "razapinje" vektor a_1 jednak duljini tog vektora

$$||a_1|| = \sqrt{(a_1 \mid a_1)} = \sqrt{\Gamma(a_1)}.$$

Općenito volumen paralelotopa razapetog vektorima $a_1, \dots, a_k$ u realnom unitarnom prostoru definiramo induktivno kao "površinu baze" razapete vektorima $a_1, \dots, a_{k-1}$, dakle

$$\sqrt{\Gamma(a_1, \dots, a_{k-1})},$$

pomnoženu "visinom" paralelotopa, a to je projekcija

$$(a_k \mid e_k)$$

vektora a_k na okomicu $e_k = y_k/||y_k||$ na bazu. Znači da je volumen paralelotopa razapetog vektorima $a_1, \ldots, a_{k-1}$ jednak

$$\begin{aligned}
&(a_k \mid e_k)\sqrt{\Gamma(a_1, \ldots, a_{k-1})} \\
&= \frac{(a_k \mid y_k)}{\sqrt{\Gamma(a_1, \ldots, a_{k-1})\Gamma(a_1, \ldots, a_k)}}\sqrt{\Gamma(a_1, \ldots, a_{k-1})} \\
&= \frac{\Gamma(a_1, \ldots, a_k)}{\sqrt{\Gamma(a_1, \ldots, a_k)}} \\
&= \sqrt{\Gamma(a_1, \ldots, a_k)},
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili (5.11) za normu od y_k i (5.10) za skalarni produkt $(a_k \mid y_k)$. □

5.5. Teorem. *Neka su $a_1, \ldots, a_n$ linearno nezavisni vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada je*

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = (\det(a_1, \ldots, a_n))^2 .$$

Dokaz. Element $(a_i \mid a_j)$ u Gramovoj matrici možemo shvatiti kao množenje i-tog retka matrice A^t i j-tog stupca matrice $A = (a_1, \ldots, a_n)$, pa je Gramova matrica produkt matrica

$$G = G(a_1, \ldots, a_n) = A^t A.$$

Prema teoremu 3.4 je $\det A^t = \det A$, pa Binet-Cauchyjev teorem daje

$$\det G = \det A^t A = \det A^t \det A = (\det A)^2.$$

□

POGLAVLJE 10

Algebra operatora na $\mathbb{R}^n$

U ovom poglavlju na skupu $n \times n$ matrica uvodimo operacije zbrajanja i množenja skalarom. S obzirom na dobivenu strukturu vektorskog prostora množenje $n \times n$ matrica je bilinearna binarna operacija i dobivenu algebarsku strukturu zovemo asocijativnom algebrom s jedinicom. Kao važne primjere takve strukture pročavamo kompleksne brojeve kao realne 2×2 matrice i kvaternione kao kompleksne 2×2 matrice.

1. Vektorski prostor linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$

1.1. Zbrajanje preslikavanja i množenje skalarom. Neka su

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dva linearna preslikavanja. Budući da na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m$ imamo operacije zbrajanja i množenja skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$, možemo definirati nova preslikavanja

$$A + B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad \lambda A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tako da za svaku točku x iz $\mathbb{R}^n$ stavimo

$$(A + B)(x) = Ax + Bx, \qquad (\lambda A)(x) = \lambda Ax.$$

Ponekad kažemo da smo te operacije *definirali po točkama.*

To su linearna preslikavanja. Naime, koristeći definiciju zbrajanja, svojstvo linearnosti od A i B i opet definiciju zbrajanja, dobivamo

$$\begin{aligned}(A + B)(x + y) &= A(x + y) + B(x + y) = Ax + Ay + Bx + By\\ &= (A + B)(x) + (A + B)(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A + B)(\mu x) &= A(\mu x) + B(\mu x) = \mu Ax + \mu Bx = \mu(Ax + Bx)\\ &= \mu(A + B)(x).\end{aligned}$$

Slično dokazujemo i linearnost preslikavanja λA.

1.2. Matrica sume linearnih preslikavanja. Matrica linearnog preslikavanja $(A + B)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je

$$((A + B)e_1, \dots, (A + B)e_n) = (Ae_1 + Be_1, \dots, Ae_n + Be_n). \tag{1.1}$$

Znači da je svaki stupac matrice preslikavanja $A + B$ suma odgovarajućih stupaca matrice preslikavanja A i matrice preslikavanja B. Budući da ne želimo praviti razliku između preslikavanja i njihovih matrica, formulom

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \tag{1.2}$$

definiramo zbrajanja matrica tipa $m \times n$, tako da (1.1) glasi

$$((A+B)e_1, \dots, (A+B)e_n) = (Ae_1, \dots, Ae_n) + (Be_1, \dots, Be_n).$$

Očito je matrica linearnog preslikavanja λA dobivena množenjem s λ svakog stupca matrice preslikavanja A

$$((\lambda A)e_1, \dots, (\lambda A)e_n) = (\lambda Ae_1, \dots, \lambda Ae_n). \tag{1.3}$$

Budući da ne želimo praviti razliku između preslikavanja i njihovih matrica, formulom

$$\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \tag{1.4}$$

definiramo množenje skalarom matrica tipa $m \times n$, tako da (1.3) glasi

$$((\lambda A)e_1, \dots, (\lambda A)e_n) = \lambda(Ae_1, \dots, Ae_n).$$

1.3. Primjeri zbrajanja matrica i množenja matrice skalarom.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.4. Zadatak. Izračunajte

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.5. Nul-preslikavanje i nul-matrica. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definirano s $Ax = 0$ za svako x iz $\mathbb{R}^n$ zovemo *nul-preslikavanjem* i označavamo ga s 0. Pripadna matrice tipa $m \times n$ je *nul-matrica* i označavamo je s 0. Na primjer,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

gdje je prva nula matrica tipa 2×2, a druga nula je matrica tipa 2×4. Nul-preslikavanje i nul-matrica su neutralni elementi za odgovarajuće operacije zbrajanja.

1.6. Svojstva operacija zbrajanja matrica i množenja skalarom. Ako su (α_{ij}) i (β_{ij}) matrice tipa $m \times n$, onda definicije zbrajanja matrica (1.2) i množenja matrica skalarom (1.4) možemo zapisati kao

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}), \quad \lambda(\alpha_{ij}) = (\lambda\alpha_{ij}).$$

Shvatimo li matrične elemente α_{ij} kao koordinate vektora u $\mathbb{R}^{m \cdot n}$, onda je gornja formula upravo definicija zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, pa za te operacije vrijede sva svojstva popisana u točki 2.2.3. Posebno, imamo nul-matricu 0, neutralni element za zbrajanje, te za svaku matricu (α_{ij}) njoj suprotnu

$$-(\alpha_{ij}) = (-\alpha_{ij}).$$

Znači da je skup svih matrice tipa $m \times n$ *s operacijama zbrajanja i množenja skalarom* **u stvari** *vektorski prostor* $\mathbb{R}^{m \cdot n}$*, samo što koordinate zovemo matričnim koeficijentima i općenito ih zapisujemo u kvadaratnu shemu, a ne u samo jedan redak ili samo jedan stupac.* Budući da na matricama imamo osim zbrajanja i množenja skalarom i druge operacije, običaj je vektorski prostor $(\mathbb{R}^m)^n$ svih $m \times n$ matrica označavati drugačije – mi ćemo koristiti oznaku

$$\mathcal{M}_{m\times n} \quad \text{ili} \quad \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

ako želimo naglasiti da govorimo o realnim $m \times n$ matricama. Naglasimo da je dimenzija tog vektorskog prostora

$$\dim \mathcal{M}_{m\times n} = m \cdot n.$$

1.7. Linearne kombinacije matrica. Kao i inače za vektorske prostore, *linearnom kombinacijom matrica* zovemo matricu ili izraz

$$\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_s A_s$$

u kojem su λ_i brojevi (skalari), a A_i matrice istoga tipa. Na primjer, matricu rotacije možemo napisati kao linearnu kombinaciju

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.8. Kanonska baza vektorskog prostora matrica tipa $m \times n$. Svaku matricu $A = (\alpha_{ij})$ tipa $m \times n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij},$$

gdje je E_{ij} matrica koja ima matrični element 1 u i-toj koordinati j-tog stupca, a sve ostale elemente 0. Ili, drugim riječima,

$$E_{ij} = (0, \ldots, 0, e_i, 0, \ldots, 0),$$

pri čemu se element e_i kanonske baze prostora $\mathbb{R}^m$ nalazi na j-tom mjestu. Te matrice zovemo *kanonskom bazom vektorskog prostora matrica tipa* $m\times n$. Tako, na primjer, za 2×2 matrice imamo kanonsku bazu

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

u kojoj možemo na jedinstveni način prikazati svaku 2×2 matricu

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.9. Zadatak. Pokažite da za 2×2 matrice imamo i bazu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.10. Vektorski prostor linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. Operacije zbrajanja $A+B$ preslikavanja i množenja λA preslikavanja skalarom definirane su po točkama i nasljeđuju dobra svojstva zbrajanja i množenja skalarom u $\mathbb{R}^m$. Tako, na primjer, za svako $x \in \mathbb{R}^n$ i tri preslikavanja A, B i C imamo

$$(Ax+Bx)+Cx = Ax+(Bx+Cx)$$

zbog asocijativnosti zbrajanja u $\mathbb{R}^m$. No to znači da imamo jednakost preslikavanja

$$(A+B)+C = A+(B+C),$$

odnosno asocijativnost operacije zbrajanja preslikavanja. Na sličan način vidimo da operacije zbrajanja preslikavanja i množenja preslikavanja skalarom imaju sva svojstva iz definicije vektorskog prostora. Mi ćemo vektorski prostor linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ označavati s

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

1.11. Izomorfizam vektorskih prostora linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ i $m\times n$ matrica. Ne samo da je pridruživanje matrice linearnom preslikavanju bijekcija koja nam je dozvolila poistovjećivanje linearnog preslikavanja i matrice

$$A \longleftrightarrow (Ae_1, \dots, Ae_n),$$

nego su i operacije zbrajanja matrica i množenja matrice skalarom definirane u skladu s tom identifikacijom

$$A+B \longleftrightarrow (Ae_1, \dots, Ae_n)+(Be_1, \dots, Be_n), \qquad \lambda A \longleftrightarrow \lambda(Ae_1, \dots, Ae_n).$$

Znači da imamo izomorfizam vektorskog prostora linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ i vektorskog prostora matrica tipa $m \times n$

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Odavle posebno slijedi

$$\dim L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = n \cdot m.$$

1.12. Izomorfizam vektorskih prostora linearnih operatora i matrica. Neka su V i W dva vektorska prostora nad istim poljem K. Skup[1]

$$L(V, W)$$

svih linearnih operatora $A\colon V \to W$ je vektorski prostor s operacijama zbrajanja i množenja skalarom $\lambda \in K$ definiranim po točkama:

$$(A+B)(x) = Ax+Bx, \qquad (\lambda A)(x) = \lambda Ax$$

[1]Linearno preslikavanje zovemo i *homomorfizmom vektorskih prostora*, od grčke riječi homomorfan=sličnog oblika, a skup linearnih operatora $L(V, W)$ često označavamo i kao $\mathrm{Hom}\,(V, W)$.

za svaki $x \in V$. Na isti način kao prije vidimo da su $A + B$ i λA linearni operatori, te da je $L(V, W)$ s tim operacijama vektorski prostor. Kao i obično, nul-operator označavamo s 0,

$$0 \colon V \to W, \quad 0 \colon x \mapsto 0 \quad \text{za svaki } x \in V.$$

Ako su V i W konačno dimenzionalni vektorski prostori s uređenim bazama E i F, onda linearne operatore možemo identificirati s njihovim matricama u tom paru baza

$$A \longleftrightarrow A_{FE}.$$

Budući da su koordinatizacije $v \mapsto v_E$ i $w \mapsto w_F$ linearna preslikavanja, to je i bijekcija $A \mapsto A_{FE}$ linearno preslikavanje. Znači da su vektorski prostora operatora i matrica izomorfni, tj.

$$L(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

za $n = \dim V$ i $m = \dim W$. Odavle slijedi

$$\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W. \tag{1.5}$$

1.13. Zadatak. Dokažite da je $A \mapsto A_{FE}$ linearno preslikavanje.

1.14. Zadatak. Izračunajte dimenziju vektorskog prostora

$$L(L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}))\,?$$

2. Algebra $n \times n$ matrica

2.1. Distributivnost množenja matrica prema zbrajanju. Množenje matrica definirano je samo uz uvjet da su određenog tipa, općenito smo to zapisali "formulom"

$$(k \times m) \cdot (m \times n) = (k \times n).$$

Znači da imamo preslikavanje

$$\mathcal{M}_{k \times m} \times \mathcal{M}_{m \times n} \to \mathcal{M}_{k \times n}, \quad (A, B) \mapsto AB$$

koje matrici A tipa $k \times m$ i matrici B tipa $m \times n$ pridruži njihov produkt AB — matricu tipa $k \times n$. Za množenje matrica vrijede dva svojstva distributivnosti prema zbrajanju matrica — u vektorskim prostorima $\mathcal{M}_{m \times n}$ i $\mathcal{M}_{k \times n}$, te $\mathcal{M}_{k \times m}$ i $\mathcal{M}_{k \times n}$:

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + D)B = AB + DB.$$

Naime, neka je $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ i $C = (\gamma_{ij})$. Koristeći formulu za matrični element na mjestu ij matrice $A(B + C)$ dobivamo

$$\sum_{r=1}^{m} \alpha_{ir}(\beta_{rj} + \gamma_{rj}) = \sum_{r=1}^{m} (\alpha_{ir}\beta_{rj} + \alpha_{ir}\gamma_{rj}) = \sum_{r=1}^{m} \alpha_{ir}\beta_{rj} + \sum_{r=1}^{m} \alpha_{ir}\gamma_{rj},$$

a to je matrični element na mjestu ij matrice $AB + AC$. Na sličan način dokazujemo i drugu formulu, kao i homogenost množenja matricom u odnosu na množenje skalarom u vektorskim prostorima $\mathcal{M}_{k\times m}$, $\mathcal{M}_{m\times n}$ i $\mathcal{M}_{k\times n}$:

$$(\lambda A)B = \lambda(AB), \qquad A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Vrlo često ova svojstva množenja matrica zovemo svojstvom bilinearnosti množenja i zapisujemo kratko kao

$$A\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i B_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i AB_i\,, \qquad \left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j A_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j A_j B\,,$$

ili još općenitije kao "množenje svaki sa svakim"

$$\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j A_j\right)\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i B_i\right) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} \mu_j \lambda_i A_j B_i\,.$$

2.2. Bilinearnost množenja linearnih operatora. Ako su V, W i U tri vektorska prostora nad istim poljem K i

$$B\colon V \to W \quad \text{i} \quad A\colon W \to U$$

linearni operatori, onda je produkt AB definiran kao kompozicija

$$AB\colon V \to U, \quad (AB)(v) = A(B(v)).$$

Općenito imamo preslikavanje

$$L(V,W) \times L(W,U) \to L(V,U), \quad (B,A) \mapsto AB$$

koje paru linearnih operatora B i A pridruži njihov produkt AB. Kao i u slučaju množenja matrica imamo svojstvo bilinearnosti

$$A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 AB_1 + \lambda_2 AB_2\,, \quad (\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2)B = \mu_1 A_1 B + \mu_2 A_2 B\,,$$

Naime, za prvu tvrdnju računamo

$$\begin{aligned}(A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2))(v) &= A((\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)(v))\\ &= A(\lambda_1 B_1(v) + \lambda_2 B_2(v))\\ &= \lambda_1 A(B_1(v)) + \lambda_2 A(B_2(v))\\ &= \lambda_1 (AB_1)(v) + \lambda_2 (AB_2)(v)\\ &= (\lambda_1 AB_1 + \lambda_2 AB_2)(v),\end{aligned}$$

pri čemu prva jednakost vrijedi zbog definicije kompozicije, druga zbog definicije operatora $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, treća zbog linearnosti operatora A, četvrta zbog definicije kompozicije i peta zbog definicije linearne kombinacije operatora AB_1 i AB_2. Kad je $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $U = \mathbb{R}^k$ i

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} \mathbb{R}^k,$$

onda imamo malo drugačiji dokaz distributivnosti množenja matrica.

