Linearna algebra

Mirko Primc

Sadržaj

Dio 1. Linearna algebra 1 5

Poglavlje 1. Rješavanje sistema linearnih jednadžbi 7
1. Sistemi linearnih jednadžbi 7
2. Trokutasti sistemi jednadžbi 9
3. Gaussova metoda eliminacije 14
4. Homogeni $m \times p$ sistemi za $m < p$ 19

Poglavlje 2. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ 21
1. Vektori u $\mathbb{R}^n$ i matrice tipa $n \times k$ 22
2. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ 26
3. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^n$ 30
4. Elementarne transformacije 36
5. Linearne kombinacije i sistemi jednadžbi 44
6. Linearne kombinacije i linearna preslikavanja 47
7. Linearna ljuska vektora u $\mathbb{R}^n$ 51
8. Potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ 57

Poglavlje 3. Baza vektorskog prostora 61
1. Kanonska baza u $\mathbb{R}^n$ 61
2. Matrica linearnog preslikavanja 63
3. Baze u $\mathbb{R}^n$ 66
4. Linearna nezavisnost vektora u $\mathbb{R}^n$ 72
5. Konačno dimenzionalni vektorski prostori 78
6. Nadopunjavanje nezavisnog skupa do baze 82
7. Koordinatizacija 86

Poglavlje 4. Egzistencija i jedinstvenost rješenja sistema jednadžbi 89
1. Rang matrice 89
2. Egzistencija rješenja sistema jednadžbi i rang matrice 91
3. Defekt matrice 92
4. Jedinstvenost rješenja sistema jednadžbi i defekt matrice 96
5. Teorem o rangu i defektu 98
6. Kanonski produkt na $\mathbb{R}^n$ i dualne baze 102

Poglavlje 5. Skalarni produkt 109
1. Norma i skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^n$ 109
2. Skalarni produkt vektora u $\mathbb{C}^n$ 113

3. Unitarni prostori 115
4. Ortonormirani skupovi vektora 120
5. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije 122
6. Metoda najmanjih kvadrata 126
7. Teorem o projekciji 130

Poglavlje 6. Površina paralelograma i volumen paralelepipeda 133
1. Površina paralelograma 133
2. Volumen paralelepipeda 137
3. Osnovni teorem o 3×3 determinanti 141
4. Laplaceov razvoj 3×3 determinante 143
5. Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$ 143

Dio 2. Linearna algebra 2 151

Dio 1

Linearna algebra 1

POGLAVLJE 1

Rješavanje sistema linearnih jednadžbi

U ovom je poglavlju opisan postupak rješavanja proizvoljnog sistema linearnih algebarskih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacija nepoznanica. Dokazano je da homogeni sistemi s više nepoznanica nego li jednadžbi uvijek imaju netrivijalno rješenje.

1. Sistemi linearnih jednadžbi

1.1. Sistem linearnih jednadžbi. Neka je zadano $m \times n$ realnih brojeva α_{ij} za $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$ i još m realnih brojeva $\beta_1, \dots, \beta_m$. *Sistem* ili *sustav jednadžbi*

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= \beta_1 , \\
\alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2 , \\
&\dots \\
\alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= \beta_m
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

je problem kod kojeg treba naći **sve** n-torke realnih brojeva $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ takve da vrijedi relacija (1.1). Obično govorimo da su $\xi_1, \dots, \xi_n$ *nepoznanice sistema*[1], premda je u stvari nepoznata n-torka brojeva $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Ponekad sistem od m jednadžbi s n nepoznanica zovemo kraće *sistemom tipa* $m \times n$.

1.2. Pitanje. Da li je sistem jednadžbi $\xi_1 - \xi_2 = 1$, $\xi_2 - \xi_3 = 1$, $\xi_3 - \xi_4 = 1$, $\xi_4 - \xi_5 = 1$ tipa 5×4? DA NE

1.3. Primjer. Sustav jednadžbi

$$
\begin{aligned}
3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 5, \\
-\xi_1 + \xi_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

[1]Nepoznanice sistema se vrlo često pišu kao $x_1, \dots, x_n$ i sistem se zapisuje kao

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 , \\
&\dots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m ,
\end{aligned}
$$

no mi ćemo realne brojeve obično označavati malim grčkim slovima, kao što smo u (1.1) koristili alfa α, beta β i ksi ξ s jednim ili dva indeksa.

ima dvije jednadžbe s tri nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3. Očito trojke $x = (1, 3, 1)$ i $x = (2, 1, 2)$ zadovoljavaju uvjet (1.2). No da bismo riješili sustav jednadžbi (1.2) trebamo naći **sve** trojke $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ tako da vrijedi (1.2).

Dok sustav jednadžbi (1.2) ima barem dva rješenja, sustav

$$\begin{aligned} 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 5, \\ 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 6 \end{aligned} \tag{1.3}$$

očito **nema ni jedno rješenje** jer ne postoji trojka brojeva $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ takva da bi jedan te isti izraz jednom bio jednak 5, a drugi put 6. No ovaj smo put sustav **riješili**: skup svih rješenja sustava (1.3) je prazan skup!

1.4. Homogeni sistemi jednadžbi. Kažemo da je sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= 0\,, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= 0\,, \\ \ldots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

homogen sistem. Uočimo da je $x = (0, \ldots, 0)$ rješenje homogenog sistema, zovemo ga *trivijalnim rješenjem.* Rješenje $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ homogenog sistema zovemo *netrivijalnim* ako je $\xi_i \neq 0$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1.5. Primjer. $(0, 0, 0, 0)$ je trivijalno rješenje homogene jednadžbe

$$3\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + 0\xi_4 = 0,$$

a $(1, 3, 0, 0)$ je jedno netrivijalno rješenje.

1.6. Ekvivalentni sistemi. Za dva sistema jednadžbi od n nepoznanica kažemo da su *ekvivalentni sistemi* ako imaju iste skupove rješenja. Na primjer, ako drugu jednadžbu $\xi_1 = \xi_3$ sistema (1.2) uvrstimo u prvu, dobivamo ekvivalentni sistem

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + \xi_2 &= 5, \\ -\xi_1 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

1.7. Matrica sistema. Brojeve α_{ij} zovemo *koeficijentima sistema*, a zapisane u pravokutnom obliku

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

zovemo *matricom sistema* (1.1). Obično kažemo da je matrica sistema tipa $m \times n$. Brojeve $\beta_1, \ldots, \beta_m$ zovemo *slobodnim članovima sistema.* Koeficijente sistema i desnu stranu obično zapisujemo u pravokutnom obliku, kako se i pojavljuju u zapisu jednadžbi,

$$(A,b)=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

i zovemo ih *proširenom matricom sistema* i *desnom stranom sistema* (1.1). Često sistem kraće zapisujemo kao

$$Ax=b,$$

misleći pritom da je A matrica sistema, $x=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ zapisan kao stupac

$$x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

i b desna strana sistema. Matricu sistema u kojoj su svi koeficijenti sistema jednaki nuli zapisujemo kratko kao $A=0$, a slično i za desnu stranu homogenog sistema pišemo kratko $b=0$. Za matricu $A=0$ kažemo da je *nul-matrica.* Ako su svi koeficijenti nekog retka matrice jednaki nuli, onda ćemo reći da je to *nul-redak.* Isto tako za stupac kojemu su svi koeficijenti nula kažemo da je *nul-stupac.*

1.8. Primjer. Matrica, proširena matrica i desna strana sistema (1.2) su

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad (A,b)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 5\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}.$$

1.9. Zadatak. Napišite proširenu matricu sustava jednadžbi

$$\xi_1+\xi_2=1, \quad \xi_2+\xi_3=1, \quad \xi_3+\xi_4=1, \quad \xi_4+\xi_1=1.$$

1.10. Zadatak. Napišite sustav jednadžbi kojemu je proširena matrica

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 5\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Da li je to sustav tipa 4×4?

2. Trokutasti sistemi jednadžbi

Neke posebne tipove sistema linearnih jednadžbi lako je riješiti, a posebno su važni trokutasti i stepenasti sistemi.

2.1. Jedna jednadžba s jednom nepoznanicom. Najjednostavniji je 1×1 "sistem"

$$\alpha\xi = \beta$$

od jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Ako je $\alpha \neq 0$, onda imamo jedinstveno rješenje $\xi = -\beta/\alpha$. Ako je $\alpha = 0$, onda za svaki ξ imamo $\alpha\xi = 0$ i svaki broj ξ je rješenje u slučaju $\beta = 0$, a ni jedan broj ξ nije rješenje u slučaju $\beta \neq 0$.

2.2. Zadatak. Riješite jednadžbe
a) $1\xi = 1$, b) $1\xi = 0$, c) $0\xi = 1$ i d) $0\xi = 0$.

2.3. Sistem jednadžbi s jednom nepoznanicom. Kao i u prethodnom slučaju, lako je riješiti $m \times 1$ sistem od m jednadžbi

$$\alpha_i \xi = \beta_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

s jednom nepoznanicom ξ. Na primjer, od tri sistema tipa 2×1

$$\begin{array}{lll} 0\xi = 0, & \quad 0\xi = 0, & \quad 0\xi = 2, \\ 2\xi = 2, & \quad 0\xi = 0, & \quad 2\xi = 0, \end{array}$$

prvi ima jedinstveno rješenje $\xi = 1$, drugi ima beskonačno rješenja $\xi \in \mathbb{R}$, a treći nema ni jedno rješenje.

2.4. Jedna jednadžba s više nepoznanica. Promatrajmo $1 \times n$ "sistem" od jedne jednadžbe s n nepoznanica

$$\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_{j-1}\xi_{j-1} + \alpha_j\xi_j + \alpha_{j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_n\xi_n = \beta$$

i pretpostavimo da je $\alpha_j \neq 0$. Tada *rješavanjem po j-toj nepoznanici* dobivamo

$$\xi_j = \frac{1}{\alpha_j}\left(\beta - (\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_{j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_n\xi_n)\right),$$

pa za svaki izbor brojeva $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1} \dots, \xi_n$ možemo odrediti ξ_j da jednadžba bude zadovoljena. Tako dobivamo sva rješenja jednadžbe.

2.5. Primjer. Homogenu jednadžbu

$$3\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + 0\xi_4 = 0$$

možemo rješavati po prvoj nepoznanici ξ_1 tako da po volji biramo vrijednosti za ξ_2, ξ_3, ξ_4 i onda izračunamo

$$\xi_1 = (\xi_2 - \xi_3)/3.$$

Znači da je skup svih rješenja jednadžbe jednak

$$\{(\tfrac{1}{3}(\xi_2 - \xi_3), \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Jednadžbu možemo rješavati i po drugoj nepoznanici ξ_2 tako da po volji biramo vrijednosti za ξ_1, ξ_3, ξ_4 i onda izračunamo

$$\xi_2 = 3\xi_1 + \xi_3.$$

Tako opet dobijemo sva rješenja, samo je sada skup svih rješenja jednadžbe drugačije zapisan:

$$\{(\xi_1, 3\xi_1 + \xi_3, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Jasno je da jednadžbu ne možemo riješiti po nepoznanici ξ_4.

2.6. Zadatak. Riješite jednadžbu $\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 1$.

2.7. Matrica sistema je nul-matrica. Sistem

$$0x = b$$

nema rješenja kada sistem nije homogen, a svaki n-torka $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ realnih brojeva jest rješenje kad je $b = 0$. Na primjer, sistem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nema rješenja.

2.8. Trokutaste matrice. Kažemo da je $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$ *donja trokutasta matrica* ako je $\alpha_{ij} = 0$ za $i < j$. Na primjer, svaka od matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je donja trokutasta jer je za svaku $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$. Kažemo da je $n \times n$ matrica $A = (\alpha_{ij})$ *gornja trokutasta matrica* ako je $\alpha_{ij} = 0$ za $i > j$. Tako imamo 4×4 gornje trokutaste matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

2.9. Sistemi jednadžbi s trokutastom matricom sistema. Sisteme jednadžbi kojima su matrice sistema gornje trokutaste zovemo *trokutastim sistemima*. Rješavanje $n \times n$ trokutastog sistema svodi se, u n koraka, na rješavanje jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Kada je, na primjer, matrica sistema gornja trokutasta kojoj su dijagonalni elementi različiti od nule, tj.

$$\alpha_{11} \neq 0, \quad \alpha_{22} \neq 0, \quad \dots, \quad \alpha_{nn} \neq 0,$$

rješavanje sistema

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{1,n}\xi_n &= \beta_1\,, \\ \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2\,, \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1,n-1}\xi_{n-1} + \alpha_{n-1,n}\xi_n &= \beta_{n-1}\,, \\ \alpha_{nn}\xi_n &= \beta_n \end{aligned}$$

započinjemo rješavanjem zadnje jednadžbe

$$\alpha_{nn}\xi_n = \beta_n.$$

Ta jednadžba ima jedinstveno rješenja ξ_n koje uvrštavamo u predzadnju jednadžbu i rješavamo jednadžbu s nepoznanicom ξ_{n-1}

$$\alpha_{n-1,n-1}\xi_{n-1} = -\alpha_{n-1,n}\xi_n + \beta_{n-1}.$$

Nastavljajući taj postupak do prve jednadžbe dobivamo jedinstveno rješenje sistema. Na primjer, rješavanje sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

započinjemo rješavanjem treće jednadžbe

$$2\xi_3 = 2.$$

Jedinstveno rješenje $\xi_3 = 1$ uvrštavamo u drugu jednadžbu i dobivamo

$$2\xi_2 = \xi_3 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Jedinstveno rješenje $\xi_2 = 2$ uvrštavamo u prvu jednadžbu i dobivamo jednadžbu

$$\xi_1 = \xi_2 - 2\xi_3 - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$$

koja ima jedinstveno rješenje $\xi_1 = -1$. Sada zaključujemo da sistem ima jedinstveno rješenje $x = (-1, 2, 1)$.

Kod gornje trokutastog sistema određivali smo redom što su vrijednosti nepoznanica ξ_n, ξ_{n-1}, $\ldots$, ξ_1. Kod trokutastih sistema kojima su neki dijagonalni elementi nula može se desiti da tek u kasnijoj fazi rješavanja ustanovimo da sistem nema rješenja ili da neke nepoznanice nemaju proizvoljne vrijednosti. Na primjer, kod trokutastih sistema za $\beta = 0$ i $\beta = 1$

$$\begin{aligned} 0\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= -1, \\ 0\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 &= \beta, \\ \xi_3 + \xi_4 &= 2, \\ 2\xi_4 &= 2, \end{aligned}$$

iz zadnje jednadžbe jednoznačno dobivamo $\xi_4 = 1$, a onda iz predzadnje $\xi_3 = 1$. Sada u slučaju $\beta = 1$ vidimo da sistem nema rješenja, a u slučaju $\beta = 0$ je ξ_2 proizvoljan, no onda iz prve jednadžbe zaključujemo $\xi_2 = 1$

i ξ_1 proizvoljan. Takav nedostatak nema stepenasti sistem kojeg u našem primjeru dobijemo oduzimanjem druge jednadžbe od treće

$$\begin{aligned} -\xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= -1, \\ \xi_3 - \xi_4 &= \beta, \\ 2\xi_4 &= 2 - \beta, \\ 2\xi_4 &= 2 \end{aligned}$$

i onda oduzimanjem treće jednadžbe od četvrte

$$\begin{aligned} -\xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= -1, \\ \xi_3 - \xi_4 &= \beta, \\ 2\xi_4 &= 2 - \beta, \\ 0 &= \beta. \end{aligned}$$

Zadnja jednadžba tog sistema u stvari glasi

$$0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3 + 0\xi_4 = \beta,$$

pa za $\beta = 1$ jednadžba (i sistem) nema rješenja, a za $\beta = 0$ to nije nikakav uvjet na nepoznanice, treća jednadžba daje $\xi_4 = 1$, druga $\xi_3 = 1$, te na kraju prva $\xi_2 = 1$ i ξ_1 po volji.

2.10. Stepenaste matrice. Za $m \times n$ matricu kažemo da je *gornja stepenasta po recima* ako je svaki nul-redak niže od svih redaka koji nisu nula i u svakom retku prvi element različit od nule stoji desno od prvog elementa različitog od nule u prethodnom retku. To za matricu $A = (\alpha_{ij})$ možemo zapisati kao uvjet da za svaki $i = 1, \ldots, m-1$ i svaki $k = 1, \ldots, n$

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{za sve} \quad 1 \leq j < k \quad \text{povlači} \quad \alpha_{i+1,j} = 0 \quad \text{za sve} \quad 1 \leq j \leq k.$$

Prvi element u retku koji je različit od nule zove se *ugaoni* ili *stožerni element* matrice.

Na primjer, imamo 3×4 gornje stepenaste matrica kod kojih su svi ugaoni elementi 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a u prethodnoj smo točki imali primjer sistema sa stepenastom proširenom matricom sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

2.11. Stepenasti sistemi jednadžbi. Sisteme kojima su matrice sistema stepenaste po recima zovemo *stepenastim sistemima.* Takve sisteme rješavamo na sličan način kao i trokutaste sisteme. Na primjer, od dva stepenasta sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2, \\ 0\xi_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_3 &= 2, \\ 0\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

prvi nema rješenja jer jednadžba $0\xi_3 = 1$ nema rješenja, a drugi ima jedinstveno rješenje $x = (-1, 2, 1)$ jer je zadnja jednadžba $0\xi_3 = 0$ zadovoljena za svaki ξ_3, a iz prethodnog primjera (2.1) znamo jedinstveno rješenje preostale tri jednadžbe.

Kod rješavanja stepenastih sistema može se dogoditi da u pojedinom koraku trebamo riješiti jednadžbu s više nepoznanica. Na primjer, rješavanje stepenastog sistema

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 3 \end{aligned}$$

započinjemo rješavanjem druge jednadžbe

$$2\xi_2 - \xi_3 = 3.$$

Rješavanjem te jednadžbe po nepoznanici ξ_2 vidimo da imamo rješenje

$$\xi_2 = (\lambda + 3)/2$$

za svaki izbor realnog broja $\xi_3 = \lambda$. Uvrštavanjem rješenja u prvu jednadžbu dobivamo

$$\xi_1 = \xi_2 - 2\xi_3 - 1 = (\lambda + 3)/2 - 2\lambda - 1 = -3\lambda/2 + 1/2.$$

2.12. Zadatak. Riješite stepenasti sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 &= 6, \\ \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 &= 4, \\ \xi_5 + \xi_6 &= 2. \end{aligned}$$

3. Gaussova metoda eliminacije

3.1. Gaussove eliminacije. Pretpostavimo da matrica sistema (1.1) nije nul-matrica. To znači da u bar jednom retku matrice sistema postoji bar jedan element različit od nule. Smijemo pretpostaviti da je za neki j element α_{1j} iz prvog retka različit od nule (jer inače promijenimo redoslijed pisanja jednadžbi, ne mijenjajući pritom skup svih rješenja sistema). Budući da je $\alpha_{1j} \neq 0$, prvu jednadžbu možemo rješavati po nepoznanici ξ_j:

(3.1)
$$\xi_j = \frac{1}{\alpha_{1j}} \left(\beta_1 - (\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1,j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n) \right).$$

Uvrstimo li ξ_j u preostale jednadžbe, dobivamo sistem:

(3.2)

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1,j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1j}\xi_j + \alpha_{1,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1\,,\\
&\alpha'_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{2,j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{2,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{2n}\xi_n = \beta'_2\,,\\
&\alpha'_{31}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{3,j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{3,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{3n}\xi_n = \beta'_3\,,\\
&\quad\dots\\
&\alpha'_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{m,j-1}\xi_{j-1} \qquad\qquad + \alpha'_{m,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{mn}\xi_n = \beta'_m\,.
\end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo da su za $i > 1$ i $k \neq j$ koeficijenti α'_{ik} (uz nepoznanicu ξ_k) i β'_i u i-toj jednadžbi dani formulom

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} - \alpha_{ij}\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{1j}}, \qquad \beta'_i = \beta_i - \alpha_{ij}\frac{\beta_1}{\alpha_{1j}},$$

odnosno

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + \lambda_i\alpha_{1k} \quad \text{i} \quad \beta'_i = \beta_i + \lambda_i\beta_1 \qquad \text{za} \quad \lambda_i = -\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{1j}}. \tag{3.3}$$

Ovaj rezultat interpretiramo na sljedeći način: *Pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (1.1) prve jednadžbe pomnožene s λ_i dobivamo novu jednadžbu u kojoj nema nepoznanice ξ_j; kažemo da smo eliminirali nepoznanicu ξ_j. U Gaussovom postupku eliminacije na ovaj način eliminiramo jednu te istu nepoznanicu ξ_j u svim jednadžbama za $i = 2, \ldots, m$.*

3.2. Primjer. Neka je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica sistema jednadžbi s nepoznanicama $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Kao prvo vidimo da se nepoznanica ξ_1 "zapravo ne pojavljuje" u sistemu jednadžbi, pa sve ovisi o rješenju sistema s nepoznanicama ξ_2, ξ_3, ξ_4 i matricom sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koristeći prvu jednadžbu mogli bismo eliminirati nepoznanicu ξ_3 u ostalim jednadžbama. No, kako se često radi, možemo treću jednadžbu premjestiti na prvo mjesto, dobivši novi sistem s matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a onda u ostalima jednadžbama eliminirati nepoznanicu ξ_2.

3.3. Gaussove eliminacije daju ekvivalentni sistem jednadžbi. Ako je x rješenje početnog sistema jednadžbi (1.1), onda je jasno da je x rješenje i novog sistema (3.2) dobivenog pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (1.1) prve jednadžbe pomnožene s λ_i. No početni sistem jednadžbi (1.1) možemo rekonstruirati iz novog sistema pribrajanjem i-toj jednadžbi u sistemu (3.2) prve jednadžbe pomnožene s $-\lambda_i$. To znači da je svako rješenje x novog sistema (3.2) ujedno i rješenje početnog sistema (1.1). Znači da početni sistem (1.1) i novi sistem (3.2) imaju isti skup rješenja.

3.4. Elementarne transformacije sistema jednadžbi. Na sistemima jednadžbi možemo izvoditi tako zvane elementarne transformacije.

Prvi tip elementarne transformacije sistema je zamjena redosljeda pisanja dviju jednadžbi u sistemu. Takva je transformacija razmatrana u primjeru 3.2. Jasno je da je takvom transformacijom dobiven ekvivalentan sistem.

Drugi tip elementarne transformacije sistema je množenje jedne jednadžbe sistema brojem $\lambda \neq 0$. Očito je da "staru" jednadžbu možemo rekonstruirati iz "nove" množenjem brojem λ^{-1}, pa je zato "novi" sistem ekvivalentan "starom". Takvu transformaciju obično izvodimo kada želimo da koeficijent $\alpha_{ij} \neq 0$ u i-toj jednadžbi uz j-tu nepoznanicu "postane" 1, pa onda i-tu jednadžbu množimo s $\frac{1}{\alpha_{ij}}$.

Treći tip elementarne transformacije sistema je dodavanje jednoj jednadžbi sistema neke druge jednadžbe pomnožene s nekim brojem λ. Upravo taj tip transformacije koristimo u Gaussovom postupku eliminacije nepoznanica opisanom u prethodnoj točki.

3.5. Obratni hod u Gaussovoj metodi. Ponekad se opisani postupak eliminacija nepoznanica zove *direktni hod u Gaussovoj metodi*, a postupak nalaženja rješenja početnog sistema (1.1) iz novog sistema (3.2) zove se *obratni hod u Gaussovoj metodi*. Tu valja primijetiti da je $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ rješenje novog sistema (3.2) ako i samo ako je $(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$ rješenje sistema

$$
\begin{aligned}
&\alpha'_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{2,j-1}\xi_{j-1} \quad + \alpha'_{2,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{2n}\xi_n = \beta'_2\,, \\
&\alpha'_{31}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{3,j-1}\xi_{j-1} \quad + \alpha'_{3,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{3n}\xi_n = \beta'_3\,, \\
&\dots \\
&\alpha'_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha'_{m,j-1}\xi_{j-1} \quad + \alpha'_{m,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha'_{mn}\xi_n = \beta'_m
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

i ako je

$$\xi_j = \frac{1}{\alpha_{1j}}\left(\beta_1 - (\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1,j-1}\xi_{j-1} + \alpha_{1,j+1}\xi_{j+1} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n)\right).$$

Znači da iz rješenja sistema (3.4) možemo naći rješenje početnog sistema (1.1). *Time je problem rješavanja sistema od m jednadžbi s n nepoznanica sveden na problem rješavanja sistema od $m-1$ jednadžbi s $n-1$ nepoznanica.*

3.6. Gaussova metoda. Kada matrica sistema nije nula, primjenom Gaussovih eliminacija problem rješavanja sistema od m jednadžbi s n nepoznanica svodimo na problem rješavanja sistema od $m-1$ jednadžbi s $n-1$ nepoznanica. Ako je matrica manjeg sistema nula, onda sistem znamo riješiti. Ako matrica manjeg sistema nije nula, onda ponovo primijenimo Gaussove eliminacije. Na kraju postupka dobivamo ili matricu sistema nula, ili sistem s jednom nepoznanicom, ili jednu jednadžbu. U svakom od tih slučajeva znamo riješiti sistem, a rješenje početnog sistema dobivamo obratnim hodom.

3.7. Primjer. Neka je zadan sistem od 4 jednadžbe s 3 nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2. \end{aligned}$$

Odaberemo $\alpha_{11} = 1 \neq 0$ i pomoću prve jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_1 u ostalima. U prvom koraku mijenjamo drugu jednadžbu: množimo prvu jednadžbu s $\lambda = -1$ i pribrajamo drugoj jednadžbi. U drugom koraku mijenjamo treću jednadžbu i biramo $\lambda = 1$. U trećem koraku biramo $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1, \\ 4\xi_3 &= 1. \end{aligned}$$

U sljedećem ciklusu eliminirali bismo drugu nepoznanicu u trećoj i četvrtoj jednadžbi, koristeći za to drugu jednažbu. No u ovom se je primjeru desilo da u trećoj i četvrtoj jednadžbi već nema nepoznanice ξ_2. Odaberemo $\alpha_{33} = 3 \neq 0$ i pomoću treće jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_3 u četvrtoj.

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1, \\ 0 &= \tfrac{7}{3}. \end{aligned}$$

Zadnji redak na kraju procesa Gaussovih eliminacija označuje jednadžbu

$$0\xi_3 = \tfrac{7}{3}$$

koja nema rješenja. Znači da i početni sistem nema rješenja.

3.8. Primjer. Neka je zadan sistem od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

To su prve tri jednadžbe iz prethodnog primjera, pa Gaussovim eliminacijama dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 3, \\ 3\xi_3 &= -1. \end{aligned}$$

Sada primijenimo obratni hod: iz treće jednadžbe dobijamo $\xi_3 = -1/3$. Uvrštavanjem dobivenog ξ_3 u drugu jednadžbu dobijamo $\xi_2 = 2/3$. Uvrštavanjem dobivenih ξ_2, ξ_3 u prvu jednadžbu dobivamo $\xi_1 = 1/3$. Dobiveno rješenje $x = (1/3, 2/3, -1/3)$ jedinstveno je rješenje početnog sistema.

3.9. Gaussova metoda i proširena matrica sistema. Valja primijetiti da je kod primjene Gaussovih eliminacija na sistem (1.1) bilo dovoljno zapisivati samo proširenu matricu sistema (A, b). Zato rješavanje sistema u primjeru 3.7 zapisujemo ovako:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

U ovom primjeru prvo odaberemo $\alpha_{11} = 1 \neq 0$ i pomoću prve jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_1 u ostalima. U prvom koraku mijenjamo drugi redak: množimo prvi redak s $\lambda = -1$ i pribrajamo drugom retku. U drugom koraku mijenjamo treći redak i biramo $\lambda = 1$. U trećem koraku biramo $\lambda = 1$.

U sljedećem ciklusu eliminirali bismo drugu nepoznanicu u trećoj i četvrtoj jednadžbi, koristeći za to drugu jednažbu. No u ovom se je primjeru desilo da u trećoj i četvrtoj jednadžbi već nema nepoznanice ξ_2.

Odaberemo $\alpha_{33} = 3 \neq 0$ i pomoću treće jednadžbe eliminiramo nepoznanicu ξ_3 u četvrtoj. Zadnji redak na kraju procesa Gaussovih eliminacija označuje jednadžbu

$$0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3 = \tfrac{7}{3}$$

koja nema rješenja, pa onda ni početni sistem nema rješenja.

3.10. Svođenje sistema na stepenasti oblik. Obično je najjednostavnije sistem jednadžbi rješavati tako da proširenu matricu sistema elementarnim transformacijama redaka svedemo na stepenastu matricu po recima. Tako matricu sistema iz primjera 3.2 svodimo na gornji stepenasti oblik

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gornji primjer nam pokazuje kako proizvoljni sistem možemo svesti na stepenasti: Ako matrica sistema nije nula, onda u prvom stupcu matrice koji nije nula (u gornjem je primjeru to drugi stupac) odaberemo koeficijent koji nije nula (u primjeru je to 1 u trećoj jednadžbi) i pripadnu jednadžbu/redak premjestimo na prvo mjesto. Pomoću odabranog koeficijenta eliminiramo sve koeficijente ispod njega. Postupak nastavimo s preostalim jednadžbama ne mijenjajući više prvu.

3.11. Zadatak. Riješite homogeni sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

svođenjem na stepenasti sistem.

3.12. Zadatak. Riješite homogeni sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

svođenjem na stepenasti sistem.

4. Homogeni $m \times p$ sistemi za $m < p$

4.1. Homogeni sistem s matricom sistema nula. Očito je svaki izbor n-torke brojeva $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ rješenje homogenog sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} 0\lambda_1 + \cdots + 0\lambda_n &= 0, \\ &\vdots \\ 0\lambda_1 + \cdots + 0\lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

s matricom sistema nula. Posebno, takav sistem uvijek ima netrivijalno rješenje.

4.2. Homogena jednadžba s više od jedne nepoznanice. Očito jedna homogena jednadžba

$$\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n = 0$$

s barem dvije nepoznanice $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ima netrivijalno rješenje.

4.3. Teorem. *Homogeni sistem od m jednadžbi*

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}\lambda_j = 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

i $p > m$ nepoznanica uvijek ima netrivijalno rješenje $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Naime, ili na kraju Gaussovog postupka eliminacije imamo jednu homogenu jednadžbu s $p-m+1 \geq 2$ nepoznanica koja ima netrivijalno rješenje, ili je postupak eliminacije prekinut ranije jer smo dobili homogeni sistem s matricom sistema nula, a koji također ima netrivijalno rješenje.

4.4. Primjer. Neka je zadan homogeni sistem od 2 jednadžbe s 3 nepoznanice

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\xi_2 - \lambda_3 = 0.$$

Gaussovom eliminacijom dobijamo ekvivalentan sistem

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$

koji ima netrivijalno rješenje $\lambda_3 = 1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_1 = \lambda_2 - 2\lambda_3$.

POGLAVLJE 2

Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

U ovom poglavlju uvodimo operaciju zbrajanja na skupu $\mathbb{R}^n$ svih uređenih n-torki realnih brojeva i operaciju množenja n-torki realnim brojevima. Te dvije operacije na skupu $\mathbb{R}^n$ nasljeđuju neka dobra svojstva zbrajanja i množenja u polju realnih brojeva, pa $\mathbb{R}^n$ s uvedenim operacijama zovemo vektorskim prostorom. Koristeći te operacije definiramo geometrijske objekte u $\mathbb{R}^n$ kao što su pravci i ravnine. Pomoću operacija zbrajanja i množenja skalarom definiramo i elementarne transformacije na matricama, linearne kombinacije vektora i linearna preslikavanja. Na kraju uvodimo pojam linearne ljuske vektora i pojam potprostora prostora $\mathbb{R}^n$.

0.1. Pojam preslikavanja. Neka su A i B dva skupa. Ako svakom elementu a skupa A pridružimo neki element $f(a)$ skupa B, pišemo

$$a \mapsto f(a),$$

onda kažemo da je zadano *preslikavanje* f *sa skupa* A *u skup* B i pišemo

$$f\colon A \to B.$$

Kažemo da su dva preslikavanja $f\colon A \to B$ i $g\colon A \to B$ *jednaka* ako je

$$f(a) = g(a)$$

za sve elemente a skupa A.

0.2. Konačni nizovi elemenata u skupu. Neka je S neki skup. Tada preslikavanje $f\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to S$ zovemo *nizom od* k *članova u skupu* S, ili samo *konačnim nizom u* S. Preslikavanje f je u potpunosti zadano ako znamo

$$f(1) = s_1, \quad f(2) = s_2, \quad f(3) = s_3, \quad \ldots, \quad f(k) = s_k,$$

pa obično kažemo da je

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k \quad \text{ili} \quad (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k)$$

niz u S, a elemente s_1, s_2, s_3, $\ldots$, s_k skupa S zovemo *članovima niza.* Također kažemo da je *prvi član niza* s_1, *drugi član niza* s_2 itd. Iz opće definicije jednakosti preslikavanja slijedi da su nizovi

$$f\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to S \quad \text{i} \quad g\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to S$$

jednaki ako i samo ako je

$$f(1) = g(1), \quad f(2) = g(2), \quad f(3) = g(3), \quad \ldots, \quad f(k) = g(k).$$

Nizove $(s_1, \ldots, s_k)$ od k članova u skupu S zovemo i *uređenom k-torkom elemenata iz S*. Skup svih k-torki elemenata iz S označavamo sa S^k i čitamo "skup es na katu potenciju" ili samo "es na katu".

0.3. Primjer. Za skup $S = \{0, 1\}$ imamo niz

$$0, 0, 0, 1, 0, 1, 1$$

od sedam članova, pri čemu je prvi član niza 0, drugi član niza isto 0 itd. Jasno je da je

$$1, 0, 1, 1, 0, 0, 0$$

drugi niz u skupu S jer se radi o drugom preslikavanju $\{1, 2, \ldots, 7\} \to S$.

0.4. Primjer. Za skup $S = \{0, 1\}$ skup S^2 sastoji se od uređenih parova

$$(0, 0),\ (0, 1),\ (1, 0),\ (1, 1).$$

0.5. Zadatak. Za skup $S = \{0, 1\}$ ispišite sve elemente skupa S^3.

0.6. Razlika između skupa od n elemenata i niza od n članova. Kad govorimo o skupu $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ od n elemenata, onda podrazumijevamo da su svi elementi tog skupa međusobno različiti i ne podrazumijevamo nikakav poredak među njima. Kad govorimo o nizu $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ od n članova, onda podrazumijevamo da je s_1 prvi član niza, s_2 drugi član niza itd, a ne podrazumijevamo da su ti članovi međusobno različiti.

0.7. Zadatak. Za skup $S = \{0, 1\}$ ispišite sve dvočlane podskupove skupa S i sve dvočlane nizove u S.

1. Vektori u $\mathbb{R}^n$ i matrice tipa $n \times k$

1.1. Skup $\mathbb{R}^n$. Neka je n fiksan prirodan broj. Elementi skupa $\mathbb{R}^n$ (čitamo "er na entu" ili samo "er en") su sve uređene n-torke realnih brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Uređenu n-torku realnih brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ obično zovemo *točkom* ili *vektorom* u $\mathbb{R}^n$, a realne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *koordinatama* vektora (točke) a, pri čemu je *prva koordinata* α_1, *druga koordinata* je α_2 itd.

1.2. Primjer. $(0, 1, 1, -1, \sqrt{3})$ i $(0, 1, 1, -1, 0)$ su dvije različite petorke realnih brojeva, ili dvije različite točke u $\mathbb{R}^5$.

1.3. Zadatak. Napišite dvije različite točke u $\mathbb{R}^8$.

1.4. Skupovi $\mathbb{R}^n$ javljaju se u geometriji i analizi. Skupove $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ možemo si predočiti geometrijski. Tako si, na primjer, skup $\mathbb{R}^2$ svih uređenih parova realnih brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ možemo zamisliti kao skup točaka a u euklidskoj ravnini s koordinatama α_1 i α_2 u odabranom Kartezijevom sustavu koordinata. Na sličan si način uređene trojke realnih brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ zamišljamo kao točke euklidskog prostora s koordinatama α_1, α_2 i α_3 u odabranom Kartezijevom sustavu koordinata. U slučaju $n > 3$ za skup $\mathbb{R}^n$ nemamo neposredne geometrijske predodžbe, no još uvijek neka svojstva tog skupa interpretiramo "geometrijski", po analogiji s $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

Skupovi $\mathbb{R}^n$ javljaju se prirodno u matematičkoj analizi i njenim primjenama kao skupovi parametara (o kojima ovise neke veličine). Tako je, na primjer, brzina vjetra (v_x, v_y, v_z) u trenutku t u točki prostora s koordinatama x, y, z "točka" $(v_x, v_y, v_z, t, x, y, z)$ u $\mathbb{R}^7$.

1.5. Zapisivanje uređenih n-torki brojeva. U matematičkoj analizi i geometriji je običaj uređene n-torke brojeva $a \in \mathbb{R}^n$ zvati točkama i zapisivati ih kao retke

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

a u linearnoj je algebri običaj uređene n-torke brojeva $a \in \mathbb{R}^n$ zvati vektorima i zapisivati ih kao stupce, kažemo *vektor-stupce*

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Mi ćemo, prema prilici, koristiti oba načina zapisivanja. Kasnije ćemo govoriti i o *vektor-recima*

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

što su također n-torke brojeva.

1.6. Primjer.

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

su dva različita vektora u $\mathbb{R}^5$.

1.7. Konačni nizovi vektora u $\mathbb{R}^n$. Pored pojedinih vektora u $\mathbb{R}^n$ često ćemo pisati i nizove vektora u $\mathbb{R}^n$, kao što je, na primjer, niz od četiri vektora

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

u $\mathbb{R}^2$. Želimo li općenito za niz vektora

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

u $\mathbb{R}^n$ zapisati koordinate tih vektora, onda je običaj da koristimo (odgovarajuća mala grčka) slova s dva indeksa

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad a_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Dogovor je da α_{ij} označava i-tu koordinatu j-tog člana niza a_j.

1.8. Matrica tipa $n \times k$. Konačan niz vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ u $\mathbb{R}^n$, ili, što je isto, k-torku vektora

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

zovemo i *matricom realnih brojeva tipa* $n \times k$. Zapisujući koordinate vektora imali bismo previše (suvišnih) zagrada i zareza

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad, \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix} \right),$$

pa radije pišemo samo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Kažemo da matrica $(a_1, \ldots, a_k)$ ima n redaka i k stupaca. Ponekad matricu $(a_1, \ldots, a_k)$ kraće zapisujemo kao

$$(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,k}} \quad \text{ili samo} \quad (\alpha_{ij}).$$

Za i-tu koordinatu α_{ij} vektor-stupca a_j obično kažemo da je *element* matrice u i-tom retku i j-tom stupcu. Obično ćemo matrice označavati velikim latinskim slovima, na primjer

$$A = (a_1, \ldots, a_k)$$

ili

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

1.9. Primjer. Niz vektora (1.1) zovemo i matricom tipa 2×4 i kratko zapisujemo kao

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.10. Pitanje. Da li je matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

tipa 4×3? DA NE

1.11. Jednakost matrica. U skladu s općom definicijom iz točke 0.2, za dvije matrice $A = (a_1, \dots, a_k)$ i $B = (b_1, \dots, b_k)$ istoga tipa $n \times k$ kažemo da su jednake i pišemo $A = B$ ako su im pripadni vektor-stupci jednaki:

$$a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k.$$

1.12. Nul-matrica. Vektor $(0, \dots, 0)$ u $\mathbb{R}^n$ kojem su sve koordinate nula zovemo *nul-vektorom* ili *nulom* i kratko označavamo s 0. Matricu $(0, \dots, 0)$ kojoj su svi stupci nul-vektori zovemo *nul-matricom* ili *nulom* i označavamo je s 0:

$$0 = (0, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Tako je, na primjer,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×4 nul-matrica.