2.3. Pojam algebre. Neka je $\mathcal{A}$ vektorski prostor. Kažemo da je $\mathcal{A}$ *algebra* ako je dano množenje

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad (A, B) \mapsto A \cdot B$$

koje je *bilinearno*, tj. za sve vektore $A, B, C \in \mathcal{A}$ i skalare λ, μ vrijedi

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B) \cdot C &= \lambda(A \cdot C) + \mu(B \cdot C), \\ C \cdot (\lambda A + \mu B) &= \lambda(C \cdot A) + \mu(C \cdot B). \end{aligned}$$

U algebri vrlo često ne pišemo znak za množenje elemenata i umjesto $A \cdot B$ pišemo samo AB. Ako je množenje asocijativno, tj. za sve $A, B, C \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$(AB)C = A(BC),$$

onda kažemo da je $\mathcal{A}$ *asocijativna algebra.* Ako postoji jedinica I za množenje, tj. za sve $A \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$IA = AI = A,$$

onda kažemo da je $\mathcal{A}$ *asocijativna algebra s jedinicom.* Algebre koje ćemo mi razmatrati bit će isključivo asocijativne algebre s jedinicom, pa ćemo govoriti samo algebra. Ako je množenje u $\mathcal{A}$ komutativno, tj. za sve $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$AB = BA,$$

onda kažemo da je $\mathcal{A}$ *komutativna algebra*[2].

2.4. Strukturne konstante algebre. Neka je $\mathcal{A}$ algebra i $e_1, \dots, e_m$ baza vektorskog prostora $\mathcal{A}$. za svaki par indeksa $i, j \in \{1, \dots, m\}$ produkt vektora $e_i e_j$ možemo zapisati u bazi

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{m} N_{ijk} e_k,$$

a koeficijente

$$N_{ijk}, \quad i, j, k \in \{1, \dots, m\}$$

zovemo *strukturnim konstantama algebre* $\mathcal{A}$. Zbog bilinearnosti množenja u algebri produkt proizvoljna dva elementa možemo izraziti pomoću njihovih koordinata i strukturnih konstanti:

$$xy = \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \eta_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i \eta_j e_i e_j = \sum_{i,j,k=1}^{m} \xi_i \eta_j N_{ijk} e_k.$$

Štoviše, za danu bazu $e_1, \dots, e_m$ vektorskog prostora $\mathcal{A}$ i proizvoljni izbor strukturnih konstanti N_{ijk} gornjom je formulom definirano bilinearno množenje na $\mathcal{A}$, kažemo da smo *množenje zadali na bazi.*

[2] a mislimo: *komutativna asocijativna algebra s jedinicom*

2.5. Zadatak. Na $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ s kanonskom bazom e_1, e_2 definirano je bilinearno množenje na bazi tablicom množenja

$$\begin{aligned} e_1e_1 &= e_1\,, \\ e_1e_2 &= e_2\,, \\ e_2e_1 &= e_2\,, \\ e_2e_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dokažite da je s tim množenjem $\mathcal{A}$ asocijativna komutativna algebra s jedinicom.

2.6. Zadatak. Na $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ zadajte bilinearno množenje na kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3 tako da $\mathcal{A}$ bude asocijativna komutativna algebra s jedinicom.

2.7. Pitanje. Na $\mathbb{R}^3$ imamo bilinearno vektorsko množenje $a \times b$. Da li je to množenje asocijativno?

2.8. Algebra $n \times n$ matrica. Skup $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ svih $n \times n$ realnih matrica, često pišemo $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ili $\mathcal{M}_n$, je vektorski prostor na kojem imamo operaciju množenja matrica. Pogledamo li svojstva operacija zbrajanja matrica, množenja matrice skalarom i množenja matrica, onda vidimo da je $\mathcal{M}_n$ asocijativna algebra s jedinicom. Podsjetimo se da je

$$\dim \mathcal{M}_n = n^2.$$

2.9. Zadatak. Neka je V vektorski prostor, ne nužno konačno dimenzionalni. Provjerite da je vektorski prostor $L(V)$ linearnih operatora na V asocijativna algebra s jedinicom s obzirom na kompoziciju kao operaciju množenja.

2.10. Izomorfizam algebri. Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dvije algebre, onda izomorfizam $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ vektorskih prostora zovemo *izomorfizmom algebri* ako za sve elemente $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B).$$

Drugim riječima, izomorfizam algebri je bijekcija pomoću koje možemo identificirati ne samo elemente skupova, nego i operacije zbrajanja, množenja skalarom i množenja na tim skupovima jer vrijedi

$$\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B), \quad \Phi(\lambda A) = \lambda\Phi(A), \quad \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B).$$

Kažemo da je Φ *izomorfizam algebri s jedinicom* ako je

$$\Phi(1) = 1.$$

Kao i obično, ako postoji izomorfizam algebri $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, onda kažemo da su algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ izomorfne i pišemo

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Ako su $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $\Psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ izomorfizami algebri, onda je i kompozicija $\Psi \circ \Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ izomorfizam algebri jer je to opet linearna bijekcija i vrijedi

$$\Psi(\Phi(AB)) = \Psi(\Phi(A)\Phi(B)) = \Psi(\Phi(A))\Psi(\Phi(B)).$$

Izomorfizam algebre $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ obično zovemo *automorfizmom od* $\mathcal{A}$.

2.11. Izomorfizam algebri linearnih operatora i matrica. Ako je V konačno dimenzionalni vektorski prostor s uređenom bazom E, onda linearne operatore A možemo identificirati s njihovim matricama $A_E = A_{EE}$ u toj bazi,

$$A \longleftrightarrow A_E.$$

Ta je bijekcija izomorfizam vektorskih prostora, tj.

$$A + B \longleftrightarrow A_E + B_E, \quad \lambda A \longleftrightarrow \lambda A_E.$$

Budući da je matrica produkta operatora produkt pripadnih matrica, tj. $(AB)_E = A_E B_E$, to imamo

$$AB \longleftrightarrow A_E B_E.$$

To znači da su algebra operatora $L(V)$ i algebra matrica $\mathcal{M}_n$ izomorfne,

$$L(V) \cong \mathcal{M}_n.$$

2.12. Unutarnji automorfizmi algebre. Ako je V konačno dimenzionalni vektorski prostor s uređenim bazama E i F, onda imamo dva izomorfizma

$$A_E \longleftrightarrow A \longleftrightarrow A_F.$$

No tada je njihova kompozicija

$$A_E \mapsto A_F$$

automorfizam algebre $n \times n$ matrica. Ako je T matrica prijelaza iz baze E u bazu F, onda za matrice operatora $A \in L(V)$ imamo $A_F = T^{-1}A_E T$, pa gornji automorfizam algebre $n \times n$ matrica možemo zapisati formulom

$$B \mapsto T^{-1}BT.$$

Općenito, ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra s jedinicom i $T \in \mathcal{A}$ regularni element[3], onda je preslikavanje

$$B \mapsto T^{-1}BT$$

automorfizam (dokažite!) kojeg zovemo *unutarnjim automorfizmom algebre* $\mathcal{A}$ ili *konjugacijom regularnim elementom* T *u algebri* $\mathcal{A}$.

2.13. Podalgebra. Ako je $\mathcal{A}$ algebra, onda kažemo da je potprostor $\mathcal{B}$ podalgebra ako je zatvoren i za operaciju množenja, tj. ako je $AB \in \mathcal{B}$ kad su oba elementa A i B u $\mathcal{B}$. Nas će najviše zanimati podalgebre s jedinicom, tj. podalgebre koje sadrže jedinicu I algebre $\mathcal{A}$.

[3]Kao u slučaju linearnih operatora, *regularan element* asocijativne algebre s jedinicom znači *invertibilan element* te algebre, tj. element koji ima inverz.

2.14. Komutativna podalgebra dijagonalnih matrica. Za matricu $A = (\alpha_{ij})$ kažemo da je *dijagonalna* ako je $\alpha_{ij} = 0$ za $i \neq j$, odnosno

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je matrica A dijagonalna ako i samo ako za kanonsku bazu $e_1, \dots, e_n$ preslikavanje A čuva 1-dimenzionalne potprostore

$$\langle e_1 \rangle, \quad \dots, \quad \langle e_n \rangle,$$

tj. ako za kanonsku bazu i neke skalare $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}$ vrijedi

$$Ae_1 = \alpha_{11} e_1, \quad Ae_2 = \alpha_{22} e_2, \quad \dots, \quad Ae_n = \alpha_{nn} e_n. \tag{2.1}$$

Za skalar λ i dijagonalnu matricu $B = (\beta_{ij})$ iz relacije (2.1) slijedi da je za sve $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} (\lambda A) e_j &= (\lambda \alpha_{jj}) e_j, \\ (A + B) e_j &= (\alpha_{jj} + \beta_{jj}) e_j, \\ (AB) e_j &= (\alpha_{jj} \beta_{jj}) e_j, \end{aligned} \tag{2.2}$$

a to znači i da su matrice λA, $A + B$ i AB dijagonalne. Naravno, formulu za množenje dijagonalnih matrica AB možemo zapisati i kao

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{nn}\beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Očito za sve dijagonalne matrice A i B vrijedi

$$AB = BA.$$

Znači da je skup svih dijagonalnih $n \times n$ matrica komutativna podalgebra algebre matrica $\mathcal{M}_n$.

2.15. Pitanje. Ako su A i B dijagonalne $n \times n$ matrice, da li je onda $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$? DA NE

2.16. Zadatak. Pokažite da je algebra dijagonalnih $n \times n$ matrica izomorfna algebri funkcija sa skupa $\{1, \dots, n\}$ u polje $\mathbb{R}$ s operacijama definiranim po točkama

$$\begin{aligned} (\lambda A)(j) &= \lambda A(j), \\ (A + B)(j) &= A(j) + B(j), \\ (AB)(j) &= A(j) B(j) \end{aligned}$$

za sve $j = 1, \dots, n$.

2.17. Zadatak. Pokažite da je $n \times n$ matrica A gornja trokutasta ako i samo ako za kanonsku bazu $e_1, \dots, e_n$ preslikavanje A čuva potprostore

$$\langle e_1 \rangle, \quad \langle e_1, e_2 \rangle, \quad \dots, \quad \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle,$$

tj. ako za $k = 1, 2, \dots, n-1$ vrijedi $A\langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \subset \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$.

2.18. Zadatak. Pokažite da su gornje trokutaste matrice podalgebra algebre kvadratnih $n \times n$ matrica. Pokažite da algebra gornjih trokutastih matrica nije komutativna za $n \geq 2$.

2.19. Zadatak. Nađite gornje trokutaste 2×2 matrice A i B takve da je $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$.

2.20. Algebra $n \times n$ matrica s koeficijentima u algebri. Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra s jedinicom nad poljem K, ne nužno komutativna. Skup $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ svih $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$ s koeficijentima u $\mathcal{A}$, tj.

$$\mathcal{M}_n(\mathcal{A}) = \{A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mid \alpha_{ij} \in \mathcal{A} \text{ za sve } i, j = 1, \dots, n\},$$

je asocijativna algebra nad poljem K s jedinicom za operacije zbrajanja, množenja skalarom $\lambda \in K$ i množenja $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ i $B = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ zadanih formulama

$$\begin{aligned} A + B &= (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}\,, \\ \lambda A &= (\lambda \alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}\,, \\ AB &= (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj})_{i,j=1,\dots,n}\,. \end{aligned}$$

Ako je $\mathcal{A}$ konačno dimenzionalna, onda je

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathcal{A}) = n^2 \dim \mathcal{A}.$$

2.21. Zadatak. Dokažite sve iskazane tvrdnje u prethodnoj točki.

2.22. Zadatak. Dokažite da je $\mathcal{M}_2(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \cong \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2.23. Zadatak. Na vektorskom prostoru kvadratnih $n \times n$ matrica definiramo *komutator matrica A i B* kao

$$[A, B] = AB - BA.$$

Pokažite da je komutator bilinearna operacija, tj

$$\begin{aligned} [A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2] &= \lambda_1 [A, B_1] + \lambda_2 [A, B_2]\,, \\ [\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2, B] &= \mu_1 [A_1, B] + \mu_2 [A_2, B]\,. \end{aligned}$$

2.24. Zadatak. Za kvadratnu $n \times n$ matricu $A = (\alpha_{ij})$ definiramo *trag matrice*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}.$$

Očito je $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linearna funkcija. Iz formule za množenje matrica $A = (\alpha_{ij})$ i $B = (\beta_{ij})$ slijedi

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ji} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji}\alpha_{ij} \right) = \operatorname{tr}(BA).$$

Odavle slijedi da za komutator matrica vrijedi

$$\operatorname{tr}[A, B] = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} BA = 0.$$

2.25. Zadatak. Na vektorskom prostoru kvadratnih $n \times n$ matrica definiramo *antikomutator matrica A i B* kao

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

Pokažite da je antikomutator bilinearna operacija.

3. Hermitski adjungirana matrica

U ovom paragrafu pretpostavljamo da je V konačno dimenzionalni unitarni prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva.

3.1. Matrica operatora u ortonormiranoj bazi. Neka je $E = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza od V. Tada su koordinate ξ_i vektora

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

dane formulom

$$\xi_i = (x \mid e_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Ako je $A \colon V \to V$ linearni operator, onda je matrica $A_E = (\alpha_{ij})$ operatora A u bazi E određena formulom

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Budući da koordinate α_{ij} vektora Ae_j u ortonormiranoj bazi E možemo računati pomoću formule (1.1), to je matrica operatora u ortonormiranoj bazi dana formulom

$$\alpha_{ij} = (Ae_j \mid e_i), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

3.2. Lema. *Neka su A i B linearni operatori na V. Tada je $A = B$ ako i samo ako je*

$$(Ax \mid y) = (Bx \mid y) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

DOKAZ. Neka je $E = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormirana baza od V. Tada je

$$(Ae_j \mid e_i) = (Be_j \mid e_i), \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Znači da su matrice A_E i B_E operatora jednake, pa slijedi i jednakost operatora $A = B$. Obrat je očigledan. □

3.3. Hermitski adjungirana matrica. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ matrica. Tada matricu

$$A^* = (\beta_{ij}), \quad \beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

zovemo *hermitski adjungiranom matricom matrici A*. Znači da je A^* dobivena iz A transponiranjem i, ako se radi o kompleksnoj matrici, kompleksnim konjugiranjem svakog matričnog elementa.