1.13. Kvadratne matrice. Matrice tipa $n \times n$ zovemo *kvadratnim matricama.* Elemente $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}$ kvadratne matrice $A = (\alpha_{ij})$ zovemo *dijagonalom* od A, elemente α_{ij}, $i < j$ *gornjim trokutom* od A, a elemente α_{ij}, $i > j$ *donjim trokutom* od A. Elemente donjeg trokuta, dijagonale i gornjeg trokuta 4×4 matrice možemo si predočiti kao zvjezdice

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & * \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cdot & * & * & * \\ \cdot & \cdot & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Kvadratne matrice kojima donji trokut ima matrične elemente 0 zovemo *gornjim trokutastim matricama*, matrice kojima gornji trokut ima matrične elemente 0 zovemo *donje trokutastim matricama*, a matrice kojima i gornji i donji trokut ima matrične elemente 0 zovemo *dijagonalnim matricama.*

Tako, na primjer, imamo donje trokutaste, dijagonalne i gornje trokutaste 4×4 matrice:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

1.14. Pitanje. Koja je matrica donja trokutasta, a koja nije:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

2. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

2.1. Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Na skupu $\mathbb{R}^n$ definiramo operaciju zbrajanju po pravilu

$$a + b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

Također definiramo operaciju množenja vektora realnim brojem λ, obično kažemo *skalarom* λ, po pravilu

$$\lambda a = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ponekad je zgodno pisati $\lambda \cdot a$ umjesto λa, kao na primjer $1 \cdot a$ umjesto $1a$ kad želimo naglasiti da vektor a množimo brojem 1. Kada na skupu $\mathbb{R}^n$ koristimo operacije zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom, onda je običaj elemente od $\mathbb{R}^n$ zvati vektorima, a ne točkama. Da bismo u formulama odmah vidjeli zbrajamo li vektore ili brojeve, bit će zgodno vektore označavati malim latinskim slovima, na primjer a, b, c, ili malim latinskim slovima s indeksima, na primjer a_1, a_2, a_3, a brojeve i koordinate vektora malim grčkim slovima[1].

2.2. Primjer. U $\mathbb{R}^4$ imamo

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3\\-2+3\\0+5\\2+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\5\\1\end{pmatrix},\ 3\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1\\3\cdot(-2)\\3\cdot 0\\3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\0\\6\end{pmatrix}.$$

2.3. Algebarska svojstva zbrajanja i množenja skalarom. Budući da je operacija zbrajanja vektora $a+b$ definirana kao zbrajanje odgovarajućih koordinata $\alpha_i+\beta_i$, to iz svojstava asocijativnosti i komutativnosti za zbrajanje brojeva slijede svojstva *asocijativnosti*

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

i *komutativnosti*

$$a+b=b+a$$

za zbrajanje vektora. Na primjer, zbog komutativnosti zbrajanja brojeva vrijedi

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1+\alpha_1\\\beta_2+\alpha_2\\\vdots\\\beta_n+\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}.$$

To smo mogli kraće zapisati provjeravajući samo jednakost i-te koordinate

$$\alpha_i+\beta_i=\beta_i+\alpha_i$$

u vektorima $a+b$ i $b+a$ za svaki $i=1,2,\dots,n$.

Vektor kojemu su sve koordinate nula zovemo *nul-vektorom* ili *nulom* u $\mathbb{R}^n$

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

[1]Mala grčka slova

α	alfa	ι	iota	σ, ς	sigma
β	beta	κ	kapa	τ	tau
γ	gama	λ	lambda	υ	ipsilon
δ	delta	μ	mi	φ, ϕ	fi
ε, ϵ	epsilon	ν	ni	χ	hi
ζ	zeta	ξ	ksi	ψ	psi
η	eta	π	pi	ω	omega
ϑ, θ	theta	ρ, ϱ	ro		

Tako je $0 = \binom{0}{0}$ nula u $\mathbb{R}^2$, a $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je nula u $\mathbb{R}^3$. Očito je za vektore a i 0 iz $\mathbb{R}^n$

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Također je očito da svaki vektor a u $\mathbb{R}^n$ ima jedinstveni *suprotni element*

$$-a = -\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{pmatrix}$$

sa svojstvom

$$-a + a = a + (-a) = 0.$$

Kao i za brojeve, obično pišemo $a - b$ umjesto $a + (-b)$.

S druge strane, operacija množenja skalarom nasljeđuje neka svojstva množenja brojeva:

$$1 \cdot a = a, \qquad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,$$

te

$$0 \cdot a = \begin{pmatrix} 0 \cdot \alpha_1 \\ 0 \cdot \alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot \alpha_n \end{pmatrix} = 0, \quad (-1) \cdot a = \begin{pmatrix} (-1) \cdot \alpha_1 \\ (-1) \cdot \alpha_2 \\ \vdots \\ (-1) \cdot \alpha_n \end{pmatrix} = -a, \quad \lambda \cdot 0 = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot 0 \\ \vdots \\ \lambda \cdot 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Zbog distributivnosti množenja brojeva prema zbrajanju imamo dvije *distributivnosti množenja skalarom*: u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{R}$ i u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{R}^n$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

Zbog navedenih svojstava zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom skup $\mathbb{R}^n$ zovemo *vektorskim prostorom* $\mathbb{R}^n$. Grubo govoreći, s vektorima računamo "kao s brojevima".

2.4. Proporcionalni vektori. Kažemo da su vektori a i b u $\mathbb{R}^n$ *proporcionalni* ako je $a = \lambda b$ za neki realan broj λ ili je $b = \mu a$ za neki realan μ. Valja primijetiti da su po ovoj definiciji svaki a i 0 proporcionalni jer je $0 = 0a$, a za $a \neq 0$ nije $a = \mu 0$. No ako su a i b različiti od nule, onda $a = \lambda b$ povlači $\lambda \neq 0$ i $b = \lambda^{-1}a$.

2.5. Pitanje. Koja svojstva množenja realnih brojeva i množenja vektora realnim brojem koristimo u dokazu tvrdnje: "Ako su a i b različiti od nule, onda $a = \lambda b$ povlači $\lambda \neq 0$ i $b = \lambda^{-1}a$." ?

2.6. Pitanje. Da li svojstvo komutativnosti zbrajanja vektora u $\mathbb{R}^n$ glasi da za neke vektore a i b u $\mathbb{R}^n$ vrijedi $a + b = b + a$? DA NE

2.7. Pitanje. Da li je 0 u $\mathbb{R}^2$ jednaka 0 u $\mathbb{R}^3$? DA NE

2.8. Pitanje. Da li za vektor a u $\mathbb{R}^n$ vrijedi $a = -(-a)$? DA NE

2.9. Višestruke sume vektora. Operacija zbrajanja vektora je binarna operacija, što znači da je definirano zbrajanje dva vektora. Imamo li više vektora $a_1, a_2, \dots a_k$ u $\mathbb{R}^n$, onda definiramo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = (\dots((a_1 + a_2) + a_3) + \dots + a_{k-1}) + a_k.$$

Budući da smo na isti način definirali i višestruke sume brojeva, sumu više vektora računamo tako da računamo odgovarajuće sume koordinata. Na primjer, za četiri vektora u $\mathbb{R}^2$ imamo

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+1+1+5\\1-1+1+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}.$$

2.10. Asocijativnost za višestruke sume vektora. Za sve prirodne brojeve k i m i vektore $a_1, \dots, a_{k+m} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m})\\&= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m}.\end{aligned}$$

To svojstvo vrijedi zbog analognog svojstva brojeva. Na primjer

$$\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2+1\\1-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1+5\\1+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}.$$

2.11. Komutativnost za višestruke sume vektora. Za sve permutacije[2] σ skupa $\{1, 2, \dots, k\}$ i vektore $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \cdots + a_{\sigma(k)} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Tako je, na primjer,

$$a_2 + a_3 + a_1 = a_1 + a_2 + a_3.$$

2.12. Oznaka za višestruke sume vektora. Kao i za brojeve, višestruke sume vektora možemo zapisati pomoću znaka sumacije $\sum$:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Podsjetimo se da nije važno koji indeks sumacije koristimo:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

2.13. Distributivnost za višestruke sume. Za višestruke sume brojeva ili vektora vrijede svojstva distributivnosti množenja skalarom prema zbrajanju

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a, \qquad \lambda \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda a_i.$$

[2]Permutacija σ skupa $\{1, 2, \dots, k\}$ je bijekcija $\sigma\colon \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, k\}$. Na primjer, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ i $\sigma(3) = 1$ je permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$ koju obično zapisujemo kao niz brojeva 231.

3. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^n$

3.1. Geometrijska interpretacija polja realnih brojeva $\mathbb{R}$. Postoje razne konstrukcije ili definicije polja realnih brojeva i sve su one matematički ekvivalentne. U geometrijskoj interpretaciji skup realnih brojeva je bilo koji izabrani pravac p u euklidskoj ravnini na kojem su izabrane bilo koje međusobno različite točke 0 i 1. Točke na tom pravcu p zovemo realnim brojevima.

Zbroj $\alpha + \beta$ realnih brojeva $\alpha, \beta \in p$ definiramo tako da odmjerimo usmjerenu dužinu (strelicu, vektor) $\overrightarrow{0\beta}$ i prenesemo njen početak na točku α, a kraj te prenesene usmjerene dužine proglasimo zbrojem $\alpha + \beta$.

Množenje realnih brojeva definiramo koristeći teorem o sličnosti trokuta: Neka su $\alpha, \beta \in p$. Odaberemo drugi pravac q, $q \neq p$, koji siječe pravac p u točki 0. Na pravcu q odaberemo točku $1'$ tako da su duljine $\overline{01}$ i $\overline{01'}$ jednake, te točku $\beta' \in q$ tako da su duljine $\overline{0\beta}$ i $\overline{0\beta'}$ jednake, pazeći pritom da su $1'$ i β' na istoj strani (zraci) pravca q u odnosu na 0 ako i samo ako su 1 i β na istoj strani (zraci) pravca p u odnosu na 0. Sada povučemo pravac r kroz točke $1' \in q$ i $\alpha \in p$ i njemu paralelan pravac s kroz točku $\beta' \in q$. Tada pravac s siječe pravac p u jednoj točki X koju proglasimo umnoškom $X = \alpha \cdot \beta \in p$. Zbog teorema o sličnosti trokuta vrijedi $\overline{0\beta} : \overline{01} = \overline{0X} : \overline{0\alpha}$, što i jest motivacija naše definicije množenja.

Višekratnim nanošenjem usmjerene dužine $\overrightarrow{01}$, počevši od točke 0, dobit ćemo brojeve $1, 2, 3, \ldots$. Dakle

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$$

Nanošenjem na drugu stranu usmjerene dužine $\overrightarrow{10}$ dobit ćemo $-1, -2, \ldots$. Dakle

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

Korištenjem teorema o sličnosti trokuta možemo konstruirati racionalne brojeve $\frac{1}{2}$, ili $\frac{3}{5}$, ili bilo koji $\frac{p}{q}$. Dakle

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Geometrijski definirane operacije zbrajanja i množenja na $\mathbb{R}$ su asocijativne i komutativne i množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje. Nadalje, obje operacije imaju neutralne elemente nulu i jedan. S obzirom na zbrajanje svaki realni broj α ima suprotni element $-\alpha$, a s obzirom na množenje svaki realni broj broj $\alpha \neq 0$ ima recipročni element α^{-1}. Zbog navedenih svojstava zbrajanja i množenja govorimo da je skup realnih brojeva polje.

Za realan broj α pišemo $\alpha \geq 0$ ako i samo ako se nalazi na zraci s početkom u točki (broju) 0 koja prolazi točkom 1. Općenito pišemo $\alpha \geq \beta$ ako i samo ako je $\alpha - \beta \geq 0$.

3.2. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^2$. Vektorski si prostor $\mathbb{R}^2$ zamišljamo kao euklidsku ravninu u kojoj smo izabrali pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, pa uređeni par brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ predstavlja koordinate točke a u ravnini. Obično si točku a u ravnini zamišljamo kao vektor-strelicu $\overrightarrow{0a}$. Tada zbrajanje vektora $a+b$ u $\mathbb{R}^2$ odgovara zbrajanju vektor-strelica $\overrightarrow{0a}+\overrightarrow{0b}$ u ravnini po *pravilu paralelograma: $a+b$ je četvrti vrh paralelograma kojemu su tri vrha točke* 0, *a i b.* Tako je, na primjer, zbroj vektora u ravnini

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

geometrijski dobiven kao četvrti vrh paralelograma kojemu su zadana tri vrha

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Množenje vektora a skalarom λ je produljivanje strelice $\overrightarrow{0a}$ za faktor λ. Tako je, na primjer, vektor

$$3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$$

geometrijski dobiven produljivanjem 3 puta vektora $a=\binom{2}{1}$. Općenito se za realan broj λ vektor λa nalazi na pravcu p kroz ishodište 0 i točku a, a geometrijski λa konstruiramo tako tako da prvo kroz točku 1 na x-osi i točku a povučemo pravac r i onda konstruiramo njemu paralelan pravac s kroz točku λ na x-osi: zbog teorema o sličnosti trokuta pravci p i s sijeku se u točki λa.

3.3. Pravci u $\mathbb{R}^2$. U prethodnoj smo se točki podsjetili da je u euklidskoj ravnini za vektor $a\neq 0$ skup točaka

$$p=\{\lambda a \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

pravac kroz točku a (za $\lambda=1$) i ishodište 0 Kartezijevog sustava (za $\lambda=0$). Zato za vektor $a\neq 0$ u $\mathbb{R}^2$ skup točaka

$$p=\{\lambda a\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

zovemo *pravcem u* $\mathbb{R}^2$ kroz točke a i 0, ili samo *pravcem kroz ishodište*, a vektor a zovemo *vektorom smjera pravca* p. Ako je

$$c=\mu a, \quad \mu\neq 0,$$

onda je i c vektor smjera pravca p jer je

$$\{\lambda c \mid \lambda\in\mathbb{R}\}=\{\lambda\mu a \mid \lambda\in\mathbb{R}\}=\{\lambda a \mid \lambda\in\mathbb{R}\},$$

pri čemu druga jednakost vrijedi jer je za $\mu\neq 0$ preslikavanje $\lambda\mapsto\mu\lambda$ bijekcija na $\mathbb{R}$.

Budući da je u euklidskoj ravnini zbrajanje vektora definirano po pravilu paralelograma, proizvoljan pravac q u euklidskoj ravnini možemo opisati kao skup

$$q=\{b+\lambda a\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

za neke vektore b i $a\neq 0$, pri čemu su pravci

$$q=\{b+\lambda a\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\} \quad \text{i} \quad p=\{\lambda a\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

paralelni. Zato za vektore b i $a \neq 0$ u $\mathbb{R}^2$ skup točaka

$$q = \{b + \lambda a \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

zovemo *pravcem u* $\mathbb{R}^2$, ili *pravcem kroz točku*[3] b, a vektor a zovemo *vektorom smjera pravca p*. Ako je $d \in p$ neka točka na pravcu p i $c = \mu a$ za neki $\mu \neq 0$, onda pravac p možemo prikazati i kao

$$p = \{b + \lambda a \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{d + \lambda c \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

tj. kao pravac kroz točku d s vektorom smjera c. Za različite pravce koji imaju proporcionalne vektore smjera kažemo da su *paralelni pravci u* $\mathbb{R}^2$.

3.4. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^3$. Vektorski si prostor $\mathbb{R}^3$ zamišljamo kao euklidski prostor u kojem smo izabrali pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, pa uređena trojka brojeva $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ predstavlja koordinate točke a u prostoru. Obično si točku a u prostoru zamišljamo kao vektor-strelicu $\overrightarrow{0a}$. Tada zbrajanje vektora $a + b$ u $\mathbb{R}^3$ odgovara zbrajanju vektor-strelica $\overrightarrow{0a} + \overrightarrow{0b}$ u prostoru po pravilu paralelograma, a množenje skalarom λ kao produljivanje strelice λ puta.

3.5. Ravnine u $\mathbb{R}^3$. Kao i u slučaju euklidske ravnine, za vektor $a \neq 0$ u euklidskom prostoru skup točaka

$$p = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

je pravac kroz ishodište 0 Kartezijevog sustava. Ako vektor $c \neq 0$ nije proporcionalan vektoru a, onda je pravac

$$q = \{\mu c \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

različit od pravca p i ta dva pravca određuju ravninu Π u prostoru koja prolazi ishodištem 0. Za realne brojeve λ i μ imamo

$$\lambda a + \mu c \in \Pi$$

jer je to četvrti vrh paralelograma kojem su tri vrha 0, λa i μc u ravnini Π. Štoviše, geometrijski je jasno da svaku točku ravnine Π možemo napisati na taj način, tj. da je

$$\Pi = \{\lambda a + \mu c \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Za točku prostora b koja nije u ravnini Π imamo ravninu

$$\Sigma = \{b + \lambda a + \mu c \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

koja je paralelna s ravninom Π. Zato za dane vektore $a \neq 0$ i $c \neq 0$ u $\mathbb{R}^3$ koji nisu proporcionalni skup točaka

$$\Pi = \{\lambda a + \mu c \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

zovemo *ravninom kroz ishodište.* Za točku $b \in \mathbb{R}^3$ koja nije u ravnini Π skup

$$\Sigma = \{b + \lambda a + \mu c \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

zovemo *ravninom kroz točku b*. Kažemo da su Σ i Π *paralelne ravnine.*

[3] Jer za $\lambda = 0$ imamo $b + \lambda a = b \in p$.

3.6. Geometrijska interpretacija $\mathbb{R}^n$. U geometriji, osim samog prostora koji se sastoji od točaka, proučavamo i familije skupova kao što su pravci, ravnine, kružnice, sfere itd. Kao što smo već rekli, u slučaju $n > 3$ za skup $\mathbb{R}^n$ nemamo neposredne geometrijske predodžbe, no po analogiji s $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ možemo uvesti geometrijske pojmove koji imaju slična svojstva[4] onima iz euklidske ravnine i euklidskog prostora. Ovdje ćemo, koristeći operacije zbrajanja i množenja skalarom, definirati pravce, segmente, zrake, ravnine i paralelograme u $\mathbb{R}^n$.

3.7. Pravci u $\mathbb{R}^n$. Za vektore $v \neq 0$ i a u $\mathbb{R}^n$ skup točaka

$$p = \{a + tv \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{3.1}$$

zovemo *pravcem u* $\mathbb{R}^n$. Kažemo da smo pravac p *zadali parametarski*[5]. Ako si parametar t zamislimo kao vrijeme, onda se točka $x(t) = a + tv$ giba u vremenu po pravcu jednolikom brzinom v jer je

$$\tfrac{1}{t_2 - t_1}(x(t_2) - x(t_1)) = \tfrac{1}{t_2 - t_1}(t_2 - t_1)v = v.$$

U trenutku $t = 0$ je $x(0) = a$, pa kažemo da *pravac p prolazi točkom a* ili da *točka a leži na pravcu p*. Vektor v zovemo *vektorom smjera* pravca.

3.8. Pravac kroz dvije točke. Neka su a i b dvije različite točke u $\mathbb{R}^n$. Stavimo $v = b - a$. Tada je

$$p = \{a + t(b - a) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1 - t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{3.2}$$

pravac u $\mathbb{R}^n$. Ako si parametar t zamislimo kao vrijeme, onda se točka $x(t) = (1 - t)a + tb$ giba po pravcu tako da je u trenutku $t = 0$ u položaju $x(0) = a$, a u trenutku $t = 1$ u položaju $x(1) = b$. Znači da pravac p prolazi točkama a i b.

3.9. Zadatak. Napišite parametarsku jednadžbu pravca u $\mathbb{R}^4$ kroz točke

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.10. Jedinstvenost pravca kroz dvije točke. *Kroz svake dvije točke prolazi jedan i samo jedan pravac.*

DOKAZ. Neka su a i b dvije različite točke u $\mathbb{R}^n$. Tada je formulom (3.2) zadan pravac p koji prolazi kroz te dvije točke, pa nam preostaje dokazati da je taj pravac jedinstven. Pretpostavim zato da su točke a i b i na pravcu $q = \{c + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$. Tada je za neke λ i μ

$$a = c + \lambda v, \quad b = c + \mu v.$$

[4] Primjer takvog svojstva je da kroz dvije različite točke prolazi jedan i samo jedan pravac.

[5] Ponekad kažemo da je formula (3.1) *parametarska jednadžba pravca*.

Znači da je $b - a = (\mu - \lambda)v$, pa zbog pretpostavke $a \neq b$ imamo $\lambda \neq \mu$ i

$$v = \tfrac{1}{\mu-\lambda}(b-a), \quad c = a - \lambda v = a - \tfrac{\lambda}{\mu-\lambda}(b-a).$$

Sada iz činjenice da je preslikavanje $s \mapsto t = \frac{1}{\mu-\lambda}(s-\lambda)$ bijekcija na $\mathbb{R}$ slijedi

$$\begin{aligned}\{c + sv \mid s \in \mathbb{R}\} &= \{a - \tfrac{\lambda}{\mu-\lambda}(b-a) + s\tfrac{1}{\mu-\lambda}(b-a) \mid s \in \mathbb{R}\}\\ &= \{a + \tfrac{1}{\mu-\lambda}(s-\lambda)(b-a) \mid s \in \mathbb{R}\}\\ &= \{a + t(b-a) \mid t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Znači da je pravac q jednak pravcu p zadanom formulom (3.2). □

3.11. Segmenti na pravcu. Neka su a i b dvije različite točke na pravcu

$$p = \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Ako si parametar t zamislimo kao vrijeme, onda se točka $x(t) = (1-t)a + tb$ giba po pravcu od točke a u trenutku $t = 0$ do točke b u trenutku $t = 1$. Zato kažemo da je točka c na pravcu p *između a i b* ako i samo ako je

$$c = (1-t)a + tb \quad \text{za neki} \quad 0 < t < 1.$$

Segmentom (na pravcu) zovemo skup oblika

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

3.12. Pitanje. Da li je skup S u $\mathbb{R}^3$ segment,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-t \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\Big|\, 1 \leq t \leq 3 \right\}?$$

Pokušajte "vidjeti" taj skup u euklidskom prostoru sa zadanim Kartezijevim koordinatnim sustavom. Ako S jest segment, da li je paralelan[6] xy-ravnini.

3.13. Zrake na pravcu. Ako je $p = \{a + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ pravac, onda skupove

$$\{a + tv \mid t < 0\} \quad \text{i} \quad \{a + tv \mid t > 0\}$$

zovemo *zrakama*[7] *na pravcu p s ishodištem u točki a*. Još kažemo da točka dijeli pravac na dvije zrake.

---

[6] Paralelnost pravca i ravnine u $\mathbb{R}^3$ nismo definirali. Kako bi glasila dobra definicija?

[7] Ponekad zrakama na pravcu p zovemo skupove

$$\{a + tv \mid t \leq 0\} \quad \text{i} \quad \{a + tv \mid t \geq 0\}.$$

3.14. Kolinearnost triju točaka. Kažemo da su tri međusobno različite točke a, b i c u $\mathbb{R}^n$ *kolinearne* ako leže na istom pravcu. Budući da točke a i b određuju jedinstveni pravac

$$p = \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}$$

na kojem leže, to su a, b i c kolinearne ako i samo ako je

$$c = a + t(b-a), \quad \text{odnosno} \quad c - a = t(b-a)$$

za neki $t \in \mathbb{R}$.

3.15. Zadatak. Da li su u $\mathbb{R}^2$ kolinearne točke

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Ako jesu, da li je b između a i c? Nacrtajte sliku.

3.16. Zadatak. Da li su u $\mathbb{R}^4$ kolinearne točke

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Ako jesu, da li je c između a i b?

3.17. Ravnine u $\mathbb{R}^n$. Za dane vektore $v_1 \neq 0$ i $v_2 \neq 0$ u $\mathbb{R}^n$ koji nisu proporcionalni skup

$$\Sigma = \{a + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \tag{3.3}$$

zovemo *ravninom u* $\mathbb{R}^n$. Kažemo da smo ravninu *zadali parametarski*[8]. Za vrijednosti parametara $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ dobivamo a, pa kažemo da *ravnina* Σ *prolazi točkom* a ili da *točka* a *leži u ravnini* Σ.

3.18. Ravnina kroz tri točke. Neka su a, b i c tri točke u $\mathbb{R}^n$ koje nisu kolinearne. Stavimo $v_1 = b - a$ i $v_2 = c - a$. Prema točki 3.14 vektori v_1 i v_2 nisu proporcionalni i ravnina

$$\{a + \lambda_1(b-a) + \lambda_2(c-a) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \tag{3.4}$$

prolazi kroz točke a (za $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), b (za $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$) i c (za $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$). Kasnije ćemo vidjeti da je ravnina koja sadrži te tri točke jedinstvena.

3.19. Paralelogram u $\mathbb{R}^n$. Za dane vektore $v_1 \neq 0$ i $v_2 \neq 0$ u $\mathbb{R}^n$ koji nisu proporcionalni skup

$$\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\} \tag{3.5}$$

zovemo *paralelogramom u* $\mathbb{R}^n$ sa stranicama v_1 i v_2.

[8]Ponekad kažemo da je formula (3.3) *parametarska jednadžba ravnine.*

3.20. Zadatak. Nacrtajte paralelogram u ravnini sa stranicama

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.21. Zadatak. Kao što točka dijeli pravac na dvije zrake, tako i pravac dijeli euklidsku ravninu na dvije poluravnine. Definirajte parametarski poluravnine u $\mathbb{R}^2$.

4. Elementarne transformacije

Koristeći operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, na konačnim nizovima vektora iz $\mathbb{R}^n$ možemo izvoditi *elementarne transformacije* ili *elementarne operacije*

$$v_1, \dots, v_m \mapsto v_1', \dots, v_m'$$

koje su slične elementarnim transformacijama sistema jednadžbi[9] u Gaussovoj metodi. Te su transformacije definirane na sljedeći način:

4.1. Zamjena mjesta dvaju vektora. Za proizvoljne indekse $i < j$ definiramo transformaciju

$$\begin{aligned} &v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m \\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \dots, v_m, \end{aligned}$$

gdje smo stavili $a = v_i$ i $b = v_j$. Ova transformacija je sama svoj inverz; dva puta primijenjena daje identitetu.

4.2. Množenje jednog vektora skalarom različitim od nule. Za proizvoljni indeks i i skalar $\lambda \neq 0$ definiramo transformaciju

$$v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_m \mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda a, v_{i+1}, \dots, v_m,$$

gdje smo stavili $a = v_i$. Ova transformacija ima inverznu istoga tipa; za isti indeks biramo skalar $\frac{1}{\lambda}$, pa sa čime smo prije množili, s time sada dijelimo:

$$v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_m \mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, \tfrac{1}{\lambda} a, v_{i+1}, \dots, v_m.$$

4.3. Pribrajanje jednog vektora pomnoženog skalarom drugom vektoru. Za proizvoljne indekse $i \neq j$ i skalar λ definiramo transformaciju

$$\begin{aligned} &v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m \\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b + \lambda a, v_{j+1}, \dots, v_m, \end{aligned}$$

gdje smo stavili $a = v_i$ i $b = v_j$. Ova transformacija ima inverznu istoga tipa; za iste indekse biramo skalar $-\lambda$, pa što smo prije dodali sada oduzmemo:

$$\begin{aligned} &v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \dots, v_m \\ &\mapsto v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, b - \lambda a, v_{j+1}, \dots, v_m. \end{aligned}$$

[9]vidi točku 1.3.4

4.4. Zadatak. Interpretirajte geometrijski u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ elementarne transformacije na parovima vektora

$$(a,b)\mapsto(\lambda a,b),\quad (a,b)\mapsto(a,\mu b),\quad (a,b)\mapsto(a,b+\lambda a),\quad (a,b)\mapsto(a+\mu b,b).$$

Kako se je promijenila površina paralelograma koje određuju vektori prije i nakon transformacije?

4.5. Elementarne transformacije na stupcima matrice. Budući da je matrica tipa $n\times m$ niz od m vektora iz $\mathbb{R}^n$, elementarne transformacije možemo primijeniti i na stupce matrice. Tako, na primjer, imamo elementarnu transformaciju zamjene prvog i trećeg stupca matrice

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\-2&2&3&\sqrt{3}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&0\\3&2&-2&\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

4.6. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix}$$

elementarna transformacija? DA NE

4.7. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&1&0\\1&2&3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

elementarna transformacija? DA NE

4.8. Primjer. Elementarna transformacija $(a,b,c,d)\mapsto(a-c,b,c,d)$ daje

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&1\\-1&1&1&0\\-2&2&3&1\end{pmatrix},$$

a njoj inverzna transformacija $(a,b,c,d)\mapsto(a+c,b,c,d)$ daje

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\-1&1&1&0\\-2&2&3&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix}.$$

4.9. Kompozicija elementarnih transformacija. Za početni niz vektora $(v_1, \dots, v_m)$ uzastopnom primjenom elementarnih transformacija dobivamo novi niz vektora $(w_1, \dots, w_m)$:

$$(v_1, \dots, v_m) \mapsto (v'_1, \dots, v'_m) \mapsto \dots \mapsto (w_1, \dots, w_m).$$

Činjenicu da je $(w_1, \dots, w_m)$ dobiven iz $(v_1, \dots, v_m)$ kompozicijom elementarnih transformacija zapisujemo kraće kao relaciju

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (w_1, \dots, w_m).$$

Očito vrijedi svojstvo *tranzitivnosti* relacije $\sim$

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (w_1, \dots, w_m) \quad \text{i} \quad (w_1, \dots, w_m) \sim (u_1, \dots, u_m)$$
$$\text{povlači} \quad (v_1, \dots, v_m) \sim (u_1, \dots, u_m).$$

Budući da elementarne transformacije oblika 4.2 za $\lambda = 1$ i transformacije oblika 4.3 za $\lambda = 0$ daju identitetu[10], to relacija $\sim$ ima svojstvo *refleksivnosti*

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (v_1, \dots, v_m),$$

a zbog toga što svaka elementarna transformacija ima inverznu, vrijedi i svojstvo *simetričnosti* relacije $\sim$

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (w_1, \dots, w_m) \quad \text{povlači} \quad (w_1, \dots, w_m) \sim (v_1, \dots, v_m).$$

4.10. Zadatak. Interpretirajte geometrijski u $\mathbb{R}^2$ elementarne transformacije na stupcima matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.11. Zadatak. Interpretirajte geometrijski u $\mathbb{R}^3$ elementarne transformacije na stupcima matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.12. Primjer. U ovom ćemo primjeru pokazati da kompozicijom elementarnih transformacija niz vektora

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

možemo prevesti u matricu[11]

$$(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

[10] Zbog toga je na pitanje 4.6 odgovor DA, a u tom primjeru je odgovor DA i zbog transformacije oblika 4.1.

[11] To je jedinična 3×3 matrica kojoj su stupci elementi kanonske baze u $\mathbb{R}^3$, vidi malo niže primjer 7.6.

Postupak je sličan Gaussovim eliminacijama nepoznanica, samo što sve transformacije izvodimo na stupcima matrice. Prvo poništavamo elemente u gornjem trokutu matrice (v_1, v_2, v_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

U prvom i drugom koraku izvodimo elementarne transformacije $(a, b, c) \mapsto (a, b-a, c)$ i $(a, b, c) \mapsto (a, b, c-2a)$ koristeći prvi stupac da bismo dobili nule u prvom retku. U trećem koraku izvodimo transformaciju $(a, b, c) \mapsto (a, b, c-b)$ koristeći drugi stupac da bismo dobili nulu u drugom retku, ne "kvareći" pritom već dobivene nule u prvom retku. Zatim nastavljamo s elementarnim transformacijama, prvo "popravljajući" treći stupac transformacijom tipa 4.2, a potom poništavajući elemente u donjem trokutu matrice u trećem retku koristeći treći stupac

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomoću drugog stupca dovršimo postupak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.13. Svođenje matrice na trokutastu ili stepenastu formu primjenom elementarnih transformacija. Kod rješavanja niza problema u linearnoj algebri primijenjivat ćemo kompozicije elementarnih transformacija tako da konačan rezultat bude donja trokutasta ili donja stepenasta matrica, kao što je kompozicija elementarnih transformacija iz prethodnog primjera

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Za $n \times k$ matricu

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}$$

je postupak sljedeći[12]:

[12]Ovdje opisani postupak po stupcima matrice je potpuno analogan postupku svođenja matrice na stepenasti oblik, ali po recima, opisan u točki 1.3.10 prethodnog poglavlja.

1) Ako je $\alpha_{11} \neq 0$, onda prvi stupac matrice množimo s $1/\alpha_{11}$ i dobivamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} = (a'_1, a_2, \dots, a_k).$$

Nakon toga, koristeći 1 iz prvog stupca, "eliminiramo" redom sve preostale elemente iz prvog retka dodavanjem $-\alpha_{12}a'_1$ drugom stupcu, $-\alpha_{13}a'_1$ trećem stupcu, $\dots$, $-\alpha_{1k}a'_1$ zadnjem stupcu:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha'_{n2} & \dots & \alpha'_{nk} \end{pmatrix} = (a'_1, a'_2, \dots, a'_k).$$

Sada postupak nastavljamo na $n \times (k-1)$ matrici

$$(a'_2, \dots, a'_k) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n2} & \dots & \alpha'_{nk} \end{pmatrix}.$$

Valja primijetiti da elementarne transformacije na stupcima $a'_2, \dots, a'_k$ neće "kvariti" već dobivene nule u prvoj koordinati.
2) Ako je $\alpha_{11} = 0$ i $\alpha_{1j} \neq 0$ za neki indeks stupca j, onda zamijenimo prvi i j-ti stupac i nastavimo kao pod 1).
3) Ako je čitav prvi redak nula, tj.

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix},$$

onda smo gotovi ako je matrica nula, a ako $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nije nul-matrica, onda postupak provodimo za prvi netrivijalni redak kao u 1) ili 2).

Konačni će rezultat biti u *donjoj stepenastoj formi po stupcima* kod koje su svi nul-stupci desno od svih stupaca koji nisu nula i u svakom stupcu prvi element različit od nule stoji niže od prvog elementa različitog od nule u prethodnom stupcu.

Prvi element u stupcu koji je različit od nule zove se *ugaoni* ili *stožerni element* matrice.

Na primjer, za proizvoljne brojeve na mjestu zvjezdica imamo 6×5 donju stepenastu matricu kod koje su svi ugaoni elementi jednaki 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na sličan način elementarnim transformacijama matricu možemo svesti na gornju stepenastu formu po stupcima[13] započinjući postupak sa zadnjim retkom koji nije nula i zadnjim stupcem.

4.14. Reducirana stepenasta forma matrice. U prethodnoj smo točki opisali kako elementarnim transformacijama stupaca matricu možemo svesti na donju stepenastu formu po stupcima. Taj postupak možemo nastaviti tako da svaki ugaoni element bude 1 i da onda s tom jedinicom eliminiramo sve ostale ne-nul elemente u tom retku. Za dobivenu matricu kažemo da je u *reduciranom stepenastom obliku.*

U slučaju 6×5 donje stepenaste matrice iz prethodne točke dobivamo reduciranu stepenastu matricu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.15. Primjer svođenja 2×4 matrice na donju stepenastu formu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a reducirana stepenasta forma je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricu smo mogli svesti i na gornju stepenastu po stupcima

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[13] U *gornjoj stepenastoj formi po stupcima* svaki nul-stupac stoji lijevo od svih stupaca koji nisu nula i u svakom stupcu zadnji element različit od nule stoji više od zadnjeg elementa različitog od nule u slijedećem stupcu. Valja primijetiti da gornja stepenasta forma po stupcima nije (nužno) isto što i gornja stepenasta forma po recima.

a reducirana stepenasta forma je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

4.16. Primjer svođenja 4×2 matrice na donju stepenastu formu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

a reducirana stepenasta forma je

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matricu smo mogli svesti i na gornju stepenastu po stupcima

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2 & 1/6 \\ 1 & -1/6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 7/6 & 1/6 \\ 11/6 & -1/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a reducirana stepenasta forma je

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1/11 & 1/6 \\ 7/11 & 1/6 \\ 1 & -1/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/11 & 12/66 \\ 7/11 & 18/66 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.17. Zadatak. Elementarnim transformacijama na stupcima svedite na reducirani donji stepenasti oblik matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.18. Primjedba. Posebno su važne donje trokutaste matrice (α_{ij}) sa svim dijagonalnim elementima α_{ii} različitim od nule. Takva je trokutasta matrica i donje stepenasta, a njenim svođenjem na reducirani donji stepenasti oblik dobivamo tzv. jediničnu matricu s jedinicama na dijagonali i s ostalim elementima jednakim nuli. Raspisano za 4×4 matricom imamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha'_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & 1 & 0 \\ \alpha'_{41} & \alpha'_{42} & \alpha'_{43} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdje jedinice na dijagonali dobivamo dijeljenjem j-tog stupca s α_{jj}, a potom eliminiramo redom sve nedijagonalne elemente α'_{4j} u zadnjem tetku, α'_{3j} u predzadnjem retku, itd.

4.19. Zadatak. Elementarnim transformacijama na stupcima svedite na gornji trokutasti oblik matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.20. Elementarne transformacije na recima matrice. Budući da matricu tipa $n \times m$ možemo shvatiti i kao niz od n vektor-redaka iz $\mathbb{R}^m$, to elementarne transformacije možemo primijeniti i na retke matrice. Tako, na primjer, imamo elementarnu transformaciju zamjene prvog i trećeg retka matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.21. Pitanje. Da li je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

elementarna transformacija redaka matrice? DA NE

4.22. Elementarne transformacije redaka i Gaussove eliminacije. U točki 1.3.4 prethodnog poglavlja opisane su elementarne transformacije sistema jednadžbi koje koristimo u Gaussovoj metodi rješavanja sistema jednadžbi. Ako kod Gaussovih eliminacija zapisujemo samo koeficijente matrice sistema, kao u točki 1.3.9 prethodnog poglavlja, onda su elementarne transformacije sistema jednadžbi upravo elementarne transformacije redaka matrice sistema.