3.4. Primjer.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 1 & -1 \\ 2-2i & 3 & -2 \\ 3+i & 4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i & 2+2i & 3-i \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.5. Hermitski adjungirani operator. *Neka je $A\colon V \to V$ linearni operator. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A^*\colon V \to V$ takav da je*

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^* y) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

Operator A^* zovemo hermitski adjungiranim operatorom operatoru A.

DOKAZ. Dokažimo prvo jedinstvenost. Pretpostavimo da su B i C operatori na V takvi da je

$$(Ax \mid y) = (x \mid By) \quad \text{i} \quad (Ax \mid y) = (x \mid Cy) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

Tada je zbog hermitske simetrije skalarnog produkta

$$(By \mid x) = \overline{(Ax \mid y)} = (Cy \mid x) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V,$$

pa iz leme 1.2 slijedi $B = C$.

Dokažimo sada da operator A^* postoji. Odaberimo neku ortonormiranu bazu $E = (e_1, \dots, e_n)$ od V. Ako operator A^* postoji, onda mora biti

$$(Ae_i \mid e_j) = (e_i \mid A^* e_j) \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

Zbog hermitske simetrije skalarnog produkta to je ekvivalentno

$$(A^* e_j \mid e_i) = \overline{(Ae_i \mid e_j)} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Zato definiramo linearan operator A^* tako da mu je u bazi E matrica $(A^*)_E = (\beta_{ij})$ jednaka

$$(A^*)_E = (A_E)^*, \qquad \beta_{ij} = (A^* e_j \mid e_i) = \overline{(Ae_i \mid e_j)} = \overline{\alpha_{ji}}, \tag{3.3}$$

tj. jednaka adjungiranoj matrici matrice $A_E = (\alpha_{ij})$ operatora A. Sada zbog (1.2) za proizvoljne

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \qquad \text{i} \qquad y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$$

imamo

$$\begin{aligned}(Ax \mid y) &= (A\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} (Ae_i \mid e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} (e_i \mid A^* e_j) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \mid A^* \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j) = (x \mid A^* y).\end{aligned}$$

□

3.6. Napomena. Zbog hermitske simetrije skalarnog produkta je

$$(A^* y \mid x) = (y \mid Ax) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

3.7. Svojstva hermitskog adjungiranja.

(1) $(A^*)^* = A$, obično pišemo $A^{**} = A$ i kažemo da je * *involucija.*
(2) $I^* = I$.
(3) $(AB)^* = B^* A^*$, obično kažemo da je * *antiautomorfizam množenja.*
(4) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$, u kompleksnom slučaju kažemo da je * *antilinearno.*

Dokaz. Sve tvrdnje slijede iz relacija

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^* y) \quad \text{i} \quad (A^* x \mid y) = (x \mid Ay)$$

primjenom leme 1.2:

$$\begin{aligned}((A^*)^* x \mid y) &= (x \mid A^* y) = (Ax \mid y). \\ (I^* x \mid y) &= (x \mid Iy) = (x \mid y) = (Ix \mid y). \\ ((AB)^* x \mid y) &= (x \mid ABy) = (A^* x \mid By) = (B^* A^* x \mid y). \\ ((\lambda A + \mu B)^* x \mid y) &= (x \mid (\lambda A + \mu B) y) = \bar{\lambda}(x \mid Ay) + \bar{\mu}(x \mid By) \\ &= \bar{\lambda}(A^* x \mid y) + \bar{\mu}(B^* x \mid y) = ((\bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*) x \mid y).\end{aligned}$$

□

3.8. Hermitske matrice. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ matrica. Kažemo da je A *hermitska matrica* ako je

$$A^* = A,$$

odnosno

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Primijetimo da su zbog $\alpha_{ii} = \overline{\alpha_{ii}}$ svi dijagonalni elementi hermitske matrice realni brojevi. Realne hermitske matrice zovemo i *simetričnim matricama.*

3.9. Paulijeve matrice su hermitske. Paulijeve matrice su matrice

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Očito su σ_x, σ_y i σ_z hermitske matrice.

3.10. Zadatak. Provjerite da su matrice A i B hermitske,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2+2i & 1 \\ 2-2i & 3 & -3i \\ 1 & 3i & 5 \end{pmatrix}.$$

3.11. Antihermitske matrice. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ matrica. Kažemo da je A *antihermitska matrica* ako je

$$A^* = -A,$$

odnosno

$$\alpha_{ij} = -\overline{\alpha_{ji}} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Primijetimo da su zbog $\alpha_{ii} = -\overline{\alpha_{ii}}$ svi dijagonalni elementi antihermitske matrice čisto imaginarni brojevi. Realne antihermitske matrice zovemo i *antisimetričnim matricama.*

3.12. Primjeri antihermitskih matrica.

$$J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

3.13. Zadatak. Općenito produkt hermitskih matrica nije hermitska matrica i produkt antihermitskih matrica nije antihermitska matrica, na primjer

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Dokažite da je antikomutator hermitskih matrica hermitska matrica, te da je komutator antihermitskih matrica antihermitska matrica. Izračunajte sve antikomutatore Paulijevih matrica i sve komutatore matrica J_1, J_2 i J_3 iz prethodnog primjera.

3.14. Unitarne matrice. Za kompleksnu $n\times n$ matricu $A = (a_1, \dots, a_n)$ kažemo da je unitarna ako su vektori $a_1, \dots, a_n$ ortonormirana baza u $\mathbb{C}^n$. Budući da je kanonski skalarni produkt u $\mathbb{C}^n$ dan formulom

$$(a \mid b) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \dots + \alpha_n\overline{\beta_n}\,,$$

to uvjet $(a_i \mid a_j) = \delta_{ij}$ ortonormiranosti vektora možemo zapisati kao množenje matrica

$$A^*A = I \quad \text{ili ekvivalentno} \quad AA^* = I.$$

Realne unitarne matrice zovemo i *ortogonalnim matricama.*

3.15. Primjeri unitarnih matrica.

$$J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

3.16. Zadatak. Dokažite da su sve ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$ oblika

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta}\zeta \\ \beta & \bar{\alpha}\zeta \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,\ |\zeta| = 1,\ \alpha, \beta, \zeta \in \mathbb{C}.$$

3.17. Grupa unitarnih matrica. Valja primijetiti da je (i) produkt unitarnih matrica opet unitarna matrica jer

$$(U_1U_2)^*(U_1U_2) = U_2^*U_1^*U_1U_2 = U_2^*IU_2 = U_2^*U_2 = I,$$

da je (ii) jedinična matrica I unitarna i da je (iii) inverz unitarne matrice $U^{-1} = U^*$ unitarna matrica jer

$$(U^{-1})^*U^{-1} = (U^*)^*U^* = UU^* = I.$$

Drugim riječima, skup $U(n)$ svih unitarnih $n \times n$ matrica je grupa.

3.18. Zadatak. Dokažite da je skup $SU(n)$ svih unitarnih $n \times n$ matrica determinante 1 također grupa.

4. Kompleksni brojevi kao 2×2 realne matrice

4.1. Kompleksni brojevi. Kompleksni brojevi su uređeni parovi (α, β) realnih brojeva koje zapisujemo kao

$$z = \alpha + i\beta.$$

Operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva definirane su formulama

$$(\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta') = (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta'),$$
$$(\alpha + i\beta) \cdot (\alpha' + i\beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \beta\alpha').$$

Skup svih kompleksnih brojeva s tako definiranim operacijama zbrajanja i množenja označavamo sa $\mathbb{C}$.

4.2. Skup $\mathbb{C}$ kao $\mathbb{R}^2$. Kompleksne brojeve $x = \xi_1 + i\xi_2$ možemo zapisati kao vektor-stupce

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

u $\mathbb{R}^2$. Tada je zbrajanje kompleksnih brojeva $x' + x''$ zbrajanje vektora u $\mathbb{R}^2$, a množenjem kompleksnog broja $x = \xi_1 + i\xi_2$ realnim brojem $\lambda = \lambda + i0$ dobivamo

$$\lambda x = (\lambda + i0)(\xi_1 + i\xi_2) = (\lambda\xi_1 - 0\xi_2) + i(\lambda\xi_2 + 0\xi_1),$$

što zapisujemo kao

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Znači da je skup $\mathbb{C}$ vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ s operacijama zbrajanja i množenja realnim brojevima λ. Kanonsku bazu označavamo s

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3. Množenje kompleksnim brojem je linearni operator na $\mathbb{R}^2$. Budući da je množenje kompleksnih brojeva distributivno prema zbrajanju te asocijativno i komutativno, za kompleksni broj z vrijedi

$$z \cdot (x' + x'') = z \cdot x' + z \cdot x'', \qquad z \cdot (\lambda x) = \lambda(z \cdot x),$$

pa je preslikavanje

$$z \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto z \cdot x \tag{4.1}$$

linearan operator. Za kompleksni broj

$$z = \alpha + i\beta$$

su $z \cdot 1 = \alpha + i\beta$ i $z \cdot i = -\beta + i\alpha$ vrijednosti linearnog preslikavanja (4.1) na kanonskoj bazi, pa je

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

matrica tog linearnog preslikavanja.

4.4. Kompleksni brojevi kao 2×2 realne matrice. Očito možemo identificirati kompleksne brojeve i realne 2×2 matrice oblika

$$\alpha + i\beta \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Pri toj identifikaciji zbrajanju kompleksnih brojeva $z + z'$ odgovara zbrajanje preslikavanja po točkama

$$(z + z') \cdot x = z \cdot x + z' \cdot x,$$

dakle zbrajanje matrica

$$(\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta') \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix},$$

a množenju kompleksnih brojeva $z \cdot z'$ odgovara kompozicija preslikavanja

$$(z \cdot z') \cdot x = z \cdot (z' \cdot x),$$

dakle množenje matrica

$$(\alpha + i\beta) \cdot (\alpha' + i\beta') \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}.$$

4.5. Kompleksni brojevi jesu 2×2 **realne matrice.** Svo gornje razglabanje mogli smo preskočiti da smo rekli da kompleksni brojevi naprosto **jesu** realne 2×2 matrice oblika

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

s operacijama zbrajanja i množenja matrica. Pri tome bi trebalo provjeriti da je suma i produkt takvih matrica istog oblika i da za

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{imamo inverz} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sva ostala svojstva zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva, uključujući komutativnost množenja, slijede iz općih svojstava zbrajanja i množenja kvadratnih matrica.

4.6. Primjedba. Budući da je algebra kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ podalgebra algebre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, to algebru $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ kompleksnih 2×2 matrica možemo shvatiti kao podalgebru algebre $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ realnih 4×4 matrica. Posebno za

$$z_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}, \qquad \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2$$

imamo identifikaciju

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\beta_{11} & \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ \beta_{11} & \alpha_{11} & \beta_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\beta_{21} & \alpha_{22} & -\beta_{22} \\ \beta_{21} & \alpha_{21} & \beta_{22} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

5. Kvaternioni kao 2×2 kompleksne matrice

5.1. Imaginarne jedinice. Označimo s $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ algebru 2×2 kompleksnih matrica

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}.$$

Stavimo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Taj skup vektora je baza kompleksnog vektorskog prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Vrijede relacije

$$J_1^2 = -I, \quad J_2^2 = -I, \quad J_3^2 = -I, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} J_1 J_2 &= -J_2 J_1 = J_3, \\ J_2 J_3 &= -J_3 J_2 = J_1, \\ J_3 J_1 &= -J_1 J_3 = J_2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2. Algebra kvaterniona. Iz relacija (5.1) i (5.2) vidimo da je realan 4-dimenzionalan vektorski prostor

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &= \{\alpha_0 I + \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3 \mid \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}I + \mathbb{R}J_1 + \mathbb{R}J_2 + \mathbb{R}J_3\end{aligned}$$

zatvoren za množenje matrica, tj. da je realna algebra. Algebru $\mathbb{H}$ zovemo algebrom kvaterniona ili algebrom hiperkompleksnih brojeva[4]. Jedinčna matrica I je jedinični element algebre $\mathbb{H}$, a kvaternione J_1, J_2, J_3 zovemo imaginarnim jedinicama. Iz relacija (5.2) vidimo da algebra kvaterniona nije komutativna. Algebru kvaterniona možemo zapisati i kao skup matrica

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \,\Big|\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

5.3. Zadatak. Stavite $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$ i $-\bar{\beta} = \alpha_3 + i\alpha_4$ i napišite kvaternione kao realne 4×4 matrice.

5.4. Apsolutna vrijednost kvaterniona. Za kvaternion Z definiramo apsolutnu vrijednost (ili normu) $|Z|$ relacijom

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |Z|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \det Z.$$

Očito je $|Z| = 0$ ako i samo ako je $Z = 0$. Također vrijedi $|Z_1 Z_2| = |Z_1|\,|Z_2|$ za $Z_1, Z_2 \in \mathbb{H}$, kao i

$$|I| = |J_1| = |J_2| = |J_3| = 1.$$

5.5. Zadatak. Izračunajte norme kvaterniona

$$\begin{pmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3 \end{pmatrix}.$$

5.6. Konjugacija kvaterniona. Za kvaternion Z je hermitski adjungirana matrica Z^* također kvaternion pa imamo konjugaciju kvaterniona

$$(\alpha_0 I + \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3)^* = \alpha_0 I - \alpha_1 J_1 - \alpha_2 J_2 - \alpha_3 J_3.$$

Budući da množenje nije komutativno, važno je primijetiti da je $(Z_1 Z_2)^* = Z_2^* Z_1^*$. Također vrijedi

$$ZZ^* = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} = |Z|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |Z|^2\, I. \tag{5.3}$$

[4] ili Hamiltonovim brojevima

5.7. Invertiranje kvaterniona. Iz (5.3) slijedi da je svaki kvaternion $Z \neq 0$ invertibilan:

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|^2} Z^*.$$

Za $Z = \alpha_0 I + \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3$ to možemo zapisati i kao

$$Z^{-1} = \frac{1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} (\alpha_0 I - \alpha_1 J_1 - \alpha_2 J_2 - \alpha_3 J_3).$$

Izuzev komutativnosti množenja, kvaternioni zadovoljavaju sve ostale aksiome polja. Umjesto "nekomutativnog polja" govorimo da kvaternioni zadovoljavaju aksiome *tijela*.

5.8. Zadatak. Invertirajte kvaternione

$$\begin{pmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3 \end{pmatrix}.$$

5.9. Pitanje. Možemo li riješiti sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} A_{11} Z_1 + A_{12} Z_2 &= B_1, \\ A_{21} Z_1 + A_{22} Z_2 &= B_2, \end{aligned}$$

gdje su zadani kvaternioni A_{ij} i B_i, a nepoznanice su kvaternioni Z_j?

5.10. Zadatak. Riješite sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} Z_1 + J_1 Z_2 &= 0, \\ J_2 Z_1 + J_3 Z_2 &= 2J_2, \end{aligned}$$

gdje su nepoznanice kvaternioni Z_1 i Z_2.