4.23. Elementarne transformacije prostora $\mathbb{R}^n$. Elemente od $\mathbb{R}^n$ obično zapisujemo kao vektor-stupce, odnosno $n \times 1$ matrice. Na takvim matricama možemo provoditi elementarne transformacije po recima, kao što je, na primjer, zamjena i-te i j-te koordinate vektora

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mapsto x' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Znači da imamo preslikavanje

$$x \mapsto x', \qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

koje zovemo *elementarnom transformacijom prostora* $\mathbb{R}^n$. Budući da svaka elementarne transformacija ima inverznu, *elementarna transformacija prostora* $\mathbb{R}^n$ *je bijekcija na* $\mathbb{R}^n$. Primijetimo da *za svaku elementarnu transformaciju prostora* $\mathbb{R}^n$ *vrijedi tzv. svojstvo linearnosti*

$$a + b \mapsto a' + b', \qquad \lambda a \mapsto \lambda a'.$$

Na primjer, ako se radi o elementarnoj transformaciji množenja i-te koordinate skalarom $\mu \neq 0$, onda je

$$a+b = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_i+\beta_i \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \mu(\alpha_i+\beta_i) \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \mu\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \mu\beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = a' + b',$$

a slično se provjeri i svojstvo $\lambda a \mapsto \lambda a'$.

5. Linearne kombinacije i sistemi jednadžbi

5.1. Linearne kombinacije vektora u $\mathbb{R}^n$. Ako su zadani vektori a_1, a_2, ..., a_s u $\mathbb{R}^n$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, onda možemo računati vektor

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s.$$

Takav izraz ili vektor zovemo *linearnom kombinacijom vektora* $a_1, a_2, \dots, a_s$ s *koeficijentima* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$.

5.2. Primjer. Vektor

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

je linearna kombinacija vektora

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

u $\mathbb{R}^2$ s koeficijentima 2, 1, -1 i 0. U ovoj kombinaciji možemo izostaviti sumand $0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) = 0$ i pisati

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a da još uvijek kažemo da je to linearna kombinacija četiri vektora (5.1).

5.3. Zadatak. Izračunajte linearnu kombinaciju vektora

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

s koeficijentima 0, 0, 2 i 2.

5.4. Trivijalna linearna kombinacija vektora. Linearnu kombinaciju

$$0a_1 + \cdots + 0a_s$$

vektora $a_1, \ldots, a_s$ u kojoj su svi koeficijenti nula zovemo *trivijalnom linearnom kombinacijom vektora* $a_1, \ldots, a_s$. Očito je trivijalna kombinacija vektora jednaka nuli, tj.

$$0a_1 + \cdots + 0a_s = 0.$$

5.5. Netrivijalna linearna kombinacija vektora. Kažemo da je linearna kombinacija vektora

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s$$

netrivijalna ako je barem jedan od skalara $\lambda_i \neq 0$. Tako je, na primjer,

$$1a_1 + 0a_2 \cdots + 0a_s$$

netrivijalna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

5.6. Pitanje. Da li je linearna kombinacija

$$0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

netrivijalna? DA NE

5.7. Primjer. Može se dogoditi da netrivijalna linearna kombinacija vektora bude jednaka nuli:

$$2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

5.8. Računanje linearne kombinacije elementarnim transformacijema. Za zadane vektore $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ u $\mathbb{R}^n$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ linearnu kombinaciju

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s$$

možemo računati koristeći elementarne transformacije

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2, \ldots, a_s, 0)\\
&\mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_s, \lambda_1 a_1)\\
&\mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_s, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)\\
&\qquad\vdots\\
&\mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_s, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s)\\
&= (a_1, a_2, \ldots, a_s, b).
\end{aligned}$$

Tako bi linearnu kombinaciju iz primjera 5.2 računali pomoću tri elementarne transformacije

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ovdje se prirodno nameće pitanje: možemo li elementarnim transformacijama stupaca matrice $(a_1, \dots, a_s, b)$ utvrditi da je zadani vektor b linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_s$, ili, drugim riječima, utvrditi da postoje skalari $\xi_1, \dots, \xi_s$ takvi da je

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_s a_s = b\,? \tag{5.2}$$

Odgovor na to pitanje dajemo u točki 7.19 niže, a u sljedećoj točki o problemu (5.2) razmišljamo na drugi način:

5.9. Linearne kombinacije u $\mathbb{R}^m$ i sistemi jednadžbi. Neka je zadan sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= \beta_1\,, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2\,, \\ &\cdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= \beta_m\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Označimo li s $a_1, \dots, a_n$ stupce matrice sistema i s b desnu stranu, onda sistem jednadžbi (5.3) možemo zapisati i kao problem nalaženja svih linernih kombinacija vektora $a_1, \dots, a_n$ koje daju vektor b:

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b. \tag{5.4}$$

5.10. Primjer. Sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 5, \\ -\,\xi_1 + \xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

istovjetan je problemu nalaženja svih linearnih kombinacija stupaca matrice sistema koje su jednake desnoj stranu sistema, odnosno problemu nalaženja svih koeficijenata ξ_1, ξ_2, ξ_3 takvih da je

$$\xi_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

5.11. Primjer. Pitanje da li je vektor b linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3 za

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

svodi se na pitanje da li sistem jednadžbi (5.5) ima rješenje. Zapišemo li Gaussove eliminacije na matrici sistema (5.5) dobivamo

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

pri čemu treća matrica odgovara ekvivalentnom sistemu

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_3 &= 0, \\ \xi_2 + 2\xi_3 &= 5 \end{aligned}$$

koji ima beskonačno mnogo rješenja, a jedno je rješenje, na primjer, $\xi_3 = 2$, $\xi_2 = 1$, $\xi_1 = 2$. Znači da vektor b možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2, a_3 na beskonačno mnogo načina, a jedan je mogući način

$$b = 2a_1 + a_2 + 2a_3.$$

5.12. Zadatak. Da li je vektor b linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3 za

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i, ako jest, koliko različitih načina zapisa ima?

5.13. Zadatak. Nađite bar jednu netrivijalnu linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2, a_3 i a_4 koja je jednaka nuli, gdje je

$$a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Linearne kombinacije i linearna preslikavanja

6.1. Definicija linearnog preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. Kažemo da je preslikavanje

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

linearno preslikavanje ili *linearan operator* ako za sve vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ i sve skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \qquad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Ako je A linearno, onda je običaj umjesto $A(x)$ pisati Ax.

6.2. Primjer. Elementarne transformacije prostora $\mathbb{R}^n$ definirane u točki 4.23 su primjer linearnih preslikavanja s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$.

6.3. Linearne funkcije. Uz oznake iz prethodne točke za $m = 1$ imamo poseban slučaj linearnog preslikavanja

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

kojeg zovemo *linearna funkcija* ili *linearni funkcional na* $\mathbb{R}^n$. Ako je A linearna funkcija, onda je za vrijednost funkcije u točki x običaj pisati $A(x)$, a ne Ax.

6.4. Pitanje. Za koje je $n = 0, 1, 2, 3$ funkcija f_n linearna funkcija,

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n\,?$$

6.5. Linearna preslikavanja i linearne kombinacije. Primijetimo da je zbrajanje vektora $x+y$ operacija u području definicije $\mathbb{R}^n$ preslikavanja A, a da je zbrajanje vektora A(x)+A(y) operacija u području vrijednosti $\mathbb{R}^m$ preslikavanja A. Grubo govoreći, u slučaju linearnog preslikavanja je svejedno da li izvodimo operacije zbrajanja i množenja skalarom prije "primjene" preslikavanja A ili nakon "primjene" preslikavanja A. To vrijedi i za proizvoljne linearne kombinacije:

$$A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s. \tag{6.1}$$

DOKAZ. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po s. Za $s = 1$ tvrdnja vrijedi jer po pretpostavci imamo $A(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 A x_1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $s \geq 1$. Tada je

$$\begin{aligned}
&A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s + \lambda_{s+1} x_{s+1})\\
&= A((\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) + \lambda_{s+1} x_{s+1})\\
&= A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) + A(\lambda_{s+1} x_{s+1})\\
&= (\lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s) + \lambda_{s+1} A x_{s+1}\\
&= \lambda_1 A x_1 + \cdots + \lambda_s A x_s + \lambda_{s+1} A x_{s+1}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da druga jednakost vrijedi zbog pretpostavljenog svojstva za sumu dva vektora. □

6.6. Linearna preslikavanja i pravci u $\mathbb{R}^n$. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje i neka je

$$p = \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}$$

pravac u $\mathbb{R}^n$ kroz točke a i b. Ako je $Aa \neq Ab$, onda je zbog linearnosti

$$A((1-t)a + tb) = (1-t)Aa + tAb$$

i slika pravca p pod preslikavanjem A je pravac

$$A(p) = A\left(\{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}\right) = \{(1-t)Aa + tAb \mid t \in \mathbb{R}\}$$

u $\mathbb{R}^m$ kroz točke Aa i Ab. No moguće je i $Aa = Ab$ i u tom je slučaju slika pravca p pod preslikavanjem A točka

$$A(p) = A\left(\{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}\right) = \{(1-t)Aa + tAb \mid t \in \mathbb{R}\} = \{Aa\}.$$

6.7. Pitanje. Preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano kao projekcija

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, 0)$$

na x-os je linearno preslikavanje (provjerite!). Koji se pravci u $\mathbb{R}^2$ preslikavaju u pravce, a koji u točke?

6.8. Zadatak. Dokažite da elementarne transformacije prostora $\mathbb{R}^n$ pravce uvijek prevode u pravce i nikad u točke. Nacrtajte odgovarajuće slike za sva tri tipa elementarnih transformacija prostora $\mathbb{R}^2$.

6.9. Zadavanje linearnog preslikavanja matricom. Neka je zadan niz od n vektora $a_1, a_2, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$, odnosno $m \times n$ matrica

$$(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Tada za svaku n-torku brojeva

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

imamo linearnu kombinaciju vektora

$$A(x) = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n \in \mathbb{R}^m. \tag{6.3}$$

Znači da je gornjom formulom zadano preslikavanje

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto A(x). \tag{6.4}$$

Tako definirano preslikavanje je linearno. Naime, za $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ i $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ imamo $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$, pa zbog svojstava operacija zbrajanja i množenja skalarom u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m$ imamo

$$\begin{aligned} A(x+y) &= (\xi_1 + \eta_1)a_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n)a_n \\ &= (\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n) + (\eta_1 a_1 + \dots + \eta_n a_n) = A(x) + A(y). \end{aligned}$$

Nadalje, iz definiciji množenja skalarom λ u $\mathbb{R}^n$ imamo $\lambda x = (\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n)$, pa je

$$A(\lambda x) = (\lambda\xi_1)a_1 + \dots + (\lambda\xi_n)a_n = \lambda(\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n) = \lambda A(x),$$

6.10. Primjer. Linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano je nizom od tri vektora

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formulom

$$A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ 2\xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix}.$$

6.11. Pitanje. Da li je matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zadano linearno preslikavanje s $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^4$? DA NE

6.12. Pitanje. Kojom je matricom zadano linearno preslikavanje

$$A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \\ 3\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix} ?$$

6.13. Množenje matrice i vektora. Za $m \times n$ matricu

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$

i vektor $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ u $\mathbb{R}^n$ linearnu kombinaciju vektora

$$Ax = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n \in \mathbb{R}^m.$$

obično zovemo *produktom matrice A i vektora x* i pišemo:

$$Ax = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \alpha_{21}\xi_1 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Primijetimo da je definirano množenje matrice s vektorom **samo** za $m \times n$ matrice A s vektor-stupcem x tipa $n \times 1$, i da je rezultat vektor-stupac Ax tipa $m \times 1$. Istaknimo to kao "formulu"

$$(m \times n) \cdot (n \times 1) = (m \times 1).$$

Stavimo li $b = Ax$ i označimo li koordinate vektora b s $\beta_1, \dots, \beta_m$, tada formulu (6.5) za množenje matrice s vektorom možemo zapisati kraće kao

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \qquad \text{za sve} \quad i = 1, \dots, m. \tag{6.6}$$

Naravno, za množenje matrice i vektora vrijedi svojstvo linearnosti

$$A(x + y) = Ax + Ay, \qquad A(\lambda x) = \lambda Ax. \tag{6.7}$$

6.14. Primjeri produkta matrice i vektora.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.15. Pitanje. Da li je definiran produkt matrice i vektora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ? \qquad \text{DA} \quad \text{NE}$$

7. Linearna ljuska vektora u $\mathbb{R}^n$

7.1. Linearna ljuska vektora u $\mathbb{R}^n$. Za vektore[14] $v_1, \dots, v_k$ u $\mathbb{R}^n$ možemo promatrati skup svih njihovih linearnih kombinacija

$$\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^n\}.$$

Taj skup zovemo *linearnom ljuskom vektora* $v_1, \dots, v_k$ i označavamo ga kao

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Za svaki $i = 1 \dots, k$ imamo $v_i \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ jer je

$$v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_k.$$

7.2. Primjedba. Ako je $v \neq 0$ vektor u $\mathbb{R}^n$, onda je linearna ljuska $\langle v \rangle$ pravac kroz ishodište, a ako vektori $v_1 \neq 0$ i $v_2 \neq 0$ nisu proporcionalni, onda je linearna ljuska $\langle v_1, v_2 \rangle$ ravnina kroz ishodište. Zato si geometrijski linearne ljuske $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ vektora u $\mathbb{R}^n$ možemo zamišljati kao poopćenje pravaca i ravnina u prostoru $\mathbb{R}^n$.

S druge strane, linearnu ljusku vektora $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ u $\mathbb{R}^m$ možemo shvatiti algebarski kao skup svih desnih strana b sistema $m \times n$ jednadžbi

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b$$

koji imaju rješenje $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ili, ekvivalentno, kao sliku

$$\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

linearnog preslikavanja (6.4) zadanog matricom $(a_1, \dots, a_n)$.

Geometrijski i algebarski način razmišljanja se plodotvorno dopunjuju. Tako je, na primjer, geometrijski jasno da elementarne transformacije

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1', \dots, a_n')$$

ne mijenjaju linearnu ljusku vektora[15], a onda kao algebarska posljedica slijedi da gornji sistem ima rješenje ako i samo ako ima rješenje sistem

$$\xi_1' a_1' + \cdots + \xi_n' a_n' = b$$

s novom matricom sistema $(a_1', \dots, a_n')$ i istom desnom stranom b.

7.3. Linearna ljuska je potprostor u $\mathbb{R}^n$. Neka su $v_1, \dots, v_k$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Ako je

$$a, b \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

onda su i $a + b$ i μa opet linearne kombinacije iz $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, tj.

$$a + b,\ \mu a \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Zbog tog svojstva za linearnu ljusku $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ kažemo da je *zatvorena za operacije zbrajanja i množenja skalarom* i zovemo je *potprostorom od* $\mathbb{R}^n$. Također kažemo da vektori $v_1, \dots, v_k$ *razapinju potprostor* $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

---

[14] Ponekad nam je zgodno misliti da se radi o skupu vektora $\{v_1, \dots, v_k\}$, a ponekad je zgodnije misliti da se radi o nizu vektora $(v_1, \dots, v_k)$.

[15] Algebarski dokaz te tvrdnje dan je u točki 7.16 malo niže

Dokaz. Ako je

$$a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \quad \text{i} \quad b = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k,$$

onda zbog svojstava zbrajanja i množenja skalarom imamo

$$a+b = (\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k)+(\beta_1 v_1+\cdots+\beta_k v_k) = (\alpha_1+\beta_1)v_1+\cdots+(\alpha_k+\beta_k)v_k,$$

$$\mu a = \mu(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = (\mu\alpha_1)v_1 + \cdots + (\mu\alpha_k)v_k.$$

□

7.4. Primjer. Neka je zadan vektor $e = (1, 0)$ u $\mathbb{R}^2$. Taj vektor razapinje potprostor

$$\langle e\rangle = \{\lambda e \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\0\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Geometrijski interpretirano to je x-os Kartezijevog sustava u euklidskoj ravnini. Ta os je očito zatvorena za zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom.

7.5. Primjer. Neka su zadani vektori e_1, e_2 u $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Tada imamo potprostor u $\mathbb{R}^2$ razapet vektorima e_1, e_2,

$$\langle e_1, e_2\rangle = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\0\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Geometrijski interpretirano to je xy-ravnina Kartezijevog sustava u euklidskom prostoru. Ta ravnina je očito zatvorena za zbrajanje vektora po pravilu paralelograma, a očito je zatvorena i za množenje vektora skalarom.

7.6. Primjer: kanonska baza u $\mathbb{R}^3$. Neka su zadani vektori e_1, e_2, e_3 u $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Tada se potprostor $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ u $\mathbb{R}^3$ razapet vektorima e_1, e_2, e_3 sastoji od svih linearnih kombinacija

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\lambda_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}.$$

No to su svi vektori u $\mathbb{R}^3$! Vektore e_1, e_2, e_3 zovemo *kanonskom bazom od* $\mathbb{R}^3$, a geometrijski ih interpretirano kao jedinične vektore triju osi izabranog Kartezijevog sustava u euklidskom prostoru.

7.7. Zadatak. Neka je $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Interpretirajte $\mathbb{R}^2$ kao ravninu i nacrtajte linearne ljuske $\langle v_1\rangle$, $\langle v_2\rangle$ i $\langle v_1, v_2\rangle$.

7.8. Jednakost linearni ljuski vektora u $\mathbb{R}^n$. Neka su $a_1, \dots, a_r$ i $b_1, \dots, b_s$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Prema točkama 7.1 i 7.3 je $a_1, \dots, a_r \in \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ ako i samo ako je $\langle a_1, \dots, a_r \rangle \subset \langle b_1, \dots, b_s \rangle$.

Znači da vrijedi jednakost linearnih ljuski $\langle a_1, \dots, a_r \rangle = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ ako i samo ako je

$$a_1, \dots, a_r \in \langle b_1, \dots, b_s \rangle \quad i \quad b_1, \dots, b_s \in \langle a_1, \dots, a_r \rangle.$$

Primijetimo da se zadnji uvjet svodi na rješavanje r sistema jednadžbi tipa $n \times s$ i s sistema jednadžbi tipa $n \times r$.

7.9. Zadatak. Koristeći tvrdnju iz prethodne točke provjerite da li je $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$ za vektore

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7.10. Zadatak. Pokažite da je linearna ljuska vektora

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

čitav prostor $\mathbb{R}^3$ koristeći činjenicu da je linearna ljuska $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ vektora kanonske baze čitav prostor $\mathbb{R}^3$.

7.11. Lema. *Za vektore $v_1, \dots, v_m$ i $p < m$ vrijedi*

$$\langle v_1, \dots, v_p \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Naime, proširimo linearne kombinacije vektora $v_1, \dots, v_p$ do linearnih kombinacija vektora $v_1, \dots, v_m$ "dodavanjem nule"

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + 0 v_{p+1} + \dots + 0 v_m.$$

7.12. Lema. $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1} \rangle$ *ako i samo ako je*

$$v_{m+1} \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Naime, $v_{m+1} = 0v_1 + \dots + 0v_m + 1v_{m+1} \in \langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1} \rangle$, pa jednakost linearnih ljuski povlači $v_{m+1} \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Obratno, ako je vektor v_{m+1} u $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$, odnosno $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$, onda za linearne kombinacije imamo

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} \left(\sum_{i=1}^m \mu_i v_i \right) = \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_m' v_m,$$

što povlači $\langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1} \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Jednakost linearnih ljuski sada slijedi iz prethodne leme.