5.11. Polarna forma kvaterniona. Budući da je $|Z^*| = |Z|$, svi kvaternioni norme 1 čine grupu, ispada da je to $SU(2)$:

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \mid gg^* = 1, \det g = 1 \right\} \\ &= \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta}\zeta \\ \beta & \bar{\alpha}\zeta \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, |\zeta| = 1, \det g = 1 \right\} \\ &= \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \\ &= \{ Z \in \mathbb{H} \mid |Z| = 1 \}. \end{aligned}$$

Analogno kompleksnim brojevima, svaki kvaternion $Z \neq 0$ možemo na jedinstveni način zapisati u "polarnom obliku"

$$Z = rg, \quad r = |Z|, \quad g = \frac{1}{|Z|} Z \in SU(2).$$

5.12. Zadatak. Napišite u polarnoj formi kvaternione

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

5.13. Skalarni i vektorski dio kvaterniona. Stavimo

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \{\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}J_1 + \mathbb{R}J_2 + \mathbb{R}J_3 \\ &= \{K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid K^* = -K, \operatorname{tr} K = 0\},\end{aligned}$$

gdje je $\operatorname{tr} K$ trag kvadratne matrice K, tj. suma dijagonalnih elemenata matrice K. Očito se svaki kvaternion na jedinstveni način može prikazati kao

$$Z = \alpha I + K, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathbb{V},$$

gdje je

$$\alpha I = \tfrac{1}{2}(Z + Z^*), \quad K = \tfrac{1}{2}(Z - Z^*)$$

(analogno rastavu kompleksnog broja na realan i imaginaran dio). Budući da je I jedinični element algebre, često se matrica αI identificira sa skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ i zove se skalarni (ili realni) dio kvaterniona Z. Zato često pišemo 1 umjesto I. Element $K \in \mathbb{V}$ zove se vektorski dio kvaterniona Z. Za kvaternion $K \in \mathbb{V}$ imamo $|K|^2 = KK^* = -K^2$. Posebno je

$$K^2 = -1 \quad \text{za} \quad K \in \mathbb{V}, \quad |K| = 1$$

pa kažemo da je K imaginarna jedinica.

5.14. Zadatak. Napišite skalarni i vektorski dio kvaterniona

$$\begin{pmatrix} 1 - i & -2 - 3i \\ 2 - 3i & 1 + i \end{pmatrix}.$$

5.15. Eksponencijalni zapis kvaterniona. Za imaginarnu jedinicu $K \in \mathbb{V}$, $|K| = 1$ i realan broj φ stavimo

$$e^{\varphi K} = \cos\varphi I + (\sin\varphi)K. \tag{5.4}$$

Očito je

$$\left|e^{\varphi K}\right|^2 = |\cos\varphi|^2 |I|^2 + |\sin\varphi|^2 |K|^2 = 1.$$

Također je jasno da svaki kvaternion norme 1 možemo prikazati u obliku (5.4): ako je $K' = \frac{1}{2}(Z - Z^*) \neq 0$, stavimo $K = \frac{1}{|K'|}K'$ i $\frac{1}{2}(Z + Z^*) = \cos\varphi I$. Tada je $Z = e^{\varphi K}$. Očito je

$$\left(e^{\varphi K}\right)^* = \cos\varphi I - (\sin\varphi)K.$$

Adicioni teoremi za funkcije sin i cos daju

$$\begin{aligned}e^{\varphi K} e^{\psi K} &= (\cos\varphi I + (\sin\varphi)K)(\cos\psi I + (\sin\psi)K) \\ &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)I + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)K \\ &= e^{(\varphi+\psi)K}.\end{aligned}$$

5.16. Zadatak. Napišite eksponencijalni zapis kompleksnog broja $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ i kvaterniona[5]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.17. Skalarni produkt na $\mathbb{H}$. Lako se provjeri da je formulom

$$(Z_1 \mid Z_2) = \tfrac{1}{4}\operatorname{tr}(Z_1^* Z_2 + Z_2^* Z_1)$$

definiran skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{H}$ i da za ranije definiranu normu vrijedi $|Z|^2 = (Z \mid Z)$. Također se lako vidi da imamo ortogonalnu sumu potprostora

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}I \oplus \mathbb{V},$$

te da vektori I, J_1, J_2, J_3 čine ortonormiranu bazu. Preslikavanje $\mathbb{V} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3 \mapsto \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \tag{5.5}$$

je izomorfizam unitarnih prostora, pri čemu je e_1, e_2, e_3 kanonska baza u $\mathbb{R}^3$.

5.18. Antikomutator i skalarni produkt vektora. Neka su K_1 i K_2 iz $\mathbb{V}$. Tada je

$$(K_1K_2 + K_2K_1)^* = K_2^*K_1^* + K_1^*K_2^* = K_1K_2 + K_2K_1.$$

Znači da je antikomutator

$$\{K_1, K_2\} = K_1K_2 + K_2K_1$$

hermitski element u $\mathbb{H}$, pa mora biti

$$\{K_1, K_2\} = \lambda I$$

za neki realni broj λ. No tada je

$$2\lambda = \operatorname{tr}(\lambda I) = \operatorname{tr}(K_1K_2 + K_2K_1) = -\operatorname{tr}(K_1^*K_2 + K_2^*K_1) = -4(K_1 \mid K_2),$$

pa imamo relaciju

$$\{K_1, K_2\} = -2(K_1 \mid K_2) \quad \text{za} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{V}.$$

[5]Za $\varphi = \pi/3$ imamo $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ i $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.19. Komutator i vektorski produkt vektora. Neka je $K_1, K_2 \in \mathbb{V}$. Komutator

$$[K_1, K_2] = K_1K_2 - K_2K_1$$

je bilinearna operacija i potpuno je određena na bazi od $\mathbb{V}$. Primijetimo da je $[K, K] = 0$. Budući da za izomorfizam (5.5) vrijedi

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}[J_1, J_2] &= J_3 \mapsto e_3 = e_1 \times e_2,\\
\tfrac{1}{2}[J_2, J_3] &= J_1 \mapsto e_1 = e_2 \times e_3,\\
\tfrac{1}{2}[J_3, J_1] &= J_2 \mapsto e_2 = e_3 \times e_1,
\end{aligned}$$

gdje je $v \times w$ vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$, operaciju

$$K_1 \times K_2 = \tfrac{1}{2}[K_1, K_2]$$

zovemo vektorskim produktom vektora u $\mathbb{V}$.

5.20. Množenje vektora pomoću skalarnog i vektorskog produkta. Neka je $K_1, K_2 \in \mathbb{V}$. Budući da je

$$\tfrac{1}{2}\{K_1, K_2\} + \tfrac{1}{2}[K_1, K_2] = \tfrac{1}{2}(K_1K_2 + K_2K_1) + \tfrac{1}{2}(K_1K_2 - K_2K_1) = K_1K_2,$$

množenje vektora u $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}$ možemo zapisati pomoću skalarnog i vektorskog produkta kao

$$K_1K_2 = -(K_1 \mid K_2)I + K_1 \times K_2.$$

Iz ove formule vidimo da kvaternione možemo definirati, koristeći izomorfizam (5.5), kao zbroj skalara i vektora

$$\alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \qquad \alpha_0 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in \mathbb{R}^3,$$

s operacijama zbrajanja i množenja zadanim formulama

$$\begin{aligned}
(\alpha + a) + (\beta + b) &= (\alpha + \beta) + (a + b),\\
(\alpha + a) \cdot (\beta + b) &= (\alpha\beta - (a \mid b)) + (\alpha b + \beta a + a \times b).
\end{aligned}$$

5.21. Paulijeve matrice i imaginarne jedinice. Ponekad se uzima drugu ortonormirana baza u $\mathbb{V}$:

$$J_x = -i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \; J_y = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; J_z = -i\sigma_z = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

gdje su σ_x, σ_y, σ_z Paulijeve matrice

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

te odgovarajući izomorfizam unitarnih prostora $\mathbb{V} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha_x J_x + \alpha_y J_y + \alpha_z J_z \mapsto \alpha_x e_1 + \alpha_y e_2 + \alpha_z e_3. \tag{5.6}$$

5.22. Diracove matrice. U realnoj asocijativnoj algebri s jedinicom 2×2 matrica $\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$ nad kvaternionima matrice

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & J_x \\ -J_x & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & J_y \\ -J_y & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & J_z \\ -J_z & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_4 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

zovemo *Diracovim matricama.* Raspišite te matrice kao 4×4 kompleksne matrice ili 8×8 realne matrice. Izračunajte njihove antikomutatore i komutatore.

POGLAVLJE 11

Dijagonalizacija operatora

U ovom poglavlju uvodimo pojmove svojstvenog polinoma, svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora kvadratne matrice i linearnog operatora. Na primjerima pokazujemo da za linearni operator može postojati i ne postojati baza prostora u kojoj mu je matrica dijagonalna. Nakon toga pokazujemo vezu svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora s rješenjima sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

1. Svojstvene vrijednosti linearnog operatora

1.1. Teorem. *Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ matrica. Tada je funkcija*

$$P_A(x) = \det(xI - A)$$

od varijable x polinom n-tog stupnja oblika

$$P_A(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1}x + \sigma_n,$$

pri čemu je $\sigma_1 = -\mathrm{tr}A$ i $\sigma_n = (-1)^n \det A$. Polinom $P_A(x)$ zovemo *svojstvenim* ili *karakterističnim polinomom matrice A.*

Dokaz. Prvo primijetimo da su $x - \alpha_{ii}$ dijagonalni elementi matrice $xI - A$, a da elementi $-\alpha_{ij}$ van dijagonale ne sadrže x. Budući da je determinanta matrice suma produkata n matričnih elemenata pomnoženih s $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, to je jasno da je $\det(xI - A)$ polinom stupnja $\leq n$. Jedini način da u polinomu $P_A(x)$ dobijemo potenciju x^n je da množimo dijagonalne elemente, što u formuli

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n} \tag{1.1}$$

odgovara sumandu za $\sigma = \mathrm{id}$ i $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$. Znači da je $P_A(x)$ oblika $x^n + \ldots$. Da bismo u polinomu $P_A(x)$ dobili potenciju x^{n-1}, moramo zbrojiti sumande u formuli (1.1) koji kao faktore imaju $n-1$ dijagonalnih elementa. No to je opet moguće jedino ako množimo sve dijagonalne elemente. Znači da je $P_A(x)$ oblika $x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots$, gdje je σ_1 koeficijent uz x^{n-1} u polinomu

$$(x - \alpha_{11}) \ldots (x - \alpha_{nn}) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots = x^n - (\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn})x^{n-1} + \ldots.$$

Znači da je $\sigma_1 = -(\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}) = -\mathrm{tr}A$. Na kraju, $\sigma_n = P_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$. $\square$

1.2. Primjer. Za 2×2 matricu $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ imamo

$$xI-A=x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & -1\\ 1 & x-1\end{pmatrix},$$

pa je

$$P_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x-1 & -1\\ 1 & x-1\end{pmatrix}=(x-1)^2+1=x^2-2x+2.$$

1.3. Zadatak. Neka je A kvadratna $n\times n$ matrica i T regularna $n\times n$ matrica. Dokažite da A i $T^{-1}AT$ imaju iste svojstvene polinome, tj. da je

$$P_A(x)=P_{T^{-1}AT}(x).$$

1.4. Zadatak. Dokažite da ne postoji regularna 2×2 matrica T takva da je $B=T^{-1}AT$ za matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

1.5. Svojstvene vrijednosti matrice. Neka je A realna ili kompleksna kvadratna matrica. Nultočke svojstvenog polinoma $P_A(x)$ matrice A zovemo *svojstvenim vrijednostima matrice* A, a skup svih svojstvenih vrijednosti zovemo *spektrom matrice* A.

1.6. Zadatak. Nađite svojstvene polinome i svojstvene vrijednosti imaginarnih jedinica J_1, J_3, J_3 kvaterniona.

1.7. Zadatak. Nađite svojstvene polinome i svojstvene vrijednosti Paulijevih matrica.

1.8. Svojstveni polinom linearnog operatora. Neka je V realni ili kompleksni konačno dimenzionalni vektorski prostor i $A\colon V\to V$ linearan operator. Polinom

$$P_A(x)=\det\,(xI-A)$$

zovemo *svojstvenim polinomom operatora* A. Podsjetimo se da je determinanta operatora definirana kao determinanta matrice operatora u nekoj bazi E prostora V, pa onda i za svojstveni polinom operatora imamo

$$P_A(x)=\det\,(xI-A_E).$$

1.9. Invarijante linearnog operatora. Važno je primijetiti da svojstveni polinom

$$\det\,(xI-A)=\det\,(xI-A_E)$$

ne ovisi o izboru baze E od V u kojoj računamo matricu A_E operatora A. Znači da koeficijenti svojstvenog polinoma

$$\sigma_1=-\mathrm{tr}A=-\mathrm{tr}A_E,\quad \sigma_2,\ldots,\quad \sigma_{n-1},\quad \sigma_n=(-1)^n\det A=(-1)^n\det A_E$$

ne ovise zovemo o izboru baze E. No onda ni bilo koja funkcija tih koeficijenata $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, na primjer

$$f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=\sigma_1^2-\sigma_n=(\mathrm{tr}A)^2-(-1)^n\det A,$$

ne ovisi o izboru baze E prostora V u kojoj računamo matricu operatora. Takve funkcije zovemo *invarijantama operatora* A. Posebno važne invarijante operatora A su $\mathrm{tr}A$ i $\det A$.

1.10. Spektar linearnog operatora. Neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. *Spektrom linearnog operatora* $A\colon V \to V$ zovemo skup $\sigma(A)$ svih nultočaka svojstvenog polinoma $P_A(x)$ u polju **kompleksnih** brojeva, tj.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid P_A(\lambda) = 0\},$$

a elemente spektra zovemo *svojstvenim vrijednostima od* A. Prema osnovnom teoremu algebre spektar

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$$

je neprazan skup i svojstveni polinom $P_A(x)$ možemo faktorizirati

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_s)^{n_s},$$

gdje se sve međusobno različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ javljaju s *algebarskim kratnostima* $n_1, \dots, n_s$. Uočimo da je

$$n_1 + \cdots + n_s = n.$$

1.11. Spektar i koeficijenti svojstvenog polinoma. Važno je primijetiti da koeficijente svojstvenog polinoma $P_A(x)$ možemo izraziti pomoću svojstvenih vrijednosti koristeći faktorizaciju polinoma

$$(x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_s)^{n_s} = x^n - (n_1\lambda_1 + \cdots + n_s\lambda_s)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_s^{n_s}.$$

Posebno je

$$\mathrm{tr}A = n_1\lambda_1 + \cdots + n_s\lambda_s \quad \text{i} \quad \det A = \lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_s^{n_s}.$$

1.12. Primjer. Svojstveni polinom jediničnog operatora I na $\mathbb{R}^n$ je $P_I(x) = (x-1)^n$, spektar je $\sigma(I) = \{1\}$, algebarska kratnost svojstvene vrijednosti 1 je n, $\mathrm{tr}\, I = n \cdot 1 = 1$, $\det I = 1^n = 1$.

1.13. Primjer. Svojstveni polinom rotacije u ravnini za kut $\frac{\pi}{2}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je $P_J(x) = x^2+1$, spektar je $\sigma(J) = \{i, -i\}$, algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti su 1, $\mathrm{tr}\, J = i + (-i) = 0$, $\det J = i \cdot (-i) = 1$.

1.14. Nula nije u spektru regularnog operatora. Operator A je regularan ako i samo ako je

$$\det A \neq 0.$$

Znači da je A regularan ako i samo ako nula nije u spektru od A, tj.

$$\det(0 \cdot I - A) \neq 0.$$

Isto možemo zaključiti na mnogo kompliciraniji način:

$$\det A = \lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_s^{n_s} \neq 0 \quad \text{ako i samo ako} \quad 0 \notin \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}.$$

2. Svojstveni vektori linearnog operatora

2.1. Svojstveni vektori. Neka je A linearan operator na V i $v \in V$ vektor različit od nule. Ako je za neki skalar λ

$$Av = \lambda v,$$

onda kažemo da je v *svojstveni vektor od* A. Primijetimo da je tada

$$(\lambda I - A)v = 0,$$

pa zbog pretpostavke $v \neq 0$ operator $\lambda I - A$ nije injekcija i vrijedi

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0, \quad \text{tj.} \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Zato još kažemo da je v *svojstveni vektor od* A *za svojstvenu vrijednost* λ.

2.2. Primjer. Spektar rotacije J u ravnini za kut $\frac{\pi}{2}$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

je $\{i, -i\}$. Budući da J nema realnih svojstvenih vrijednosti, to nema ni svojstvenih vektora.

2.3. Napomena. Ako je v svojstveni vektor od A za svojstvenu vrijednost λ, onda je za svaki skalar $\mu \neq 0$ i vektor μv svojstveni vektor od A za svojstvenu vrijednost λ. Naime, iz pretpostavki slijedi

$$A(\mu v) = \mu A v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v), \quad \mu v \neq 0.$$

Zbog toga u unitarnom prostoru normiranjem svojstvenog vektora v dobivamo normirani svojstveni vektor $e = \frac{1}{||v||} v$. Štoviše, potprostor

$$\ker(\lambda I - A) = \{v \in V \mid Av = \lambda v\}$$

zovemo svojstvenim potprostorom za svojstvenu vrijednost λ. Svojstveni se potprostor kao skup sastoji od nule i **svih** svojstvenih vektora za svojstvenu vrijednost λ.

2.4. Teorem. (1) *Ako je $V \neq 0$ konačno dimenzionalni* **kompleksni** *vektorski prostor, onda za svaku svojstvenu vrijednost postoji svojstveni vektor. Posebno, postoji bar jedan $v \neq 0$ i bar jedan $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je*

$$Av = \lambda v.$$

(2) *Ako je $V \neq 0$ konačno dimenzionalni* **realni** *vektorski prostor, onda za svaku* **realnu** *svojstvenu vrijednost postoji svojstveni vektor.*

DOKAZ. (1) Ako je V kompleksan prostor, onda je za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ definiran operator $\lambda I - A$. Budući da $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ povlači da operator $\lambda I - A$ nije injekcija, to postoji $v \neq 0$ takav da je

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

(2) Ako je V realan prostor, onda je operator $\lambda I - A$ definiran samo za realne brojeve λ. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ realan broj, onda $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ povlači da operator $\lambda I - A$ nije injekcija, pa postoji $v \neq 0$ takav da je

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

□

2.5. Primjer. Neka je $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ zadan u kanonskoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektar od A je $\{i, -i\}$, pa za svojstvenu vrijednost $\lambda = i$ svojstveni vektor tražimo rješavajući sistem jednadžbi $(A - \lambda I)v = 0$, tj.

$$\begin{aligned} -i\xi_1 - \xi_2 &= 0, \\ \xi_1 - i\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Jedno rješenje tog sistema je $\xi_2 = 1$, $\xi_1 = i$, pa imamo svojstveni vektor $v = (i, 1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Budući da je $\dim \ker(iI - A) = 1$, to je skup svih svojstvenih vektora za svojstvenu vrijednost i

$$\ker(iI - A)\backslash\{0\} = \left\{ \mu \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{C},\ \mu \neq 0 \right\}.$$

2.6. Zadatak. Neka je $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadan u kanonskoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nađite sve svojstvene vrijednosti i **sve** svojstvene vektore operatora A.

2.7. Zadatak. Neka je $A\colon V \to V$ zadan u kanonskoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nađite sve svojstvene vrijednosti i **sve** svojstvene vektore operatora A u slučaju (a) $V = \mathbb{R}^4$ i (b) $V = \mathbb{C}^4$.

2.8. Lema. *Neka je $A\colon V \to V$ linearan operator. Neka su $v_1, \dots, v_r$ svojstveni vektori za međusobno različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ operatora A, sve realne ako je V realan prostor. Za $i \in \{1, \dots, r\}$ stavimo*

$$Q_i(A) = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{j\neq i}(A - \lambda_j I).$$

Tada je

$$Q_i(A)v_j = \begin{cases} v_i & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Dokaz. Zbog $Av_i = \lambda_i v_i$ imamo

$$\begin{aligned}
&(A - \lambda_1 I)\dots(A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I)\dots(A - \lambda_{r-1} I)(A - \lambda_r I)v_i \\
&= (A - \lambda_1 I)\dots(A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I)\dots(A - \lambda_{r-1} I)(\lambda_i - \lambda_r)v_i \\
&= (\lambda_i - \lambda_r)(A - \lambda_1 I)\dots(A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I)\dots(A - \lambda_{r-1} I)v_i \\
&\ \ \vdots \\
&= (\lambda_i - \lambda_1)\dots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\dots(\lambda_i - \lambda_{r-1})(\lambda_i - \lambda_r)v_i.
\end{aligned}$$

Znači da je

$$\left(\prod_{j\neq i}(A - \lambda_j I)\right) v_i = \left(\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)\right) v_i,$$

pa je $Q_i(A)v_i = v_i$. Ako je $k \neq i$, onda zbog $Av_k = \lambda_k v_k$ imamo

$$\left(\prod_{j\neq i}(A - \lambda_j I)\right) v_k = \left(\prod_{j\neq i}(\lambda_k - \lambda_j)\right) v_k = 0$$

jer je za $j = k$ faktor $\lambda_k - \lambda_k = 0$. Znači da za $k \neq i$ imamo $Q_i(A)v_k = 0$. $\square$

2.9. Teorem. *Neka je $A\colon V \to V$ linearan operator. Neka su $v_1, \dots, v_n$ svojstveni vektori za međusobno različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ operatora A, sve realne ako je V realan prostor. Tada su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni.*

Posebno, ako je $n = \dim V$, onda su svojstveni vektori $v_1, \dots, v_n$ baza od V.

Dokaz. Treba dokazati da $\xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n = 0$ povlači $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$. Promijenimo li operator $Q_i(A)$ iz leme 2.8 dobivamo

$$Q_i(A)(\xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n) = \xi_1 Q_i(A) v_1 + \cdots + \xi_n Q_i(A) v_n = \xi_i v_i = 0,$$

pa $v_i \neq 0$ povlači $\xi_i = 0$. □

2.10. Primjer. Neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan u kanonskoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svojstveni polinom je $P_A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$, pa A ima $3 = \dim \mathbb{R}^3$ međusobno različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Znači da A ima i tri svojstvena vektora v_1, v_2, v_3 (za te tri svojstvene vrijednosti) koji čine bazu od $\mathbb{R}^3$. Budući da je

$$\begin{aligned} Av_1 &= v_1 = 1 \cdot v_1 + 0v_2 + 0v_3, \\ Av_2 &= -v_2 = 0v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0v_3, \\ Av_3 &= 2v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 2 \cdot v_3, \end{aligned}$$

to je matrica A_B operatora A u bazi $B = (v_1, v_2, v_3)$ dijagonalna matrica

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.11. Problem dijagonalizacije. *Problem dijagonalizacije linearnog operatora* je problem nalaženja baze $B = (v_1, \dots, v_n)$ od V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A. Drugim riječima, problem dijagonalizacije linearnog operatora $A\colon V \to V$ je problem nalaženja baze $B = (v_1, \dots, v_n)$ od V u kojoj je matrica operatora dijagonalna

$$A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

pri čemu se na dijagonali matrice A_B javljaju svojstvene vrijednosti operatora A. Ako takva baza postoji, onda kažemo da se A *može dijagonalizirati.*

2.12. Napomena. Ako za A postoji baza svojstvenih vektora, onda je svojstveni polinom

$$P_A(x) = \det(xI - A) = \det\left((xI - A)_B\right) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n),$$

pa zaključujemo da se svojstvena vrijednost operatora A javlja na dijagonali matrice A_B onoliko puta koliko puta se javlja u faktorizaciji svojstvenog polinoma $P_A(x)$.

2.13. Napomena. Ako se operator A može dijagonalizirati, onda se iz dijagonalne matrice A_B operatora A u bazi svojstvenih vektora mogu iščitati gotovo sva bitna svojstva operatora A. Tako odmah vidimo rang, defekt, svojstveni polinom, trag, determinantu, spektar, algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti, itd. Računanje polinoma od A je također vrlo jednostavno, npr.

$$(A^2)_B = (AA)_B = A_B A_B = (A_B)^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix},$$

$$(A^5)_B = (A_B)^5 = \begin{pmatrix} \lambda_1^5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^5 \end{pmatrix}.$$

Tako je za operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iz primjera 2.10 i polinom $Q(x) = x^5 - x^2 + 1$ mnogo lakše računati u bazi B

$$Q(A)_B = Q(A_B) = \begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nego li u kanonskoj bazi $E = (e_1, e_2, e_3)$

$$Q(A)_E = Q(A_E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^5 - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zbog svih navedenih, ali i drugih razloga, problem dijagonalizacije linearnog operatora je jedan od osnovnih problema linearne algebre.

2.14. Zadatak. Izračunajte

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}.$$

(Uputa: koristite činjenicu da je $(T^{-1}CT)^{100} = T^{-1}C^{100}T$.)

2.15. Ne može se svaki operator dijagonalizirati. Problem dijagonalizacije ne može se riješiti za svaki operator. Najjednostavniji primjer operatora koji se ne može dijagonalizirati je operator $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadan matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je $N \neq 0$, $\det N = 0$ i $\operatorname{tr} N = 0$. Da postoji baza $B = (v_1, v_2)$ u kojoj se N dijagonalizira, tj.

$$N_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

bilo bi $\det N = \det N_B = \lambda_1\lambda_2 = 0$, $\operatorname{tr} N = \operatorname{tr} N_B = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. No to bi povlačilo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i

$$N_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. $N = 0$, a što je nemoguće jer je $N \neq 0$.

2.16. Zadatak. Neka je $A\colon V \to V$ zadan u kanonskoj bazi 4×4 matricom

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pri čemu je N matrica iz prethodnog primjera. Dokažite da se operator A ne može dijagonalizirati ni u slučaju (a) $V = \mathbb{R}^4$ niti u slučaju (b) $V = \mathbb{C}^4$.

3. Svojstveni vektori i rješenja diferencijalnih jednadžbi

3.1. Eksponencijalna funkcija. U matematičkoj se analizi dokazuje da za svaki kompleksni broj z red potencija[1]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konvergira, tj. da za svaki z postoji limes niza parcijalnih suma reda

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Eksponencijalna funkcija $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je funkcija

$$z \mapsto e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Ovako definirana eksponencijalna funkcija je funkcija kompleksne varijable $z = x + iy$, a veza s eksponencijalnom funkcijom e^x realne varijable i trigonometrijskom funkcijama $\cos y$ i $\sin y$ realne varijable dana je formulom

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

[1]Ovdje je $k!$ oznaka za k *faktorijela*, tj. $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k$.

3.2. Osnovno svojstvo eksponencijalne funkcije. Za sve kompleksne brojeve z i w vrijedi

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}, \qquad e^0 = 1.$$

U slučaju $z = i\varphi$ i $w = i\psi$ relacija

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$$

svodi se na adicione teoreme za funkcije sinus i kosinus

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi),$$

odnosno

$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\psi) &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,\\ \sin(\varphi+\psi) &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi.\end{aligned}$$

3.3. Derivacija eksponencijalne funkcije. Nas će posebno zanimati funkcije oblika

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}, \quad f(t) = e^{\lambda t}$$

za kompleksan broj

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Obično si zamišljamo da je f funkcija vremena t, a zbog relacije

$$f(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

tu funkciju interpretiramo kao *titranja frekvencijom* β realnog i imaginarnog dijela

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{i} \quad e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

pri čemu *amplituda titranja* $e^{\alpha t}$ s vremenom eksponencijalno raste za $\alpha > 0$, eksponecijalno pada za $\alpha < 0$, ili je konstantno 1 za $\alpha = 0$. Derivaciju takve funkcije po realnoj varijabli t dobivamo deriviranjem realnog i imaginarnog dijela

$$\begin{aligned}f'(t) = \tfrac{d}{dt}f(t) &= (e^{\alpha t}\cos\beta t)' + i(e^{\alpha t}\sin\beta t)'\\ &= (\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t)\\ &+ i(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t)\\ &= \alpha e^{\alpha t}(\alpha + i\beta)(\cos\beta t + i\sin\beta t)\\ &= \lambda f(t).\end{aligned}$$

3.4. Harmonijski oscilator. U klasičnoj mehanici je gibanje čestice u vremenu zadano jednadžbom gibanja

$$m\ddot{x} = F$$

u kojoj akceleracija[2] čestice $\ddot{x}$ ovisi o masi čestice m i sili F koja na česticu djeluje. Ako znamo jednadžbu gibanja[3] i položaj i brzinu čestice u početnom trenutku, onda je položaj čestice u proizvoljnom trenutku dan rješenjem

[2] tj. druga derivacija $\ddot{x}(t) = x''(t)$ po vremenu t položaja čestice $x(t)$

[3] tj. zakon po kojem se čestica giba

diferencijalne jednadžbe sa zadanim početnim uvjetom. Jedan od najvažnijih primjera je jednadžba

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.1}$$

za 1-*dimenzionalni harmonijski oscilator frekvencije* ω, $\omega > 0$. Ako znamo položaj $x(0) = A$ i brzinu $\dot{x}(0) = B$ u trenutku $t = 0$, onda je položaj čestice $x(t)$ u proizvoljnom trenutku t dan rješenjem diferencijalne jednadžbe drugog reda sa zadanim početnim uvjetom

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \qquad x(0) = A,\ \dot{x}(0) = B. \tag{3.2}$$

Taj problem rješavamo tako da pretpostavimo da postoji rješenje oblika $x(t) = e^{\lambda t}$, pa drugu derivaciju $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ uvrštavamo u jednadžbu (3.1) i dobivamo uvjet

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0,$$

što nakon kraćenja s $e^{\lambda t} \neq 0$ daje

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0. \tag{3.3}$$

Očito je $x(t) = e^{\lambda t}$ rješenje jednadžbe (3.1) ako i samo ako je λ rješenje jednadžbe (3.3), tj. ako je $\lambda = \pm i\omega$. Znači da imamo dva rješenja diferencijalne jednadžbe

$$x_1(t) = e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = e^{-i\omega t}.$$

No i svaka linearna kombinacija funkcija

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

je rješenje diferencijalne jednadžbe (3.1), pa da bi zadovoljili i početni uvjet tražimo konstante C_1 i C_2 takve da vrijedi

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 x_1(0) + C_2 x_2(0) = C_1 + C_2 = A, \\ \dot{x}(0) &= C_1 \dot{x}_1(0) + C_2 \dot{x}_2(0) = i\omega C_1 - i\omega C_2 = B. \end{aligned}$$

Taj sistem jednadžbi s nepoznanicama C_1 i C_2 ima jedinstveno rješenje

$$C_1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2i\omega}B, \quad C_2 = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2i\omega}B$$

i traženo rješenje diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetom (3.2) je funkcija

$$x(t) = \frac{1}{2}A(x_1(t) + x_2(t)) + \frac{1}{2i\omega}B(x_1(t) - x_2(t)) = A\cos\omega t + \frac{B}{\omega}\sin\omega t.$$

Algebarsku jednadžbu (3.3) zovemo *karakterističnom jednadžbom* diferencijalne jednadžbe (3.1).