7.13. Primjer. Neka je zadan niz od tri vektora (e, e, e) u $\mathbb{R}^2$, $e = (1, 0)$. Budući da je $\mu_1 e + \mu_2 e + \mu_3 e = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)e$, to je linearna ljuska $\langle e, e, e\rangle$ tih vektora jednaka

$$\langle e, e, e\rangle = \{\lambda e \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\0\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

odnosno

$$\langle e, e, e\rangle = \langle e\rangle.$$

7.14. Pitanje. Neka je dan niz od četiri vektora $(0, 0, 0, 0)$ u $\mathbb{R}^3$. Da li je linearna ljuska tih vektora $\langle 0, 0, 0, 0\rangle = \{0\} \subset \mathbb{R}^3$? DA NE

7.15. Zadatak. Primjenom leme 7.12 i rješavanjem sistema jednadžbi $\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 = a_4$ utvrdite da li su jednake linearne ljuske $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ i $\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$ za vektore

$$a_1 = \begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}?$$

7.16. Linearna ljuska vektora i elementarne transformacije. *Neka je niz vektora $v'_1, \dots, v'_k$ dobiven elementarnim transformacijama iz niza $v_1, \dots, v_k$. Tada je*

$$\langle v'_1, \dots, v'_k\rangle = \langle v_1, \dots, v_k\rangle.$$

Dokaz. Pretpostavimo da smo proveli elementarnu transformaciju

$$v'_1 = v_1 + \mu v_2,\ v'_2 = v_2, \dots,\ v'_k = v_k.$$

Neka je $\lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_k v'_k$ u linearna kombinacija u $\langle v'_1, \dots, v'_k\rangle$. Tada je

$$\lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_n v'_n = \lambda_1 v_1 + (\lambda_1\mu + \lambda_2)v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_k\rangle.$$

Time smo dokazali $\langle v'_1, \dots, v'_k\rangle \subset \langle v_1, \dots, v_k\rangle$. Budući da je inverzna elementarna transformacija istoga tipa, slijedi i $\langle v_1, \dots, v_k\rangle \subset \langle v'_1, \dots, v'_k\rangle$. Tvrdnja leme za ostale slučajeve elementarnih transformacija dokazuje se na sličan način. □

7.17. Primjer. Neka su v_1, v_2, v_3 vektori iz $\mathbb{R}^3$ kao u primjeru 4.12

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Budući da niz vektora (v_1, v_2, v_3) elementarnim transformacijama možemo prevesti u kanonsku bazu (e_1, e_2, e_3), to je prema prethodnoj točki

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle e_1, e_2, e_3\rangle.$$

No linearna ljuska $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ vektora kanonske baze je čitav prostor $\mathbb{R}^3$, pa imamo

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \mathbb{R}^3.$$

7.18. Zadatak. Riješite zadatak 7.10 koristeći lemu 7.16.

7.19. Pitanje egzistencije rješenja sistema jednadžbi. Na pitanje ima li sistem jednadžbi

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b \tag{7.1}$$

rješenje možemo odgovoriti rješavanjem sistema Gaussovom metodom eliminacija, dakle izvođenjem elementarnih transformacija na recima proširene matrice sistema.

S druge strane, elementarnim transformacijama stupaca matricu sistema $(a_1, \dots, a_n)$ možemo prevesti u reduciranu donju stepenastu matricu $(a'_1, \dots, a'_n)$. Prema prethodnoj točki je linearna ljuska stupaca nove i stare matrice ista, pa sistem (7.1) ima rješenje ako i samo ako sistem

$$\xi'_1 a'_1 + \cdots + \xi'_n a'_n = b \tag{7.2}$$

ima rješenje. Pretpostavimo da su u reduciranoj stepenastoj matrici ugaoni element na mjestima $(i_1, 1), (i_2, 2), \dots, (i_r, r)$. Tada elementarnim transformacijama na stupcima matrice

$$(a'_1, a'_2, \dots, a'_s, b) \mapsto \dots \mapsto (a'_1, a'_2, \dots, a'_s, b'),$$

eliminiramo koordinate u b na mjestima $i_1, i_2, \dots, i_r$ i dobijemo

$$b' = b - c = b - \beta_{i_1} a'_1 - \beta_{i_2} a'_2 - \cdots - \beta_{i_r} a'_r.$$

Ako je $b' = 0$, onda je $b = c$ linearna kombinacija vektora $a'_1, a'_2, \dots, a'_s$ i sistem (7.2) ima rješenje. Ako je $b' = b - c \neq 0$, onda b nije linearna kombinacija vektora $a'_1, a'_2, \dots, a'_s$ jer je c jedinstvena kombinacija tih vektora koja na mjestima $i_1, i_2, \dots, i_r$ ima koordinate $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$, a ipak nije b!

7.20. Primjer. Neka je

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama stupaca matricu (a_1, a_2, a_3) možemo prevesti u reducirani stepenasti oblik (a'_1, a'_2, a'_3): Prvo je svodimo na stepenasti oblik

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

a onda i na reducirani stepenasti oblik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prema točki 7.16 su linearne ljuske od a_1, a_2, a_3 i a_1', a_2', a_3' jednake, pa sistem s proširenom matricom sistema

$$(a_1, a_2, a_3, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \beta \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ima rješenje ako i samo ako sistem s proširenom matricom sistema

$$(a_1', a_2', a_3', b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ima rješenje. Jasno je da je drugi sistem lakše riješiti: jedina kombinacija vektora a_1', a_2', a_3' za koju je prva koordinata 1, treća koordinata 2 i četvrta koordinata 3 je

$$c = a_1' + 2a_2' + 3a_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

pa ako je $\beta = 1$ onda sistem ima rješenje, a ako je $\beta \neq 1$ onda sistem nema rješenje. To smo mogli izračunati i eliminacijom koordinata u b na mjestima ugaonih elemenata reducirane stepenaste matrice

$$\begin{aligned} (a_1', a_2', a_3', b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (a_1', a_2', a_3', b') \end{aligned}$$

i zaključiti da sistem ima rješenje ako je $b' = 0$ i nema rješenje ako je $b' \neq 0$.

7.21. Zadatak. Elementarnim transformacijama na stupcima utvrdite da li sistem jednadžbi s proširenom matricom sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ima rješenje.

8. Potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$

8.1. Definicija potprostora vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Neka je W neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je W *potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$ ako je *zatvoren za operacije zbrajanja vektora i množenje vektora skalarom*, tj. ako vrijedi:

(1) za sve $a, b \in W$ je $a + b \in W$,
(2) za sve $a \in W$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda a \in W$.

8.2. Nul-potprostor. Neka je $W = \{0\}$, tj. skup čiji je jedini element nula u $\mathbb{R}^n$. Budući da je $0 + 0 = 0$ i $\lambda 0 = 0$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, to je $W = \{0\}$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Potprostor $\{0\}$ zovemo *nul-potprostorom vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$ i označavamo ga s 0.

8.3. Trivijalni potprostori. Očito je $W = \mathbb{R}^n$ potprostor od $\mathbb{R}^n$. Potprostore 0 i $\mathbb{R}^n$ zovemo *trivijalnim potprostorima* vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

8.4. Primjer. Skup W svih vektora u $\mathbb{R}^3$ oblika

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je potprostor. Interpretiramo li $\mathbb{R}^3$ geometrijski, onda je potprostor W ravnina u prostoru koja sadrži prve dvije koordinatne osi.

8.5. Primjer. Skup

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 > 0 \right\}$$

nije potprostor u $\mathbb{R}^2$. Doduše, za $a, b \in W$ vrijedi $a + b \in W$, ali $(-1)a$ nije u W, pa općenito ni λa nije u W (nacrtajte sliku).

8.6. Pitanje. Da li je skup

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \right\}$$

potprostor u $\mathbb{R}^2$? DA NE

8.7. Svojstva operacija zbrajanja i množenja skalarom elemenata potprostora. Po definiciji potprostora W vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, na W imamo definirane operacija zbrajanja i množenja skalarom. Operacija zbrajanja je asocijativna i komutativna. Ako je w vektor iz W, onda je po pretpostavci $0 = 0 \cdot w$ iz W, pa potprostor W ima i element 0 za operaciju zbrajanja. Budući da je $-w = (-1) \cdot w$, to zajedno s elementom w potprostor W sadrži i suprotan element $-w$. Znači da operacija zbrajanja vektora iz W ima sva algebarska svojstva zbrajanja vektora u $\mathbb{R}^n$ popisana u točki 2.3. Očito je da i operacija množenja vektora iz W skalarom ima sva algebarska svojstva popisana u točki 2.3.

8.8. Linearna kombinacija elemenata potprostora. Ako je W potprostor i $a_1, \dots, a_k$ vektori u W, onda iz definicije neposredno slijedi da je i svaka linearna kombinacija $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ element potprostora W.

8.9. Potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ su "ravni" podskupovi. Ravnina Σ u Euklidskom prostoru je "ravna" jer za svake dvije točke $a, b \in \Sigma$ sadrži i čitav pravac kroz te dvije točke, tj.

$$(1-t)a + tb \in \Sigma \quad \text{za sve} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Iz prethodne točke slijedi da takvo svojstvo ima i svaki potprostor W, pa možemo reći da su potprostori "ravni" podskupovi vektorskog prostora.

8.10. Linearna ljuska vektora je potprostor od $\mathbb{R}^n$. U točki 7.3 smo dokazali da je linearna ljuska

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

vektora $v_1, \dots, v_k$ u $\mathbb{R}^n$ vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$.

8.11. Svi netrivijalni potprostori od $\mathbb{R}^3$. *Geometrijska nam intuicija kaže da su, osim skupa $\{0\}$ i samog $\mathbb{R}^3$, pravci i ravnine kroz ishodište jedini podskupovi od $\mathbb{R}^3$ zatvoreni za zbrajanje vektora po pravilu paralelograma i množenje vektora skalarom.* Da bismo to i dokazali pretpostavimo da je W potprostor od $\mathbb{R}^3$ i da je $W \neq 0$. Tada postoji vektor $v \neq 0$ u W i, budući da je W zatvoren za množenje skalarom, W sadrži pravac $p = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ako W nije taj pravac p, onda postoji $w \neq 0$ u W koji nije proporcionalan v i, budući da je W zatvoren za zbrajanje i množenje skalarom, W sadrži ravninu $\Pi = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Ako W nije ni ta ravnina Π, onda je $W = \mathbb{R}^3$. Naime, ako W nije Π, onda postoji vektor b u W koji nije linearna kombinacija vektora v i w. To znači da sistem jednadžbi

$$\xi_1 v + \xi_2 w = b$$

nema rješenja. No onda nema rješenja ni sistem

$$\xi_1' v' + \xi_2' w' = b$$

kojemu je matrica sistema reducirana stepenasta forma (v', w') matrice (v, w). Budući da $v \neq 0$ i $w \neq 0$ nisu proporcionalni, reducirana stepenasta matrica (v', w') je oblika

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako na mjestima ugaonih elemenata u matrici (v', w', b) eliminiramo koordinate od b, kao u točki 7.19, dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & \beta \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Budući da b nije linearna kombinacija v' i w', to u svakom od tri slučaja mora biti $\beta \neq 0$, i svaku od tih matrica možemo svesti na matricu (e_1, e_2, e_3) vektora kanonske baze u $\mathbb{R}^3$. Budući da za linearne ljuske imamo

$$\langle v, w, b\rangle = \langle v', w', b\rangle = \langle v', w', b'\rangle = \langle e_1, e_2, e_3\rangle = \mathbb{R}^3,$$

to W sadrži sve vektore iz $\mathbb{R}^3$, pa je $W = \mathbb{R}^3$.

8.12. Primjedba. Gornji dokaz je malo dug i nespretan, ali koristi samo ono što smo dosada naučili. U idućem ćemo poglavlju naučiti pojmove i rezultate iz kojih će puno lakše slijediti opis svih potprostora, ne samo u $\mathbb{R}^3$, nego i općenito u $\mathbb{R}^n$.

8.13. Zadatak. Pokažite da su svi netrivijalni potprostori u $\mathbb{R}^2$ pravci kroz ishodište.

8.14. Zadatak. Pokažite da je skup svih rješenja $x = (\xi_1, \xi_2)$ homogene jednadžbe

$$\xi_1 - 3\xi_2 = 0$$

vektorski potprostor u $\mathbb{R}^2$. Interpretirajte taj skup geometrijski u euklidskoj ravnini.

8.15. Zadatak. Pokažite da je skup svih rješenja $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ homogenog sistema jednadžbi

$$\xi_1 - \xi_2 = 0, \quad \xi_2 - \xi_3 = 0$$

pravac kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$.

8.16. Teorem. *Skup svih rješenja homogenog sistema jednadžbi*

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= 0\,, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= 0\,, \\ &\cdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= 0 \end{aligned}$$

je vektorski potprostor u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Označimo li s $a_1, \ldots, a_n$ stupce matrice sistema A, onda homogeni sistem jednadžbi možemo zapisati kao

$$Ax = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = 0.$$

Za dva rješenja x i y iz svojstva linearnosti (6.7) slijedi

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0 \quad \text{i} \quad A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda 0 = 0.$$

Znači da je skup svih rješenja zatvoren za zbrajanje i množenje skalarom. $\square$

8.17. Dva važna pitanja o potprostorima u $\mathbb{R}^n$. Iz svega što smo u ovoj točki rekli nameću se dva pitanja:

(1) Da li je svaki potprostor u $\mathbb{R}^n$ linearna ljuska $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ za neke vektore $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$?

(2) Da li je svaki potprostor u $\mathbb{R}^n$ skup svih rješenja homogenog sistema jednadžbi $\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = 0$ za neke vektore $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$?

Na prvo pitanje odgovorit ćemo u sljedećem poglavlju, a na drugo u poglavlju o skalarnom produktu u $\mathbb{R}^n$[16].

[16] Na oba je pitanja odgovor potvrdan.

POGLAVLJE 3

Baza vektorskog prostora

U ovom poglavlju uvodimo pojam kanonske baze od $\mathbb{R}^n$ i pokazujemo da je svako linearno preslikavanje zadano matricom. Potom uvodimo opći pojam baze u $\mathbb{R}^n$ i pokazujemo da svaka baza ima n elemenata, a da li su dani vektori baza provjeravamo korištenjem elementarnih transformacija. Uvodimo pojam linearno nezavisnog skupa vektora u $\mathbb{R}^n$ i dokazujemo da se svaki linearno nezavisni skup može nadopuniti do baze. Zatim definiramo konačno dimenzionalne vektorske prostore i pokazujemo da navedena svojstva baze vrijede i općenito. Posebno je važna posljedica razmatranja općih vektorskih prostora da je svaki realni n-dimenzionalni vektorski prostor izomorfan $\mathbb{R}^n$.

1. Kanonska baza u $\mathbb{R}^n$

1.1. Kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Skup vektora u $\mathbb{R}^n$ oblika

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

zovemo *kanonskom bazom vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$. Primijetimo da vektor kanonske baze e_j ima j-tu koordinatu 1, a sve ostale 0. Na primjer, skup vektora

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je kanonska baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Svaki vektor x u $\mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

Koeficijente $\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_n$ u toj linearnoj kombinaciji – zapravo koordinate od x – zovemo još i *koordinatama vektora x u kanonskoj bazi.* Kraće kažemo da smo vektor x *prikazali* ili *zapisali u kanonskoj bazi*, pri čemu je ξ_1 *prva koordinata vektora x u kanonskoj bazi,* ξ_2 *druga koordinata*, itd. Na primjer, vektor x u $\mathbb{R}^3$ možemo zapisati u kanonskoj bazi kao

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Primjer.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2 + 0e_3 + 2e_4,$$

pa je u kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3, e_4 od $\mathbb{R}^4$ prva koordinata vektora a jednaka 1, druga koordinata je -2, treća koordinata je 0 i četvrta koordinata je 2.

1.3. Zadatak. Prikažite vektor

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{R}^5$.

1.4. Jedinična matrica. Kvadratnu $n \times n$ matricu

$$I = (e_1, \dots, e_n)$$

čiji su stupci $e_1, \dots, e_n$ elementi kanonske baze prostora $\mathbb{R}^n$ zovemo *jediničnom matricom* i obično je označavamo s I. Na primjer,

$$1 = I, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

gdje je redom I jedinična matrica tipa 1×1, tipa 2×2 i tipa 4×4.

1.5. Pitanje. Da li su

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jedinične matrice? DA NE

1.6. Geometrijska interpretacija kanonske baze u $\mathbb{R}^2$. Vektorski si prostor $\mathbb{R}^2$ zamišljamo kao euklidsku ravninu u kojoj smo izabrali pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, pa uređeni par brojeva (α_1, α_2) u $\mathbb{R}^2$ predstavlja koordinate točke a u ravnini. U su toj interpretaciji vektori e_1, e_2 kanonske baze jedinični vektori izabranog Kartezijevog sustava.

2. Matrica linearnog preslikavanja

U paragrafu 2.6 prethodnog poglavlja definirali smo pojam linearnog preslikavanja
$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
i pokazali smo kako $m \times n$ matricom možemo zadati linearno preslikavanje. U ovom paragrafu pokazujemo da se svako linearno preslikavanje može prikazati na taj način. Na samom početku dajemo neke primjere geometrijski zadanih linearnih preslikavanja:

2.1. Primjer: identiteta $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je linearno preslikavanje. Običaj je identitetu na skupu $\mathbb{R}^n$ označavati s I. Identiteta je očito linearno preslikavanje
$$I(x+y) = x+y = I(x)+I(y), \qquad I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x).$$

2.2. Pitanje. Da li je centralna simetrija $x \mapsto -x$ u $\mathbb{R}^3$ linearno preslikavanje? DA NE

2.3. Primjer: rotacija u ravnini za kut $\frac{\pi}{2}$ je linearno preslikavanje. Preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano formulom
$$A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\xi_2\\ \xi_1\end{pmatrix}$$
je linearno preslikavanje. Naime,
$$A(a+b) = A\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(\alpha_2+\beta_2)\\ \alpha_1+\beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\beta_2\\ \beta_1\end{pmatrix} = Aa+Ab,$$
a na sličan način vidimo i
$$A(\lambda a) = A\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda\alpha_2\\ \lambda\alpha_1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \lambda Aa.$$

Linearnost preslikavanja A možemo dokazati i geometrijski: Interpretiramo li $a = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{smallmatrix}\right)$ kao vektor-strelicu u euklidskoj ravnini, onda je vektor-strelica $Aa = \left(\begin{smallmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{smallmatrix}\right)$ dobiven iz a rotacijom oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$ (nacrtajte sliku!). Rotacija A prevodi paralelogram s vrhovima $0, a, b, a+b$ u paralelogram s vrhovima $0, Aa, Ab, A(a+b)$, a ovaj drugi mora biti (zbog definicije zbrajanja vektor-strelica) paralelogram $0, Aa, Ab, Aa+Ab$. Sada jednakost vrhova daje relaciju
$$A(a+b) = Aa+Ab.$$
Na sličan geometrijski način možemo dokazati i relaciju
$$A(\lambda a) = \lambda Aa.$$

2.4. Primjer: rotacija u ravnini za kut φ je linearno preslikavanje. Geometrijski argument o linearnosti rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ možemo ponoviti za bilo koju rotaciju oko ishodišta: *rotacija $R_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oko ishodišta u euklidskoj ravnini za kut φ je linearno preslikavanje.*

2.5. Linearno preslikavanje određeno je vrijednostima na kanonskoj bazi. Neka je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearano preslikavanje i $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Tada su u potpunosti određeni vektori

$$a_1 = Ae_1, \quad a_2 = Ae_2, \quad \dots \quad a_n = Ae_n$$

u $\mathbb{R}^m$, napišimo ih kao

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Budući da je A linearno, dovoljno je znati vektore $a_1, a_2, \dots, a_n$ da bi odredili Ax za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Naime, proizvoljni vektor $x \in \mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način zapisati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n,$$

pa zbog linearnosti preslikavanja A imamo

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 Ae_1 + \cdots + \xi_n Ae_n = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n. \tag{2.1}$$

Znači da je vektor Ax izražen kao linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$ u kojoj su koeficijenti koordinate $\xi_1, \dots, \xi_n$ vektora x:

$$Ax = \xi_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \xi_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.6. Pitanje. Da li je linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ određeno vrijednostima u kanonskoj bazi e_1, e_2, e_3 prostora $\mathbb{R}^3$? DA NE

2.7. Matrica linearnog preslikavanja. Razmatranje u prethodnoj točki pokazuje da je linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u potpunosti određeno n-torkom vektora $(Ae_1, \dots, Ae_n) = (a_1, \dots, a_n)$ iz $\mathbb{R}^m$ koju zovemo *matricom linearnog preslikavanja A u kanonskoj bazi* i zapisujemo kao

$$(Ae_1, \dots, Ae_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica je tipa $m \times n$.