3.5. Sistem jednadžbi za harmonjski oscilator. Diferencijalnu jednadžbu drugoga reda (3.1)

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

možemo svesti na sistem diferencijalnih jednadžbi prvoga reda tako da stavimo

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t), \\ y_2(t) &= x'(t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tada je

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= x'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) &= (x'(t))' = x''(t) = -\omega^2 x(t) = -\omega^2 y_1(t), \end{aligned}$$

pa imamo sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= -\omega^2 y_1(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

kojeg u matričnom obliku možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Ako je funkcija $x(t)$ rješenje diferencijalne jednadžbe (3.1), onda nam očito supstitucija (3.4) daje rješenje sistema (3.5). No vrijedi i obrat: ako je par funkcija $Y = (y_1, y_2)$ rješenje sistema (3.5), onda supstitucijom

$$x(t) = y_1(t)$$

dobivamo rješenje diferencijalne jednadžbe (3.1) jer je

$$x''(t) = y_1''(t) = (y_1'(t))' = (y_2(t))' = -\omega^2 y_1(t) = -\omega^2 x(t).$$

Na taj način problem rješavanja diferencijalne jednadžbe drugog reda svodimo na rješavanje sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Očito se rješavanje diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetom (3.2) svodi na rješavanje sistema s početnim uvjetom

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

3.6. Zadatak. Nađite sva rješenja sistema diferemcijanih jednadžbi

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

svođenjem na diferencijalnu jednadžbu $x''(t) = 0$.

3.7. Homogeni linearni sistemi diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Neka je zadana $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$. *Homogeni*[4] *linearni sistem diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim keficijentima* je problem nalaženja svih n-torki derivabilnih funkcija $Y = (y_1, \dots, y_n)$ takvih da vrijedi

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) =& \alpha_{11} y_1(t) + \cdots + \alpha_{1n} y_n(t)\,,\\
y_2'(t) =& \alpha_{21} y_1(t) + \cdots + \alpha_{2n} y_n(t)\,,\\
&\dots\\
y_n'(t) =& \alpha_{n1} y_1(t) + \cdots + \alpha_{nn} y_n(t)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

za svaki $t \in \mathbb{R}$. Često sistem kraće zapisujemo

$$Y'(t) = AY(t) \quad \text{ili} \quad Y' = AY.$$

Za zadanu n-torku brojeva $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ rješavanje sistema (3.7) s početnim uvjetom

$$y_1(0) = \beta_1, \quad \dots, \quad y_n(0) = \beta_n$$

zovemo *Cauchyjevim problemom* kojeg kraće zapisujemo kao

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(0) = b.$$

3.8. Teorem. *Skup svih rješenja homogenog linearnog sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda je vektorski prostor.*

DOKAZ. Zbog linearnosti deriviranja imamo

$$(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)' = \lambda_1 Y_1' + \lambda_2 Y_2',$$

a zbog linearnosti množenja vektora matricom imamo

$$A(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 AY_1 + \lambda_2 AY_2.$$

Zato je za dva rješenja sistema Y_1 i Y_2 i njihova kombinacija opet rješenje:

$$(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)' = \lambda_1 Y_1' + \lambda_2 Y_2' = \lambda_1 AY_1 + \lambda_2 AY_2 = A(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2).$$

□

[4] Ako je zadana $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$ i funkcije $f_1, \dots, f_n$, onda je *nehomogeni linearni sistem diferencijalnih jednadžbi* sistem oblika

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) =& \alpha_{11} y_1(t) + \cdots + \alpha_{1n} y_n(t) + f_1(t)\,,\\
y_2'(t) =& \alpha_{21} y_1(t) + \cdots + \alpha_{2n} y_n(t) + f_2(t)\,,\\
&\dots\\
y_n'(t) =& \alpha_{n1} y_1(t) + \cdots + \alpha_{nn} y_n(t) + f_n(t)\,.
\end{aligned}
$$

3.9. Svojstveni vektori i rješenja diferencijalnih jednadžbi. Neka je $v = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \neq 0$ svojstveni vektor matrice A za svojstvenu vrijednost λ, tj.

$$Av = \lambda v.$$

Stavimo $Y(t) = e^{\lambda t} v = e^{\lambda t}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (e^{\lambda t}\gamma_1, \dots, e^{\lambda t}\gamma_n)$. Tada je

$$\begin{aligned} Y'(t) &= ((e^{\lambda t}\gamma_1)', \dots, (e^{\lambda t}\gamma_n)') = (\lambda e^{\lambda t}\gamma_1, \dots, \lambda e^{\lambda t}\gamma_n) \\ &= \lambda e^{\lambda t}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t} A v = A(e^{\lambda t} v) = AY(t). \end{aligned}$$

Znači da je n-torka funkcija

$$Y(t) = e^{\lambda t} v$$

rješenje sistema jednadžbi

$$Y' = AY.$$

3.10. Dijagonalizacija operatora i Cauchyjev problem. Pretpostavimo da za $n \times n$ matricu A postoji baza svojstvenih vektora $v_1, \dots, v_n$,

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad \dots, \quad Av_n = \lambda_n v_n.$$

Tada imamo n rješenja

$$Y_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \quad \dots, \quad Y_n(t) = e^{\lambda_n t} v_n$$

sistema diferencijalnih jednadžbi $Y' = AY$ i svaka linearna kombinacija

$$Y = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n$$

tih funkcija je opet rješenje sistema. Ako je zadan Cauchjev problem

$$Y' = AY, \quad Y(0) = b,$$

onda treba treba tražiti konstante $C_1, \dots, C_n$ tako da bude zadovoljen i početni uvjet

$$Y(0) = C_1 Y_1(0) + \dots + C_n Y_n(0) = C_1 v_1 + \dots + C_n v_n = b.$$

Budući da je po pretpostavci $v_1, \dots, v_n$ baza, to gornji sistem jednadžbi s nepoznanicama $C_1, \dots, C_n$ ima jedinstveno rješenje.

Znači da Cauchyjev problem za svaki početni uvjet možemo riješiti na opisani način ako se A može dijagonalizirati.

3.11. Napomena. Ako su $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \lambda_m = \alpha_m + i\beta_m$ međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora A, onda postoje linearno nezavisni svojstveni vektori $v_1, \dots, v_m$ i pripadna rješenja $Y_1, \dots, Y_m$ sistema $Y' = AY$, pri čemu konstruirano rješenje Y_k opisuje oscilacije sistema frekvencijom β_k. Zbog te veze s "dopuštenim frekvencijama titranja sistema" skup svojstvenih vrijednosti operatora A zovemo spektrom od A.

3.12. Zadatak. Pokažite da se matrica u Cauchyjevom problemu (3.6) može dijagonalizirati i nađite rješenje.

3.13. Zadatak. Riješite Cauchyjev problem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.14. Napomena. Valja reći da za svaku kvadratnu matricu A Cauchyjev problem

$$Y' = AY, \quad Y(0) = b$$

uvijek ima jedinstveno rješenje. Jedan način da se to vidi je da napišemo eksponencijalnu funkciju operatora

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = 1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \cdots + \frac{t^m A^m}{m!} + \ldots \tag{3.8}$$

i pomoću nje rješenje Cauchyjevog problema

$$Y(t) = e^{tA} b.$$

Naravno, za to bi za početak trebalo definirati i dokazati konvergenciju reda operatora.

3.15. Zadatak. Koristeći definiciju (3.8) izračunajte e^{tA} za $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i provjerite da je $Y(t) = e^{tA} b$ rješenje Cauchyjevog problema $Y' = AY$, $Y(0) = b$. Usporedite to rješenje s rješenjima dobivenim u zadatku 3.6.

POGLAVLJE 12

Operatori na unitarnim prostorima

U ovom poglavlju pretpostavljamo da je V konačno dimenzionalni unitarni prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Pokazujemo da svaki operator A ima jedinstveni hermitski adjungirani operator A^*. Definiramo hermitske operatore i kvadratne forme na $\mathbb{R}^n$ i za njih dokazujemo teoreme dijagonalizacije. Uvodimo pojam unitarnog operatora i pokazujemo da oni čine grupu. Dokazujemo da su elementi grupe $SO(3)$ rotacije u $\mathbb{R}^3$.

1. Hermitski adjungirani operator

1.1. Matrica operatora u ortonormiranoj bazi. Neka je $E = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormirana baza od V. Tada su koordinate ξ_i vektora

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

dane formulom

$$\xi_i = (x \mid e_i), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

Ako je $A\colon V \to V$ linearni operator, onda je matrica $A_E = (\alpha_{ij})$ operatora A u bazi E određena formulom

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Budući da koordinate α_{ij} vektora Ae_j u ortonormiranoj bazi E možemo računati pomoću formule (1.1), to je matrica operatora u ortonormiranoj bazi dana formulom

$$\alpha_{ij} = (Ae_j \mid e_i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

1.2. Lema. *Neka su A i B linearni operatori na V. Tada je $A = B$ ako i samo ako je*

$$(Ax \mid y) = (Bx \mid y) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

DOKAZ. Neka je $E = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormirana baza od V. Tada je

$$(Ae_j \mid e_i) = (Be_j \mid e_i), \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Znači da su matrice A_E i B_E operatora jednake, pa slijedi i jednakost operatora $A = B$. Obrat je očigledan. $\square$

1.3. Hermitski adjungirana matrica. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ matrica. Tada matricu

$$A^* = (\beta_{ij}), \quad \beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

zovemo *hermitski adjungiranom matricom matrici* A. Znači da je A^* dobivena iz A transponiranjem i, ako se radi o kompleksnoj matrici, kompleksnim konjugiranjem svakog matričnog elementa.

1.4. Primjer.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 1 & -1 \\ 2-2i & 3 & -2 \\ 3+i & 4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i & 2+2i & 3-i \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.5. Hermitski adjungirani operator. *Neka je $A\colon V \to V$ linearni operator. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A^*\colon V \to V$ takav da je*

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^* y) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

Operator A^* zovemo hermitski adjungiranim operatorom operatoru A.

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost. Pretpostavimo da su B i C operatori na V takvi da je

$$(Ax \mid y) = (x \mid By) \quad \text{i} \quad (Ax \mid y) = (x \mid Cy) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

Tada je zbog hermitske simetrije skalarnog produkta

$$(By \mid x) = \overline{(Ax \mid y)} = (Cy \mid x) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V,$$

pa iz leme 1.2 slijedi $B = C$.

Dokažimo sada da operator A^* postoji. Odaberimo neku ortonormiranu bazu $E = (e_1, \dots, e_n)$ od V. Ako operator A^* postoji, onda mora biti

$$(Ae_i \mid e_j) = (e_i \mid A^* e_j) \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Zbog hermitske simetrije skalarnog produkta to je ekvivalentno

$$(A^* e_j \mid e_i) = \overline{(Ae_i \mid e_j)} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Zato definiramo linearan operator A^* tako da mu je u bazi E matrica $(A^*)_E = (\beta_{ij})$ jednaka

$$(A^*)_E = (A_E)^*, \qquad \beta_{ij} = (A^* e_j \mid e_i) = \overline{(Ae_i \mid e_j)} = \overline{\alpha_{ji}}, \tag{1.3}$$

tj. jednaka adjungiranoj matrici matrice $A_E = (\alpha_{ij})$ operatora A. Sada zbog (1.2) za proizvoljne

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \qquad \text{i} \qquad y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$$

imamo

$$\begin{aligned}(Ax \mid y) &= (A\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\overline{\eta_j}(Ae_i \mid e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\overline{\eta_j}(e_i \mid A^*e_j) = (\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \mid A^*\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j) = (x \mid A^*y).\end{aligned}$$

□

1.6. Napomena. Zbog hermitske simetrije skalarnog produkta je

$$(A^*y \mid x) = (y \mid Ax) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V.$$

1.7. Svojstva hermitskog adjungiranja.

(1) $(A^*)^* = A$, obično pišemo $A^{**} = A$ i kažemo da je * *involucija.*
(2) $I^* = I$.
(3) $(AB)^* = B^*A^*$, obično kažemo da je * *antiautomorfizam množenja.*
(4) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*$, u kompleksnom slučaju kažemo da je * *antilinearno.*

DOKAZ. Sve tvrdnje slijede iz relacija

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^*y) \quad \text{i} \quad (A^*x \mid y) = (x \mid Ay)$$

primjenom leme 1.2:

$$\begin{aligned}((A^*)^*x \mid y) &= (x \mid A^*y) = (Ax \mid y). \\ (I^*x \mid y) &= (x \mid Iy) = (x \mid y) = (Ix \mid y). \\ ((AB)^*x \mid y) &= (x \mid ABy) = (A^*x \mid By) = (B^*A^*x \mid y). \\ ((\lambda A + \mu B)^*x \mid y) &= (x \mid (\lambda A + \mu B)y) = \bar{\lambda}(x \mid Ay) + \bar{\mu}(x \mid By) \\ &= \bar{\lambda}(A^*x \mid y) + \bar{\mu}(B^*x \mid y) = ((\bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*)x \mid y).\end{aligned}$$

□

Pojam hermitski adjungiranog operatora možemo definirati i za linearno preslikavanja između dva unitarna konačno dimenzionalna prostora V i W sa skalarnim produktima $(\ \mid\ )_V$ i $(\ \mid\ )_W$:

1.8. Hermitski adjungirano preslikavanje. *Neka je $A\colon V \to W$ linearni operator. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A^*\colon W \to V$ takav da je*[1]

$$(Ax \mid y)_W = (x \mid A^*y)_V \quad \text{za sve} \quad x \in V,\ y \in W.$$

[1] Obično pišemo samo $(Ax \mid y) = (x \mid A^*y)$ podrazumijevajući da jednakost vrijedi za sve $x \in V$ i $y \in W$, te da je na lijevoj strani skalarni produkt vektora iz W, a na desnoj strani skalarni produkt vektora iz V.