2.8. Matrica linearnog preslikavanja zadanog matricom. Primijetimo li da je i-ta koordinata vektora e_i kanonske baze jednaka 1, a sve ostale 0, onda vidimo da za linearno preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definirano u prethodnom poglavlju formulom (2.6.3) vrijedi

$$Ae_i = a_i.$$

Znači da je matrica (2.6.2) s kojom smo zadali linearno preslikavanje A u stvari matrica $(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ tog linearnog preslikavanja A.

2.9. Matrica identitete je jedinična matrica. Budući da je za identitetu $Ie_j = e_j$, to su stupci matrice preslikavanja $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ upravo elementi kanonske baze prostora $\mathbb{R}^n$

$$I = (e_1, \ldots, e_n),$$

tj. jedinična matrica tipa $n \times n$.

2.10. Pitanje. Da li je $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrica centralne simetrije $x \mapsto -x$ u $\mathbb{R}^3$? DA NE

2.11. Primjer: matrica rotacije u ravnini za kut φ. Rotacija $A = R_\varphi$ oko ishodišta za kut φ je linearno preslikavanje, pa je u potpunosti određeno vektorima (nacrtajte sliku!)

$$a_1 = Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad a_2 = Ae_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Matrica rotacije za kut φ je

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Posebno su matrice rotacija za kuteve 0, $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3\pi}{2}$ redom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.12. Zadatak. Napišite matrice rotacija u $\mathbb{R}^3$ za kuteve 0, $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3\pi}{2}$ oko 1) x-osi, 2) y-osi i 3) z-osi.

2.13. Zadatak. Geometrijskim argumentom dokažite da je refleksija u euklidskoj ravnini s obzirom na simetralu prvog kvadranta linearno preslikavanje. Napišite matricu odgovarajućeg linearnog preslikavanja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

2.14. Matrica linearne funkcije. Kao i u općem slučaju, linearna je funkcija $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana vrijednostima $A(e_1) = \alpha_1, \ldots, Ae_n = \alpha_n$ na kanonskoj bazi, odnosno $1 \times n$ matricom

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Vrijednost funkcije $A(x)$ računamo po formuli

$$A(x) = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \cdots + \alpha_n\xi_n.$$

Na primjer, $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3$ je linearna funkcija na $\mathbb{R}^3$ s matricom $(1, -3, 4)$.

3. Baze u $\mathbb{R}^n$

3.1. Definicija baze u $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je skup vektora $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *baza od* $\mathbb{R}^n$ ili *baza u* $\mathbb{R}^n$ ako svaki vektor x u $\mathbb{R}^n$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}.$$

Pokazat ćemo (teoremi 3.8 i 5.16) da svaka baza u $\mathbb{R}^n$ ima n elemenata, tj. da mora biti $s = n$.

Očito kanonska baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$ od $\mathbb{R}^n$ jest baza u $\mathbb{R}^n$.

3.2. Napomena. Možda nije na odmet posebno istaknuti da se u definiciji baze zahtijevaju **dva** svojstva: 1) da za svaki vektor x u $\mathbb{R}^n$ **postoji** prikaz u obliku linearne kombinacije od $a_1, \ldots, a_s$ i 2) da je za svaki vektor x takav prikaz **jedinstven**. Ako vrijedi prva tvrdnja, onda obično kažemo da vektori $a_1, \ldots, a_s$ *razapinju* $\mathbb{R}^n$.

3.3. Geometrijska interpretacija baze u $\mathbb{R}^2$. Ako si vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ zamislimo kao euklidsku ravninu u kojoj smo izabrali pravokutni Kartezijev koordinatni sustav s jediničnim vektorima e_1, e_2, onda su vektori neke druge baze a_1, a_2 u $\mathbb{R}^2$ jedinični vektori kosokutnog koordinatnog sustava s koordinatnim osima $\langle a_1 \rangle$ i $\langle a_2 \rangle$.

3.4. Primjer. Vektori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

čine bazu u $\mathbb{R}^2$ (nacrtajte sliku pripadnog kosokutnog koordinatnog sustava!). Naime, za vektor $x \in \mathbb{R}^2$ uvjet $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Kao što smo već u točki 2.5.9 primijetili, zapisano po koordinatama to je sistem jednadžbi

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \xi_1, \qquad \lambda_1 - \lambda_2 = \xi_2$$

s nepoznanicama λ_1 i λ_2 koji za svaki izbor koordinata ξ_1 i ξ_2 ima jedinstveno rješenje

$$\lambda_1 = (\xi_1 + \xi_2)/2, \qquad \lambda_2 = (\xi_1 - \xi_2)/2.$$

Znači da svaki vektor x možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2. Tako, na primjer, imamo jedinstveni zapis vektora $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{5}{2}a_2$. (Nacrtajte sliku tog vektora u kosokutnom koordinatnom sustavu s koordinatnim osima $\langle a_1 \rangle$ i $\langle a_2 \rangle$.)

3.5. Baze u $\mathbb{R}^n$ i sistemi jednadžbi. Točka 2.5.9 i prethodni primjer pokazuju da općenito možemo provjeriti da li je skup vektora $a_1, a_2, \dots, a_s$ baza u $\mathbb{R}^n$ provjeravajući da li sistem jednadžbi

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s = x$$

sa zadanom matricom sistema $A = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ i desnom stranom x ima jedinstveno rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$.

3.6. Zadatak. Pokažite da su vektori $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ baza u $\mathbb{R}^2$.

3.7. Primjer. Da bismo pokazali da vektori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

čine bazu u $\mathbb{R}^3$ trebamo pokazati da za svaki vektor x iz $\mathbb{R}^3$ sistem jednadžbi

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x$$

s nepoznanicama $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i desnom stranom x ima jedinstveno rješenje. Taj ćemo sistem rješavati Gaussovom metodom. Budući da nas ne zanima što je rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, već samo tvrdnja da postoji jedinstveno rješenje za svaku desnu stranu x, to nećemo računati desnu stranu sistema — pisat ćemo samo zvjezdice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & * \\ 1 & 2 & -1 & * \\ -1 & 1 & 1 & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & * \\ 0 & 3 & -3 & * \\ -1 & 1 & 1 & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & * \\ 0 & 3 & -3 & * \\ 0 & 0 & 3 & * \end{pmatrix}.$$

Sada je jasno da primjenom obratnog hoda u Gaussovoj metodi dobivamo jedinstveno rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ za svaku desnu stranu x.

Da smo u ovom primjeru nastavili postupak eliminacijom elemenata u gornjem trokutu matrice sistema, kao rezultat bismo dobili

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix},$$

odakle je sasvim očito da početni sistem jednadžbi ima jedinstveno rješenje.

Valja primijetiti da je bilo sasvim suvišno u Gaussovim eliminacijama pisati zvjezdice umjesto desne strane x sistema — dovoljno je bilo vidjeti da elementarnim transformacijama na jednadžbama matricu početnog sistema možemo prevesti u matricu čiji su stupci elementi kanonske baze

$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto \ldots \mapsto (e_1, e_2, e_3).$$

3.8. Teorem o bazi u $\mathbb{R}^n$ i elementarnim transformacijama redaka matrice. *Neka je $n \times p$ matrica $(v'_1, \ldots, v'_p)$ dobivena elementarnim transformacijama redaka iz matrice $(v_1, \ldots, v_p)$. Tada su stupci matrice $(v'_1, \ldots, v'_p)$ baza od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako su stupci matrice $(v_1, \ldots, v_p)$ baza od $\mathbb{R}^n$.*

Štoviše, ako su stupci $v_1, \ldots, v_p$ baza od $\mathbb{R}^n$, onda je $p = n$ i postoji niz elementarnih transformacija redaka koji matricu $(v_1, \ldots, v_p)$ prevodi u jediničnu matricu $I = (e_1, \ldots, e_n)$.

Dokaz. Dokaz teorema je u suštini ponavljanje argumenata iz prethodnog primjera: Po definiciji 3.1 vektori $v_1, \ldots, v_p$ čine bazu od $\mathbb{R}^n$ ako za svaki vektor x sistem jednadžbi

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = x \tag{3.1}$$

s nepoznanicama $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ i desnom stranom x ima jedinstveno rješenje. Ako je

$$(v_1, \ldots, v_p) \mapsto (v'_1, \ldots, v'_p)$$

elementarna transformacija redaka $n \times p$ matrice, onda za proširenu matricu sistema (3.1) imamo pripadnu elementarnu transformaciju

$$(v_1, \ldots, v_p, x) \mapsto (v'_1, \ldots, v'_p, x')$$

i novi sistem jednadžbi

$$\lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_p v'_p = x' \tag{3.2}$$

ima isti skup rješenja. Posebno, sistem (3.2) ima jedinstveni rješenje za svaki x'. Budući da je elementarno preslikavanje[1] $x \mapsto x'$ bijekcija na $\mathbb{R}^n$, to sistem (3.2) ima jedinstveni rješenje za svaku desnu stranu i vektori $(v'_1, \ldots, v'_p)$ su baza od $\mathbb{R}^n$.

Ako su vektori $v'_1, \ldots, v'_p$ baza od $\mathbb{R}^n$, onda je prema upravo dokazanoj tvrdnji i $v_1, \ldots, v_p$ baza od $\mathbb{R}^n$ jer postoji inverzna elementarna transformacija redaka koja matricu $(v'_1, \ldots, v'_p)$ prevodi u matricu $(v_1, \ldots, v_p)$.

Dokažimo[2] da je $p = n$ ako su vektori $v_1, \ldots, v_p$ baza od $\mathbb{R}^n$. Naime,

$$0 = 0v_1 + \cdots + 0v_p$$

i da je $p > n$ imali bismo, prema teoremu 1.4.3, neko netrivijalno rješenje $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sistema

$$0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \,,$$

[1] vidi točku 2.4.23 u prethodnom poglavlju

[2] Općenitiju tvrdnju teorema 5.16 dokazujemo na sličan način.

suprotno pretpostavci o jedinstvenosti zapisa svakog vektora u bazi $v_1, \ldots, v_p$. S druge strane, da je $p < n$, svođenjem sistema jednadžbi (3.1) Gaussovom metodom na stepenastu formu, recimo

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_p v_p' = x', \tag{3.3}$$

dobili bismo u matrici sistema (3.3) zadnji redak jednak nuli jer ima više jednadžbi nego nepoznanica. No tada za $x' = e_n$ sistem (3.3) ne bi imao rješenja, suprotno već dokazanoj tvrdnji da $v_1', \ldots, v_p'$ mora biti baza od $\mathbb{R}^n$. Znači da je $p = n$.

Neka su vektori $v_1, \ldots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$. Svođenjem $n \times n$ sistema jednadžbi (3.1) Gaussovom metodom na stepenastu formu, recimo (3.3), dobivamo gornju trokutastu matricu sistema kojoj je svaki element na dijagonali različit od nule. Naime, da je u postupku svođenja na stepenastu formu neki od elemenata dijagonale bio nula, onda bi na kraju postupka imali zadnji redak nula – što je nemoguće. No trokutasti sistem kojemu je svaki element na dijagonali različit od nule obratnim hodom Gaussove metode možemo svesti na sistem kojemu je matrica sistema jedinična matrica

$$I = (e_1, \ldots, e_n).$$

□

3.9. Pitanje. Može li $\mathbb{R}^7$ imati bazu od devet elemenata ili $\mathbb{R}^9$ bazu od sedam elemenata? DA NE

3.10. Primjedba. Iz zadnjeg dijela dokaza vidimo da za vektore $v_1, \ldots, v_n$ koji nisu baza svođenjem matrice na gornju stepenastu formu Gaussovim eliminacijama dobivamo matricu $(v_1', \ldots, v_n')$ kojoj je barem zadnji redak nula. *Znači da elementarnim transformacijama na recima za proizvoljnu $n \times n$ matricu možemo ustanoviti jesu li stupci matrice baza od $\mathbb{R}^n$ ili ne.* Na primjer, elementarnim transformacijama na recima dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa zaključujemo da stupci početne matrice nisu baza u $\mathbb{R}^3$.

3.11. Zadatak. Dokažite da vektori v_1, v_2, v_3,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

čine bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

3.12. Zadatak. Dokažite da vektori v_1, v_2, v_3,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nisu baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

3.13. Teorem o bazi u $\mathbb{R}^n$ i elementarnim transformacijama stupaca matrice. *Neka je niz vektora $v'_1, \dots, v'_n$ u $\mathbb{R}^n$ dobiven elementarnim transformacijama iz niza $v_1, \dots, v_n$. Tada je $v'_1, \dots, v'_n$ baza od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $v_1, \dots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$.*

Štoviše, ako je $v_1, \dots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$, onda postoji niz elementarnih transformacija koji tu bazu prevodi u kanonsku bazu $e_1, \dots, e_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da su vektori $v_1, \dots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$ i da smo proveli elementarnu transformaciju oblika

$$v'_1 = v_1 + \mu v_2, \ v'_2 = v_2, \dots, \ v'_n = v_n \,.$$

Tada za proizvoljan vektor v iz $\mathbb{R}^n$ imamo jedinstveni zapis

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

i vrijedi

$$\begin{aligned} v &= \lambda'_1 v'_1 + \lambda'_2 v'_2 + \dots + \lambda'_n v'_n \\ &= \lambda'_1 v_1 + (\lambda'_1 \mu + \lambda'_2) v_2 + \lambda'_3 v_3 + \dots + \lambda'_n v_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

za

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \quad \lambda'_1 \mu + \lambda'_2 = \lambda_2, \quad \lambda'_n = \lambda_n \,. \tag{3.5}$$

Relacije (3.5) možemo shvatiti kao sistem jednadžbi s nepoznanicama λ'_1, λ'_2, ..., λ'_n i zadanom desnom stranom $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. No taj sistem ima jedinstveno rješenje

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 - \lambda_1 \mu, \quad \lambda'_n = \lambda_n \,,$$

pa zato i vektor v ima jedinstveni prikaz (3.4). Znači da je $v'_1, \dots, v'_n$ baza od $\mathbb{R}^n$.

Na sličan način dokazujemo i za druge elementarne transformacije da je $v'_1, \dots, v'_n$ baza ako je $v_1, \dots, v_n$ baza. Budući da svaka elementarna transformacija ima inverznu, to su vektori $v_1, \dots, v_n$ dobiveni elementarnim transformacijama iz niza $v'_1, \dots, v'_n$, pa je $v_1, \dots, v_n$ baza ako je $v'_1, \dots, v'_n$ baza.

Neka je $v_1, \dots, v_n$ baza od $\mathbb{R}^n$. Primjenom niza elementarnih transformacija na stupcima $n \times n$ matricu $(v_1, \dots, v_n)$ možemo svesti na donju trokutastu matricu $(v'_1, \dots, v'_n)$ kojoj su svi dijagonalni elementi različiti od nule. Naime, u suprotnom bi na kraju procesa stepenasta matrica imala zadnji stupac nula, odnosno $v'_n = 0$, pa bi za svaki $\lambda \neq 0$ imali

$$0 = 0v'_1 + \dots + 0v'_{n-1} + \lambda 0.$$

No to je u suprotnosti s već dokazanom tvrdnjom da je $v'_1, \ldots, v'_n$ baza i da, shodno tome, svaki vektor u toj bazi ima jedinstveni zapis.

Iz donje trokutaste matrice $(v'_1, \ldots, v'_n)$ kojoj je svaki element na dijagonali različit od nule lako je dobiti jediničnu matricu

$$I = (e_1, \ldots, e_n)$$

primjenom elementarnih transformacija stupaca: prvo "eliminiramo" elemente u zadnjem retku koristeći zadnji stupac, zatim elemente u predzadnjem retku koristeći predzadnji stupac, itd. □

3.14. Primjer. Da vektori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

čine bazu u $\mathbb{R}^3$ možemo utvrditi i korištenjem elementarnih transformacija na stupcima matrice, pri čemu prvo dobijemo donju trokutastu matricu koja na dijagonali ima elemente različite od nule:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom trokutastu matricu svedemo na jediničnu matricu:

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

3.15. Primjedba. Iz zadnjeg dijela dokaza teorema 3.13 vidimo da za vektore $v_1, \ldots, v_n$ koji nisu baza svođenjem matrice na gornju stepenastu formu elementarnim transformacijama stupaca dobivamo matricu $(v'_1, \ldots, v'_n)$ kojoj je barem zadnji stupac nula. *Znači da elementarnim transformacijama za proizvoljnu $n \times n$ matricu možemo ustanoviti jesu li stupci matrice baza od $\mathbb{R}^n$ ili ne.* Na primjer, elementarnim transformacijama na stupcima dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

pa zaključujemo da stupci početne matrice nisu baza u $\mathbb{R}^3$.

3.16. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije stupaca matrice utvrdite jesu li $v_1, \ldots, v_4$ baza u $\mathbb{R}^4$ za vektore

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

4. Linearna nezavisnost vektora u $\mathbb{R}^n$

4.1. Definicija linearne nezavisnosti vektora u $\mathbb{R}^n$. *Kažemo da su vektori $v_1, \ldots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$ linearno nezavisni ako je samo trivijalna kombinacija tih vektora jednaka nuli, tj. ako*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

povlači

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0.$$

Kažemo da su vektori $v_1, \ldots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$ linearno zavisni ako nisu linearno nezavisni.

4.2. Linearna nezavisnost u $\mathbb{R}^n$ i homogeni sistemi jednadžbi. Svojstvo linearne nezavisnosti vektora u $\mathbb{R}^n$ možemo izreći i u terminima sistema jednadžbi: *vektori $v_1, \ldots, v_p$ su linearno nezavisni ako i samo ako homogeni $n \times p$ sistem jednadžbi*

$$\xi_1 v_1 + \cdots + \xi_p v_p = 0 \tag{4.1}$$

ima jedinstveno rješenja $\xi_1 = \cdots = \xi_p = 0$.

4.3. Primjer. Prema prethodnoj primjedbi pitanje da li su vektori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni svodi se na pitanje da li homogeni sistem jednadžbi

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ima **jedinstveno** rješenje $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$? Sistem rješavamo Gaussovom metodom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa na kraju zaključujemo da homogeni sistem zaista ima jedinstveno rješenje $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Primijetimo da je u ovom postupku bilo suvišno pisati desnu stranu homogenog sistema i da odgovor ovisi samo o matrici sistema (v_1, v_2, v_3) na kojoj smo izvodili elementarne transformacije po recima.

4.4. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije redaka matrice utvrdite jesu li vektori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni?

4.5. Pitanje. Očito su stupci matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni. Možemo li odavle zaključiti da su onda linearno nezavisni i stupci matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

za sve $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ u $\mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$?

4.6. Neposredne posljedice definicije linearne nezavisnosti. Vezano uz definiciju primijetimo sljedeće:

1. Ako je $v \neq 0$, onda je v linearno nezavisan[3]. Naime, $\lambda v = 0$ za netrivijalnu linearnu kombinaciju, tj. $\lambda \neq 0$, daje

$$v = 1 \cdot v = (\tfrac{1}{\lambda}\lambda)v = \tfrac{1}{\lambda}(\lambda v) = \tfrac{1}{\lambda}0 = 0,$$

što je suprotno pretpostavci $v \neq 0$.