Operator A^* zovemo *hermitski adjungiranim operatorom operatoru* A. Na primjer, za operator $A\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ zadan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 2 & 3 & -3i \end{pmatrix}$$

imamo hermitski adjungirani operator $A^*\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ zadan hermitski adjungiranom matricom

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2i & 3 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}.$$

Općenito za ortonormirane baze E u V i F u W matrica adjungiranog operatora A^* je transponirana i konjugirano kompleksna matrica operatora A, odnosno

$$(A^*)_{EF} = (A_{FE})^* = \overline{(A_{FE})^t}.$$

Sve do sada iskazane tvrdnje za hermitski adjungirani operator dokazujemo na isti način i u ovom općenitijem slučaju, samo što trebamo paziti na kojem unitarnom prostoru računamo skalarni produkt, jer imamo

$$V \xrightarrow{A} W,$$
$$V \xleftarrow[A^*]{} W.$$

1.9. Teorem. *Neka su* V *i* W *konačno dimenzionalni unitarni prostori i* $A\colon V \to W$ *linearni operator. Tada je*

$$V = \ker A \oplus \operatorname{im} A^*, \qquad W = \ker A^* \oplus \operatorname{im} A.$$

DOKAZ. Prvo uočimo da je

$$\begin{aligned} x \in \ker A &\Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow (Ax \mid y) = 0 \ \forall y \in W \\ &\Leftrightarrow (x \mid A^*y) = 0 \ \forall y \in W \Leftrightarrow (x \mid z) = 0 \ \forall z \in \operatorname{im} A^*. \end{aligned}$$

Znači da je $\ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp$, pa prva jednakost vrijedi zbog teorema o projekciji. Druga tvrdnja slijedi iz upravo dokazane prve tvrdnje za operator A^* i jednakosti $(A^*)^* = A$. □

1.10. Primjer. Za operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

imamo hermitski adjungirani operator $A^*\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadan transponiranom matricom

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tada je $\operatorname{im} A^*$ razapet stupcima matrice A^t, a rješavanjem homogenog sistema linearnih jednadžbi vidimo da je prostor svih rješenja $\ker A$ razapet vektorom $(-3, 2, 1)$.

1.11. Zadatak. Odredite potprostore $\ker A$ i $\operatorname{im} A^*$ za linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadano matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Hermitski operatori i kvadratne forme

2.1. Hermitske matrice. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ matrica. Kažemo da je A *hermitska matrica* ako je

$$A^* = A,$$

odnosno

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Primijetimo da su zbog $\alpha_{ii} = \overline{\alpha_{ii}}$ svi dijagonalni elementi hermitske matrice realni brojevi. Realne hermitske matrice zovemo i *simetričnim matricama.*

2.2. Zadatak. Provjerite da su matrice A i B hermitske,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2+2i & 1 \\ 2-2i & 3 & -3i \\ 1 & 3i & 5 \end{pmatrix}.$$

2.3. Hermitske matrice čine realan vektorski prostor. Za hermitske matrice A i B i realne brojeve λ vrijedi

$$(A+B)^* = A^* + B^* = A + B, \quad (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* = \lambda A,$$

pa je skup svih **kompleksnih** $n \times n$ hermitskih matrica **realan** vektorski prostor. No općenito produkt hermitskih matrica nije hermitska matrica, na primjer

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. Zadatak. Pokažite da jedinična matrica zajedno s Paulijevim matricama

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

čini bazu realnog 4-dimenzionalnog prostora hermitskih 2×2 matrica.

2.5. Zadatak. Pokažite da je skup realnih simetričnih $n \times n$ matrica realni $\binom{n+1}{2}$-dimenzionalni prostor, a da je skup kompleksnih hermitskih $n \times n$ matrica realni n^2-dimenzionalni prostor.

2.6. Hermitski operatori. Za linearan operatora $A\colon V \to V$ kažemo da je *hermitski operator* ako je

$$A^* = A.$$

Zbog veze (1.3) je operator A hermitski ako i samo ako mu je matrica A_B u ortonormiranoj bazi B hermitska matrica. Zbog definicije A^*, operator A je hermitski ako i samo ako je

$$(Ax \mid y) = (x \mid Ay) \quad \text{za sve} \quad x, y \in V. \tag{2.1}$$

2.7. Lema. *Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna ili kompleksna $n \times n$ hermitska matrica. Tada su svojstvene vrijednosti od A realni brojevi.*

Dokaz. Neka je A linearan operator

$$A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

zadan u kanonskoj ortonormiranoj bazi matricom A. S obzirom na kanonski skalarni produkt u $\mathbb{C}^n$ operator A je hermitski. Ako je λ svojstvena vrijednost matrice A, onda prema teoremu 11.2.4 postoji svojstveni vektor $v \neq 0$ u $\mathbb{C}^n$ za tu svojstvenu vrijednost. Tada je zbog (2.1)

$$\lambda(v \mid v) = (\lambda v \mid v) = (Av \mid v) = (v \mid Av) = (v \mid \lambda v) = \overline{\lambda}(v \mid v),$$

pa kraćenjem s $(v \mid v) \neq 0$ dobivamo da je $\lambda = \overline{\lambda}$, odnosno da je λ realan broj. $\square$

2.8. Teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora. *Neka je A hermitski operator na realnom ili kompleksnom unitarnom konačno dimenzionalnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A.*

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po $n = \dim V$. Ako je $\dim V = 1$ i e_1 normirani vektor koji razapinje V, onda je $Ae_1 = \lambda e_1$ i vrijedi tvrdnja teorema.

Pretpostavimo sada da za svaki hermitski operator A_1 na $(n-1)$-dimenzionalnom unitarnom prostoru W postoji ortonormirana baza svojstvenih vektora. Neka je $\dim V = n$ i

$$A\colon V \to V$$

hermitski operator. Prema teoremu 2.4 postoji svojstveni vektor $e_1 \neq 0$ u V za svojstvenu vrijednost λ_1, tj.

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1.$$

Smijemo pretpostaviti da je $||e_1|| = 1$. Neka je W potprostor okomit na e_1, tj.

$$W = \{v \in V \mid (v \mid e_1) = 0\}.$$

Prema teoremu o projekciji imamo

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus W, \quad \dim W = n - 1.$$

Za $w \in W$, tj. $(w \mid e_1) = 0$, imamo

$$(Aw \mid e_1) = (w \mid Ae_1) = (w \mid \lambda_1 e_1) = \lambda_1 (w \mid e_1) = 0.$$

Znači da je

$$AW \subset W,$$

pa imamo dobro definirani linearni operator

$$A_1 \colon W \to W, \qquad A_1 w = Aw \quad \text{za} \quad w \in W.$$

To je hermitski operator na W jer za $u, w \in W$ vrijedi

$$(A_1 u \mid w) = (Au \mid w) = (u \mid Aw) = (u \mid A_1 w).$$

Sada po pretpostavci indukcije postoji ortonormirana baza $e_2, \ldots, e_n$ svojstvenih vektora od A_1

$$A_1 e_i = Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 2, \ldots, n.$$

No onda je $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A. □

2.9. Primjer. Matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ima ortonormiranu bazu svojstvenih vektora $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ za koje vrijedi $Af_1 = 3f_1$ i $Af_2 = f_2$.

2.10. Zadatak. Nađite ortonormiranu bazu svojstvenih vektora za matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.11. Zadatak. Na realnom n-dimenzionalnom unitarnom prostoru za vektor a norme $||a|| = 1$ imamo definiranu tzv. *ortogonalnu refleksiju T_a s obzirom na hiperravninu $\langle a \rangle^\perp$*

$$T_a(x) = x - 2(x \mid a)a.$$

(i) Interpretirajte geometrijski djelovanje T_a u slučaju $n = 2, 3$. (ii) Dokažite da je T_a hermitski operator. (iii) Nađite neku ortonormiranu bazu svojstvenih vektora.

2.12. Kvadratne forme na $\mathbb{R}^n$. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ realna $n \times n$ matrica. Funkciju

$$Q_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto Q_A(x) = Q_A(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$$

zovemo *kvadratnom funkcijom* ili *kvadratnom formom*. Na primjer, funkcija

$$(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto Q(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$$

je kvadratna forma na $\mathbb{R}^4$.

2.13. Kvadratne forme i simetrične matrice. U kvadratnoj formi za $i < j$ imamo **dva** sumanda

$$\alpha_{ij}\xi_i\xi_j + \alpha_{ji}\xi_j\xi_i = (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})\xi_i\xi_j$$

koji daju **jedan** koeficijent uz kvadratni monom $\xi_i\xi_j$. Zbog toga je običaj da za A uzimamo simetričnu matricu kod koje je $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ tako da je

$$\alpha_{ij}\xi_i\xi_j + \alpha_{ji}\xi_j\xi_i = 2\alpha_{ij}\xi_i\xi_j.$$

Tako, na primjer, za kvadratnu formu

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2$$

na $\mathbb{R}^2$ uzimamo simetričnu matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a ne matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ili matricu} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zbog toga imamo bijekciju između simetričnih matrica i (koeficijenata) kvadratnih formi

$$A \longleftrightarrow Q_A.$$

2.14. Zadatak. Napišite simetričnu matricu kvadratne forme

$$Q(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2.$$

2.15. Zadatak. Skup kvadratnih funkcija na $\mathbb{R}^n$ je vektorski prostor s operacijama zbrajanja i množenja skalarom definiranim po točkama

$$(Q_1 + Q_2)(x) = Q_1(x) + Q_2(x), \quad (\lambda Q)(x) = \lambda Q(x),$$

a i skup simetričnih matrica je vektorski prostor. Dokažite da je bijekcija $A \longleftrightarrow Q_A$ izomorfizam tih vektorskih prostora.

2.16. Kvadratne forme i skalarni produkt. Očito je kvadrat norme za kanonski skalarni produkt

$$||x||^2 = (x \mid x) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$$

kvadratna forma na $\mathbb{R}^n$. Štoviše, za simetričnu $n \times n$ matricu $A = (\alpha_{ij})$ je

$$\begin{aligned}(Ax \mid x) &= (A(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j) \mid \sum_{k=1}^n \xi_k e_k) = (\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j e_i \mid \sum_{k=1}^n \xi_k e_k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \alpha_{ij}\xi_j\xi_k\,(e_i \mid e_k) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j\xi_i.\end{aligned}$$

Znači da kvadratnu formu Q_A zadanu simetričnom matricom A možemo zapisati pomoću kanonskog skalarnog produkta na $\mathbb{R}^n$ formulom

$$Q_A(x) = (Ax \mid x).$$

2.17. Dijagonalizacija kvadratne forme. Simetrična matrica A se dijagonalizira u nekoj ortonormiranoj bazi $f_1, \dots, f_n$ od $\mathbb{R}^n$ tako da je

$$Af_1 = \lambda_1 f_1, \quad \dots, \quad Af_n = \lambda_n f_n.$$

Za vektor $x = \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_n f_n$ zapisan u toj bazi imamo

$$\begin{aligned} Q_A(x) &= (Ax \mid x) \\ &= (A(\eta_1 f_1 + \cdots + \eta_n f_n) \mid \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_n f_n) \\ &= (\eta_1 \lambda_1 f_1 + \cdots + \eta_n \lambda_n f_n) \mid \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_n f_n) \\ &= \lambda_1 \eta_1^2 + \cdots + \lambda_n \eta_n^2, \end{aligned}$$

pa kažemo da smo kvadratnu formu dijagonalizirali u ortonormiranoj bazi[2] prostora $\mathbb{R}^n$.

2.18. Primjer. Za matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ iz primjera 2.9 imamo kvadratnu formu

$$Q_A(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2.$$

Matrica A ima ortonormiranu bazu svojstvenih vektora

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

za koje vrijedi $Af_1 = 3f_1$ i $Af_2 = f_2$, pa se Q_A u toj bazi dijagonalizira

$$Q_A(x) = 3\eta_1^2 + \eta_2^2.$$

Budući da su koordinate $x_F = (\eta_1, \eta_2)$ vektora $x = (\xi_1, \xi_2)$ u bazi $F = (f_1, f_2)$ dane formulom $x_F = F^{-1}x$, tj.

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2), \quad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2),$$

za kvadratnu formu imamo dijagonalni oblik

$$Q_A(x) = \frac{3}{2}(\xi_1 + \xi_2)^2 + \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)^2.$$

2.19. Zadatak. Dijagonalizirajte u ortonormiranoj bazi kvadratnu formu

$$Q_A(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2.$$

---

[2] Valja reći da kvadratnu formu možemo dijagonalizirati i u drugim bazama.

2.20. Glavne osi elipse u $\mathbb{R}^2$. Neka je A realna simetrična 2×2 matrica i pretpostavimo da su joj obje svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 pozitivne. Tada postoji ortonormirana baza f_1 i f_2 od $\mathbb{R}^2$ u kojoj se kvadratna forma Q_A dijagonalizira, tj.

$$Q(\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2.$$

Budući da je po pretpostavci $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, skup točaka

$$\{x = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 \in \mathbb{R}^2 \mid Q_A(x) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 = \lambda_1 \lambda_2\}$$

je elipsa s glavnim osima u smjeru vektora f_1 i f_2. Jednadžbu te elipse možemo zapisati u obliku

$$\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 = 1.$$

2.21. Primjer. Iz prethodnog primjera 2.18 vidimo da je skup točaka $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ zadan kvadratnom jednadžbom

$$2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 = 3$$

elipsa s glavnim osima određenim jednadžbama $\xi_1 = -\xi_2$ i $\xi_1 = \xi_2$.

2.22. Zadatak. Dijagonalizirajte u ortonormiranoj bazi kvadratnu formu

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + \xi_2^2$$

i pokažite da su skupovi u $\mathbb{R}^2$ zadani kvadratnim jednadžbama $Q(x) = 3$ i $Q(x) = -3$ hiperbole.

3. Unitarni operatori

3.1. Unitarne i ortogonalne matrice. Za kompleksnu $n \times n$ matricu $A = (a_1, \dots, a_n)$ kažemo da je unitarna ako su vektori $a_1, \dots, a_n$ ortonormirana baza u $\mathbb{C}^n$. Budući da je kanonski skalarni produkt u $\mathbb{C}^n$ dan formulom

$$(a \mid b) = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n \overline{\beta_n}\,,$$

to uvjet $(a_i \mid a_j) = \delta_{ij}$ ortonormiranosti vektora možemo zapisati kao množenje matrica

$$A^* A = I.$$

No za kvadratne matrice to je ekvivalentno uvjetu

$$AA^* = I$$

ili uvjetu $A^* = A^{-1}$. Realne unitarne matrice zovemo i *ortogonalnim matricama.*

3.2. Primjeri unitarnih matrica.

$$J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3. Zadatak. Dokažite da su sve ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$ oblika

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta}\zeta \\ \beta & \bar{\alpha}\zeta \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,\ |\zeta| = 1,\ \alpha, \beta, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Primijetite da unitarna matrica g kao gore ima determinantu $\det g = \zeta$.

3.4. Unitarni i ortogonalni operatori. Za linearan operatora U na kompleksnom ili realnom unitarnom konačno dimenzionalnom prostoru V kažemo da je *unitaran operator* ako čuva skalarni produkt, tj. ako je

$$(Ux \mid Uy) = (x \mid y) \quad \text{za sve } x, y \in V.$$

Ovaj uvjet je ekvivalentan

$$(U^*Ux \mid y) = (x \mid y) \quad \text{za sve } x, y \in V,$$

odnosno

$$U^*U = I.$$

Kao i u slučaju matrica, to je ekvivalentno uvjetu $UU^* = I$ ili uvjetu $U^* = U^{-1}$. Odavle očito slijedi da je operator U unitaran ako i samo ako u nekoj/svakoj ortonormiranoj bazi ima unitarnu matricu. U slučaju realnog unitarnog prostora unitarne operatore zovemo i *ortogonalnim operatorima.*

3.5. Teorem. *Za linearan operatora U na kompleksnom ili realnom unitarnom n-dimenzionalnom prostoru V sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*
(i) U čuva normu, tj. $||Ux|| = ||x||$ za svaki $x \in V$.
(ii) U čuva skalarni produkt, tj. $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ za sve $x, y \in V$.
(iii) U čuva ortonormirane baze, tj.

$$(Ue_i \mid Ue_j) = \delta_{ij} \quad \textit{ako je} \quad (e_i \mid e_j) = \delta_{ij} \quad \textit{za} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

DOKAZ. (i) povlači (ii). Ako je V realan unitaran prostor, onda nam formula za polarizaciju norme daje

$$4(x \mid y) = ||x + y||^2 - ||x - y||^2.$$

Sada iz pretpostavke da U čuva normu slijedi

$$\begin{aligned} 4(Ux \mid Uy) &= ||Ux + Uy)||^2 - ||Ux - Uy)||^2 \\ &= ||U(x + y)||^2 - ||U(x - y)||^2 \\ &= ||x + y||^2 - ||x - y||^2 \\ &= 4(x \mid y). \end{aligned}$$

Na sličan način dokazujemo i tvrdnju za kompleksan prostor.
Očito (ii) povlači (iii).

(iii) povlači (i). Neka je $e_1, \dots, e_n$ ortonormirana baza u V. Tada je po pretpostavci i $Ue_1, \dots, Ue_n$ ortonormirana baza u V i za vektor x imamo

$$\begin{aligned} ||Ux||^2 &= (Ux \mid Ux) = (U\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \mid U\sum_{j=1}^n \xi_j e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j \, (Ue_i \mid Ue_j) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j \, (e_i \mid e_j) = ||x||^2. \end{aligned}$$

□

3.6. Lema. *Svojstvene vrijednosti unitarnog operatora su kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti* 1.

DOKAZ. Neka je λ svojstvena vrijednost unitarnog operatora U. Prema teoremu 11.2.4 postoji svojstveni vektor $v \neq 0$ za tu svojstvenu vrijednost,

$$Uv = \lambda v.$$

Tada iz definicije slijedi

$$(v \mid v) = (Uv \mid Uv) = (\lambda v \mid \lambda v) = \lambda\overline{\lambda}(v \mid v),$$

pa kraćenjem s $(v \mid v) \neq 0$ dobivamo da je $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$. □

3.7. Zadatak. Na n-dimenzionalnom unitarnom prostoru za vektor a norme $||a|| = 1$ imamo definiranu *unitarnu refleksiju* T_a

$$T_a(x) = x - 2(x \mid a)a.$$

(i) Dokažite da je T_a unitarni operator i nađite mu spektar.

3.8. Grupe unitarnih i ortogonalnih matrica. Za unitarne $n \times n$ matrice vrijede sljedeća svojstva:

(i) produkt unitarnih matrica je opet unitarna matrica jer

$$(U_1U_2)^*(U_1U_2) = U_2^*U_1^*U_1U_2 = U_2^*IU_2 = U_2^*U_2 = I,$$

(ii) jedinična matrica I je unitarna matrica jer je $I^* = I$ i

(iii) inverz unitarne matrice $U^{-1} = U^*$ je unitarna matrica jer je

$$(U^{-1})^*U^{-1} = (U^*)^*U^* = UU^* = I.$$

Drugim riječima, skup $U(n)$ svih unitarnih kompleksnih $n \times n$ matrica je grupa, a isto tako je grupa i skup $O(n)$ svih ortogonalnih realnih $n \times n$ matrica. Iz Binet-Cauchyjevog teorema

$$\det(U_1U_2) = \det U_1 \det U_2$$

slijedi da je skup $SU(n)$ svih unitarnih $n \times n$ matrica determinante 1 *grupa, a isto tako je grupa i skup $SO(n)$ svih ortogonalnih realnih $n \times n$ matrica determinante* 1.

3.9. Grupe $O(1)$ i $SO(1)$. Skalarni produkt na realnom 1-dimenzionalnom prostoru je množenje brojev $v \cdot w$, a linearan operator λ čuva skalarni produkt

$$\lambda v \cdot \lambda w = \lambda^2 (v \cdot w)$$

ako i samo ako je $\lambda^2 = 1$. Znači da imamo grupe

$$O(1) = \{1, -1\}, \qquad SO(1) = \{1\}.$$

3.10. Grupe $O(2)$ i $SO(2)$. Već smo vidjeli da su sve ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$, ili, što je isto, sve ortogonalne 2×2 matrice oblika

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Budući da je $\det\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right) = 1$ i $\det\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{smallmatrix}\right) = -1$, to je

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geometrijski elemente grupe $SO(2)$ interpretiramo kao rotacije u euklidskoj ravnini za kut φ. S druge strane operatore

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

geometrijski interpretiramo (nacrtajte sliku!) kao refleksije u ravnini u odnosu na os razapetu vektorom $(\cos\frac{1}{2}\varphi, \sin\frac{1}{2}\varphi)$. Označimo li s T refleksiju u $\mathbb{R}^2$ u odnosu na x-os, tj.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onda je

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

pa imamo

$$O(2) = SO(2) \cup T \cdot SO(2) = SO(2) \cup \{Tg \mid g \in SO(2)\}.$$

Koristeći adicione teoreme za funkcije sinus i kosinus dobivamo da je svaka rotacija u $\mathbb{R}^2$ produkt dvije refleksije:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\varphi & \sin\frac{1}{2}\varphi \\ \sin\frac{1}{2}\varphi & -\cos\frac{1}{2}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\varphi & -\sin\frac{1}{2}\varphi \\ -\sin\frac{1}{2}\varphi & -\cos\frac{1}{2}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

3.11. Determinanta ortogonalne matrice. *Za realnu ortogonalnu matricu g vrijedi*

$$\det g \in \{1, -1\}.$$

Naime, za realnu ortogonalnu matricu g po definiciji vrijedi $gg^t = I$, pa iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi

$$(\det g)^2 = \det g \det g^t = \det(gg^t) = \det I = 1.$$

3.12. Grupe $O(3)$ i $SO(3)$. Označimo s T ortogonalnu refleksiju u $\mathbb{R}^3$ s obzirom na xy-ravninu, tj.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i primijetimo da je T ortogonalna matrica, $T^2 = I$ i $\det T = -1$. Ako je ortogonalna matricu g ima determinantu -1, onda je prema Binet-Cauchyjevom teoremu $\det(Tg) = 1$, tj. $h = Tg \in SO(3)$. No onda je $g = T^2 g = Th \in T \cdot SO(3)$. Znači da je

$$O(3) = SO(3) \cup T \cdot SO(3).$$

Teorem *Svaki element $g \in SO(3)$ je rotacija u $\mathbb{R}^3$ oko neke osi $\langle v \rangle$ za neki kut φ.*

Dokaz. Teorem dokazujemo u tri koraka.
(1) *Matrica g ima svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$.* Neka je

$$P_g(x) = \det(xI - g) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

svojstveni polinom matrice g i $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ svojstvene vrijednosti. Znamo da je $\det g = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Polinom $P_g(x)$ je polinom s realnim koeficijentima neparnog stupnja 3, pa mora imati bar jednu **realnu** nultočku, recimo λ_1. Budući da za svojstvenu vrijednost λ unitarnog operatora g mora biti $|\lambda| = 1$, to je $\lambda_1 = 1$ ili $\lambda_1 = -1$. Ako su i druge dvije nultočke λ_2 i λ_3 svojstvenog polinoma $P_g(x)$ realne, one su i one jednake 1 ili -1, a zbog uvjeta $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ bar je jedna svojstvena vrijednost jednaka 1. Ako pak druge dvije nultočke λ_2 i λ_3 polinoma $P_g(x)$ s realnim koeficijentima nisu realne, one su međusobno konjugirano kompleksne, tj. $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, pa uvjet $1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_2} = \lambda_1|\lambda_2|^2$ daje $\lambda_1 > 0$, tj. $\lambda_1 = 1$.

(2) *Postoji os $\langle v \rangle$ koju operator g ostavlja fiksnom po točkama.* Naime, za svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$ postoji svojstveni vektor v tako da je

$$gv = v,$$

pa je onda i $g(\mu v) = \mu v$ za svaki $\mu v \in \langle v \rangle$. Smijemo pretpostaviti da je $||v|| = 1$.

(3) *Operator g čuva ravninu $\langle v \rangle^\perp$ i u toj ravnini rotira vektore za neki kut φ.* Naime,

$$\langle v \rangle = \{\mu v \mid \mu \in \mathbb{R}\} \quad \text{i} \quad \langle v \rangle^\perp = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid (a \mid v) = 0\},$$

pa za $(a \mid v) = 0$ imamo $(ga \mid v) = (ga \mid gv) = (a \mid v) = 0$, tj. $a \in \langle v \rangle^\perp$ povlači $ga \in \langle v \rangle^\perp$. Znači da g čuva ravninu $\langle v \rangle^\perp$. Označimo s g_1 restrikciju preslikavanja g na tu ravninu,

$$g_1 \colon \langle v \rangle^\perp \to \langle v \rangle^\perp, \quad g_1 \colon a \mapsto ga.$$

Zbog teorema o projekciji imamo

$$\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp,$$

pa za vektor $x \in \mathbb{R}^3$ imamo jedinstveni rastav

$$x = \mu v + a, \quad ||x||^2 = ||\mu v||^2 + ||a||^2.$$

Budući da je $gv = v$, da g čuva ravninu $\langle v \rangle^\perp$ i da g čuva normu, imamo rastav

$$gx = \mu v + ga, \quad ||x||^2 = ||gx||^2 = ||\mu v||^2 + ||ga||^2,$$

odakle slijedi da g_1 čuva normu vektora $||ga||^2 = ||a||^2$ u ravnini $\langle v \rangle^\perp$. Znači da je g_1 unitaran operator na ravnini $\langle v \rangle^\perp$. Odaberemo u toj ravnini neku ortonormiranu bazu $F = (f_1, f_2)$. Tada u toj bazi F operator g_1 ima ortogonalnu matricu

$$(g_1)_F \in O(2).$$

S druge strane, u ortonormiranoj bazi $B = (v, f_1, f_2)$ od $\mathbb{R}^3$ operator g ima blok-matricu

$$g_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (g_1)_F \end{pmatrix}, \quad \det g_B = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (g_1)_F \end{pmatrix} = 1 \cdot \det(g_1)_F.$$

Odavle $\det g = \det g_B = 1$ povlači $\det(g_1)_F = 1$, odnosno

$$(g_1)_F \in SO(2).$$

No to nam i znači tvrdnja da je g_1 rotacija u ravnini $\langle v \rangle^\perp$ za neki kut φ. □

3.13. Primjer. Neka je g_1 rotacija oko z-osi za kut $\pi/2$ i g_2 rotacija oko x-osi za kut $\pi/2$. Tada je i $g = g_1 g_2$ rotacija oko neke osi $\langle v \rangle$ za neki kut φ. Da ih odredimo prvo izračunamo

$$g = g_1 g_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogeni sistem jednadžbi

$$gv = v$$

ima očigledno rješenje $v = (1, 1, 1)$, i to je vektor koji određuje os rotacije g. Da bismo odredili kut rotacije φ odaberimo neki vektor $a \perp v$ i zavrtimo ga u vektor $b = ga$. Budući da g čuva ravninu Σ okomitu na vektor v, to su oba vektora u ravnini Σ i kut φ između njih je

$$\cos \varphi = \frac{(a \mid b)}{||a|| \cdot ||b||}.$$

Konkretno možemo izabrati $a = (1, -1, 0)$. Tada je $b = ga = (0, 1, -1)$ i

$$\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2},$$

pa je kut rotacije $\varphi = 2\pi/3$.

3.14. Zadatak. Neka je g_1 rotacija oko z-osi za kut $\pi/2$ i g_2 rotacija oko x-osi za kut $\pi/2$. Nađite os i kut rotacije $g = g_2 g_1$.

3.15. Zadatak. Dokažite da je svaka rotacija $g \in SO(3)$ produkt dviju refleksuja u $\mathbb{R}^3$.

3.16. Zadatak. Za permutaciju $\sigma \in S_3$ je matrica permutacije T_σ ortogonalna matrica, tj. $T_\sigma \in O(3)$. Za svaku matricu permutacije $T_\sigma \in SO(3)$ odredite os i kut rotacije.

3.17. Grupe $U(1)$ i $SU(1)$. Skalarni produkt na kompleksnom 1-dimenzionalnom prostoru je množenje brojev $v{\cdot}\overline{w}$, a linearan operator λ čuva skalarni produkt

$$\lambda v \cdot \overline{\lambda w} = \lambda\overline{\lambda}(v \cdot \overline{w})$$

ako i samo ako je $|\lambda|^2 = 1$. Znači da imamo grupe

$$U(1) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\} = \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}, \qquad SU(1) = \{1\}.$$

Odavle prepoznajemo izomorfne grupe

$$U(1) \cong SO(2).$$

3.18. Grupe $U(2)$ i $SU(2)$. Već smo vidjeli da su sve ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$, ili, što je isto, sve unitarne 2×2 matrice oblika

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta}\zeta \\ \beta & \bar{\alpha}\zeta \end{pmatrix} \;\middle|\; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,\ |\zeta| = 1,\ \alpha, \beta, \zeta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Odavle slijedi da je

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Grupu $SU(2)$ smo susreli ranije kao grupu kvaterniona norme 1.

3.19. Grupe $SU(2)$ i $SO(3)$. Podsjetimo se da je vektorski dio kvaterniona 3-dimenzionalni realni vektorski prostor

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha_1 & \alpha_2 + i\alpha_3 \\ -\alpha_2 + i\alpha_3 & -i\alpha_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid K^* = -K, \operatorname{tr} K = 0\} \end{aligned}$$

i da je

$$\det K = \det \begin{pmatrix} i\alpha_1 & \alpha_2 + i\alpha_3 \\ -\alpha_2 + i\alpha_3 & -i\alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = ||K||^2.$$

Ako je $g \in SU(2)$, onda je za $K \in \mathbb{V}$

$$(gKg^*)^* = g^{**}K^*g^* = -gKg^* \quad \text{i} \quad \operatorname{tr} gKg^* = \operatorname{tr} gKg^{-1} = \operatorname{tr} K = 0,$$

pa je i $gKg^* \in \mathbb{V}$. Znači da imamo linearno preslikavanje preslikavanje na 3-dimenzionalni realni unitarnom prostoru

$$R_g \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \quad K \mapsto R_g(K) = gKg^*.$$

Zbog Binet-Cauchyjevog terema imamo

$$||R_g(K)||^2 = ||gKg^*||^2 = \det gKg^* = \det gK \det g^{-1} = \det K = ||K||^2.$$

To znači da R_g čuva normu, tj. da je

$$R_g \in O(3).$$

Može se pokazati da je R_g rotacija, tj. $R_g \in SO(3)$, da se svaka rotacija u $\mathbb{V}$ može dobiti na taj način i da je

$$R_g = R_h$$

ako i samo ako je $h = \pm g$.

3.20. Zadatak. Dokažite da je preslikavanje

$$R\colon SU(2) \to SO(3), \quad R\colon g \mapsto R_g$$

homomorfizam grupa, tj. da za sve $g_1, g_2 \in SU(2)$ vrijedi

$$R_{g_1 g_2} = R_{g_1} R_{g_2}.$$

3.21. Zadatak. Odredite matricu rotacije

$$K \mapsto e^{i\varphi\sigma_z} K e^{-i\varphi\sigma_z}$$

u ortonormiranoj bazi J_x, J_y, J_z prostora $\mathbb{V}$. Odredite os i kut te rotacije.