2. Ako su vektori $v_1, \dots, v_m$ linearno nezavisni, onda onda su i vektori $v_1, \dots, v_p$ linearno nezavisni za $p < m$. Treba samo provjeriti da

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

povlači $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$. No iz gornje jednakosti “dodavanjem nule” dobivamo

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + 0 v_{p+1} + \cdots + 0 v_m = 0,$$

pa sad iz pretpostavke da su vektori $v_1, \dots, v_m$ linearno nezavisni slijedi da su svi koeficijenti u kombinaciji nula, posebno $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$.

3. Vektori $0, v_1, \dots, v_m$ nisu linearno nezavisni. Naime, imamo netrivijalnu kombinaciju

$$1 \cdot 0 + 0 v_1 + \cdots + 0 v_m = 0.$$

Posebno, ako su $v_1, \dots, v_m$ linearno nezavisni, onda je $v_j \neq 0$ za sve $j = 1, \dots, m$.

[3]Bilo bi bolje da smo rekli: *Ako je $v \neq 0$, onda je skup $\{v\}$ linearno nezavisan.*

4.7. Zadatak. *Dokažite da su vektori v_1 i v_2 linearno nezavisni ako i samo ako nisu proporcionalni.*

4.8. Pitanje. Da li su vektori $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}3\\-3\end{smallmatrix}\right)$ linearno nezavisni? DA NE

4.9. Pitanje. Da li su vektori $v_1, v_2, 0$ linearno nezavisni ako su vektori v_1, v_2 linearno nezavisni? DA NE

4.10. Pitanje. Da li su vektori v_3, v_4 linearno nezavisni ako su vektori v_1, v_2, v_3, v_4 linearno nezavisni? DA NE

4.11. Pitanje. Da li su vektori v_1, v_2, v_3, v_4 linearno nezavisni ako su vektori v_3, v_4 linearno nezavisni? DA NE

4.12. Lema o linearnoj nezavisnosti vektora i elementarnim transformacijama. *Neka je niz vektora $v'_1, \dots, v'_p$ u $\mathbb{R}^n$ dobiven elementarnim transformacijama iz niza $v_1, \dots, v_p$. Tada je $v'_1, \dots, v'_p$ linearno nezavisan ako i samo ako je $v_1, \dots, v_p$ linearno nezavisan.*

DOKAZ. Pretpostavimo da su vektori $v_1, \dots, v_p$ linearno nezavisni i da smo proveli elementarnu transformaciju oblika

$$v'_1 = v_1 + \mu v_2,\ v'_2 = v_2, \dots,\ v'_p = v_p.$$

Neka je

$$\lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_p v'_p = 0,$$

odnosno

$$\lambda_1 v_1 + (\lambda_1 \mu + \lambda_2) v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + \lambda_p v_p = 0.$$

Sada linearna nezavisnost $v_1, \dots, v_p$ povlači

$$\lambda_1 = \lambda_1 \mu + \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

No tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, što dokazuje linearnu nezavisnost vektora $v'_1, \dots, v'_p$. Na sličan način i za druge elementarne transformacije dokazujemo da linearna nezavisnost vektora $v_1, \dots, v_p$ povlači linearnu nezavisnost vektora $v'_1, \dots, v'_p$. Budući da svaka elementarna transformacija ima inverznu, to su vektori $v_1, \dots, v_p$ dobiveni elementarnim transformacijama iz niza $v'_1, \dots, v'_p$, pa linearna nezavisnost $v'_1, \dots, v'_p$ povlači linearnu nezavisnost $v_1, \dots, v_p$. □

4.13. Primjer. Napišimo vektore v_1, v_2, v_3 iz primjera 4.3 kao stupce u matrici i provedimo elementarne transformacije na stupcima

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Za vektore stupce na desnoj strani lako je ustanoviti da, pri utvrđivanju njihove linearne nezavisnosti, odgovarajući sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0,\\ &2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0,\\ &\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\\ &\lambda_1 + 0\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ima jedinstveno trivijalno rješenje $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Znači da su vektori stupci na desnoj strani linearno nezavisni. Iz leme 4.12 slijedi da su vektori v_1, v_2, v_3 u našem primjeru 4.3 linearno nezavisni.

Postupak nismo trebali prekinuti kod homogenog sistema jednadžbi (4.2), već smo mogli nastavit s elementarnim transformacijama stupaca svodeći matricu na reduciranu donju stepenastu formu

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\1&-2&2\\1&0&-4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\1&-2&1\\1&0&-2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\0&0&1\\3&-4&-2\end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\\3&4/3&-2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1/3&4/3&-2\end{pmatrix}$$

dobivši na kraju sistem

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \tfrac{1}{3}\lambda_1 + \tfrac{4}{3}\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0.$$

4.14. Provjera nezavisnosti svođenjem na stepenastu matricu. Gornji nam primjer pokazuje kako i općenito možemo provjeriti linearnu nezavisnost vektora $v_1, \dots, v_p$ u $\mathbb{R}^n$: elementarnim transformacijama stupaca $n \times p$ matricu $(v_1, \dots, v_p)$ svedemo na donju stepenastu matricu

$$(c_1, \dots, c_p).$$

Ako matrica $(c_1, \dots, c_p)$ ima nul-stupac, onda vektori nisu linearno nezavisni, pa prema lemi 4.12 nisu nezavisni ni vektori $v_1, \dots, v_p$. Ako su pak svi vektori u donjoj stepenastoj matrici $(c_1, \dots, c_p)$ različiti od nule, onda imaju ugaone elemente u recima $i_1, \dots, i_p$. Tada u sistemu jednadžbi

$$\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_p c_p = 0 \tag{4.3}$$

prvo gledamo koordinatu na i_1-tom mjestu. Tu vektor c_1 ima ugaoni element $c_{i_1 1} \neq 0$, a ostalim vektorima $c_2, \dots, c_p$ je i_1-ta koordinata nula. Znači da imamo jednadžbu

$$\lambda_1 c_{i_1 1} = 0$$

koja ima jedinstveno rješenje $\lambda_1 = 0$. Tada sistem (4.3) postaje

$$\lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_p c_p = 0.$$

U tom se sistemu ne javlja vektor c_1, pa gledamo koordinatu na i_2-tom mjestu. Tu vektor c_2 ima ugaoni element $c_{i_2 2} \neq 0$, a ostalim vektorima $c_3, \ldots, c_p$ je i_2-ta koordinata nula. Znači da imamo jednadžbu

$$\lambda_2 c_{i_2 2} = 0$$

koja ima jedinstveno rješenje $\lambda_2 = 0$. Nastavljajući postupak zaključujemo da sistem (4.3) ima samo trivijalno rješenje. Znači da su vektori $c_1, \ldots, c_p$ linearno nezavisni, a prema lemi 4.12 su onda nezavisni i vektori $v_1, \ldots, v_p$.

4.15. Zadatak. Koristeći elementarne transformacije stupaca matrice utvrdite jesu li vektori iz zadatka 4.4 linearno nezavisni?

4.16. Druga (ekvivalentna) definicija baze prostora $\mathbb{R}^n$. *Skup vektora $v_1, \ldots, v_s$ je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako*

(1) *vektori $v_1, \ldots, v_s$ razapinju $\mathbb{R}^n$ i*
(2) *$v_1, \ldots, v_s$ je linearno nezavisan skup.*

Dokaz. Ako vrijedi (1), onda svaki vektor $v \in \mathbb{R}^n$ možemo zapisati kao neku linearnu kombinaciju

$$v = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_s v_s,$$

a zbog pretpostavke (2) je taj prikaz jedinstven. Naime,

$$v = \eta_1 v_1 + \cdots + \eta_s v_s = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_s v_s$$

povlači

$$(\eta_1 - \xi_1) v_1 + \cdots + (\eta_s - \xi_s) v_s = 0,$$

pa pretpostavka da su vektori linearno nezavisni daje $\eta_1 = \xi_1, \ldots, \eta_s = \xi_s$.

Obrat. Po definiciji baza razapinje $\mathbb{R}^n$. No baza je i linearno nezavisan skup jer iz relacija

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0 \quad \text{i} \quad 0 v_1 + \cdots + 0 v_s = 0$$

i jedinstvenosti zapisa vektora 0 u bazi slijedi $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_s = 0$. □

4.17. Nadopunjavanje nezavisnog skupa u $\mathbb{R}^n$ do baze. *Ako je $v_1, \ldots, v_k$, $k < n$, linearno nezavisan skup vektora u $\mathbb{R}^n$, onda postoji baza oblika*

$$v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n.$$

Obično kažemo da smo tu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ dobili nadopunjavanjem linearno nezavisnog skupa $v_1, \ldots, v_k$.

Zadani linearno nezavisan skup vektora $v_1, \ldots, v_k$ u $\mathbb{R}^n$ možemo nadopuniti do baze tako da elementarnim transformacijama matricu $(v_1, \ldots, v_k)$ prevedemo u donju stepenastu matricu $(v_1', \ldots, v_k')$ kojoj su ugaoni elementi u recima $j_1, \ldots, j_k$. Ako je

$$\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\},$$

onda umetanjem $n - k$ elementa kanonske kanonske baze $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-k}}$ u tu matricu dobivamo donju trokutastu matricu kojoj su svi dijagonalni elementi različiti od nule. Na primjer, ako je donja stepenasta matrica $(v'_1, \dots, v'_k)$ oblika

$$(v'_1, v'_2, v'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

s ugaonim elementima u recima 1, 3 i 4, onda dodavanjem vektora $e_2, e_5 \in \mathbb{R}^5$ dobivamo

$$(v'_1, e_2, v'_2, v'_3, e_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektori dobivene donje trokutaste matrice

$$v'_1, \dots, v'_k, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}}$$

čine bazu od $\mathbb{R}^n$. Budući da svaka elementarna transformacija ima inverz, te vektore možemo prevesti u niz

$$v_1, \dots, v_k, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}} \tag{4.4}$$

izvodeći elementarne transformacije samo na prvih k vektora. Prema lemi 4.12 vektori 4.4 čine bazu od $\mathbb{R}^n$.

4.18. Primjer. Budući da za vektore v_1, v_2, v_3 iz primjera 4.3 i 4.13 imamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

i da dodavanjem vektora kanonske baze e_4 dobivamo donju trokutastu matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

to je v_1, v_2, v_3, e_4 baza od $\mathbb{R}^4$.

4.19. Pitanje. Neka je $v = (0, 0, 2, 2, 2) \in \mathbb{R}^5$. Da li je e_1, e_2, v, e_4, e_5 baza u $\mathbb{R}^5$? DA NE

4.20. Zadatak. Nadopunite do baze od $\mathbb{R}^3$ linearno nezavisne vektore

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Konačno dimenzionalni vektorski prostori

Osim baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ nama će biti važan i pojam baze vektorskog potprostora prostora $\mathbb{R}^n$. Budući da pojmovi i razmatranja koja ćemo provoditi ne ovise o "prirodi" vektora, već samo o svojstvima operacija zbrajanja i množenja skalarom[4], to je korisno uvesti opći pojam vektorskog prostora.

5.1. Definicija vektorskog prostora. Kažemo da je skup V *vektorski* ili *linearni prostor nad poljem realnih brojeva* $\mathbb{R}$ ako na V imamo zadanu binarnu operaciju *zbrajanja*

$$+\colon V \times V \to V, \qquad (f, g) \mapsto f + g,$$

i operaciju *množenja skalarom*

$$\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V, \qquad (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f,$$

za koje vrijede sljedeća svojstva za sve $f, g, h \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(1) $(f + g) + h = f + (g + h)$ (*asocijativnost zbrajanja*),
(2) postoji element $0 \in V$ takav da je
$f + 0 = 0 + f = f$ (*neutralni element za zbrajanje*),
(3) za svaki f postoji element $-f \in V$ takav da je
$f + (-f) = (-f) + f = 0$ (*suprotni element za zbrajanje*),
(4) $f + g = g + f$ (*komutativnost zbrajanja*).
(5) $1 \cdot f = f$,
(6) $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f$ (*kvazi-asocijativnost*),
(7) $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g, \qquad (\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$
(*distributivnost množenja prema zbrajanju*).

Elemente vektorskog prostora zovemo *vektorima*, a brojeve *skalarima*. Kao i u slučaju n-torki brojeva, vektore ćemo označavati malim latinskim slovima, a skalare malim grčkim slovima. U daljnjem (uglavnom) nećemo pisati množenje vektora skalarom kao $\lambda \cdot f$, već uobičajeno λf. Množenje skalarom uvijek pišemo tako da je vektor na desnoj strani, pa $0v$ nedvosmisleno znači da vektor v množimo skalarom 0, a $\lambda 0$ znači da vektor 0 množimo skalarom λ. Relacija $0v = 0$ znači da vektor v pomnožen skalarom 0 daje vektor 0.

5.2. Svojstva zbrajanja i množenja skalarom. U paragrafu 2.2 prethodnog poglavlja nabrojili smo niz svojstava operacija zbrajanja i množenja skalarom i primijetili da s vektorima računamo "kao s brojevima". Sva navedena svojstva vrijede i u slučaju općenitog vektorskog prostora, premda

[4]Kao primjer dokaza koji ovisi o "prirodi" vektora možemo uzeti dokaz o nadopunjavanju linearno nezavisnog skupa u $\mathbb{R}^n$ do baze u točki 4.17 gdje se bitno koristi činjenica da su vektori $v_1, \dots, v_k$ n-torke realnih brojeva. S druge strane u točki 6.6 dokazujemo općenito da u svakom konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru svaki linearno nezavisan skup vektora možemo nadopuniti do baze.

ih nismo naveli u definiciji. Tako, na primjer, u vektorskom prostoru V vrijedi

$$0a = 0, \quad (-1)a = -a \quad \text{i} \quad \lambda 0 = 0$$

za svaki vektor a u V i svaki skalar λ u $\mathbb{R}$. Da bismo, na primjer, dokazali prvu tvrdnju $0a = 0$ stavimo $b = 0a$. Zbog svojstva skalara 0 imamo $0{+}0 = 0$ i, koristeći distributivnost (7), imamo $0a = (0+0)a = 0a + 0a$, tj. $b = b + b$. Dodamo li objema stranama vektor $-b$, koji prema (3) postoji, dobivamo $0 = b + (-b) = (b + b) + (-b) = b + (b + (-b)) = b + 0 = b$ (ovdje u prvoj jednakosti koristimo svojstvo suprotnog vektora (3), u trećoj asocijativnost zbrajanja (1), u četvrtoj ponovo (3) i u petoj jednakosti (2)). Dakle $b = 0$.

5.3. Zadatak. Dokažite da je u vektorskom prostoru neutralni element za zbrajanje jedinstven[5].

5.4. Linearna preslikavanja. Uz pojam vektorskog prostora vezan je i pojam linearnog preslikavanja: ako je

$$A\colon V \to W$$

preslikavanje s vektorskog prostora V u vektorski prostor W, onda za A kažemo da je *linearno preslikavanje* ili *linearan operator* ako za sve vektore $x, y \in V$ i sve skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \qquad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Grubo govoreći, u slučaju linearnog preslikavanja A svejedno je zbrajamo li vektore i množimo ih skalarima u V prije primjene preslikavanja A, ili prvo primijenimo A i onda odgovarajuće operacije izvodimo na slikama tih vektora u W. Zato linearna preslikavanja zovemo i *homomorfizmima vektorskih prostora*[6] jer kod primjene preslikavanja A operacije zbrajanja i množenja skalarom izgledaju slično za elemente u V i njihove slike u W.

Ako je A linearno, onda je običaj umjesto $A(x)$ pisati Ax.

5.5. Skup izvodnica vektorskog prostora. Za skup vektora $S \subset V$ kažemo da *razapinje vektorski prostor* V, ili da je S *skup izvodnica* ili *skup generatora* vektorskog prostora V, ako je svaki vektor $v \neq 0$ iz V linearna kombinacija nekih vektora $v_1, \ldots, v_n$ iz skupa S. Još ćemo reći da skup S *razapinje vektorski prostor* V, ili da je V *linearna ljuska skupa* S. Po definiciji je prazan skup $\emptyset$ skup izvodnica nul-prostora[7].

---

[5]Uputa: da je $0'$ neki drugi neutralni element, imali bismo $0' = 0' + 0 = 0$.

[6]homomorfan = sličnog oblika na starogrčkom

[7]"Opravdanje" za takav dogovor je da prazan skup $\emptyset$ zadovoljava definiciju skupa izvodnica za nul-prostor 0 jer u nul-prostoru nema vektora $v \neq 0$ kojeg bi trebali napisati kao linearnu kombinaciju nekih vektora iz $\emptyset$.

5.6. Definicija linearno nezavisnog skupa vektora. Neka je V vektorski prostor. Kažemo da je skup vektora $S \subset V$ *linearno nezavisan* ako je za proizvoljan konačan podskup vektora

$$\{v_1, \ldots, v_p\} \subset S$$

samo trivijalna kombinacija tih vektora jednaka nuli, tj. ako

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

povlači

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0.$$

Često kažemo da su vektori $v_1, \ldots, v_p$ linearno nezavisni ako je skup vektora $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linearno nezavisan.

5.7. Primijetimo da je svaki podskup linearno nezavisnog skupa linearno nezavisan skup.

5.8. Definicija baze vektorskog prostora. Za skup vektora $S \subset V$ kažemo da je *baza vektorskog prostora* V ako

(1) skup S razapinje V i ako je
(2) S linearno nezavisan skup.

Prazan skup $\emptyset$ je baza nul-prostora $0 = \{0\}$.

5.9. Definicija konačno dimenzionalanog vektorskog prostora. Kažemo da je vektorski prostor V *konačno dimenzionalan* ako ima neku konačnu bazu[8] $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ako V nije konačno dimenzionalan, onda kažemo da je *beskonačno dimenzionalan vektorski prostor.*

5.10. Teorem. *Neka je vektorski prostor V razapet vektorima $b_1, \ldots, b_m$ i neka su $a_1, \ldots, a_p$ linearno nezavisni vektori u V. Tada je*

$$m \geq p.$$

DOKAZ. Ako je V razapet vektorima $b_1, \ldots, b_m$, onda su svi vektori njihove linearne kombinacije, pa posebno i vektori $a_1, \ldots, a_p$. Neka su to linearne kombinacije

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_{11} b_1 + \cdots + \alpha_{m1} b_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} b_i, \\
a_2 &= \alpha_{12} b_1 + \cdots + \alpha_{m2} b_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i2} b_i, \\
&\vdots \\
a_p &= \alpha_{1p} b_1 + \cdots + \alpha_{mp} b_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ip} b_i
\end{aligned}$$

[8] Prazan skup $\emptyset$ je konačan skup s nula elemenata pa je nul-prostor 0 konačno dimenzionalan vektorski prostor.

za neke koeficijente α_{ij}. Pretpostavimo da je $m < p$. Tada prema teoremu 1.4.3 imamo neko netrivijalno rješenje $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ homogenog sistema od m jednadžbi

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \alpha_{ij} = 0, \qquad i = 1, \dots, m,$$

a onda i netrivijalnu linearnu kombinaciju

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_p a_p = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \alpha_{ij} \right) b_i = 0,$$

suprotno pretpostavci da su vektori $a_1, \dots, a_p$ linearno nezavisni. Znači da pretpostavka $m < p$ vodi do kontradikcije i da mora biti $m \geq p$. □

5.11. Teorem.

(1) *Ako vektori $b_1, \dots, b_m$ razapinju $\mathbb{R}^n$, onda je $m \geq n$.*
(2) *Ako su $a_1, \dots, a_p$ linearno nezavisni vektori u $\mathbb{R}^n$, onda je $p \leq n$.*

Dokaz. Obje su tvrdnje posljedica teorema 5.11 i činjenice da kanonska baza u $\mathbb{R}^n$ ima n elemenata. Naime, u prvom slučaju uspoređujemo m s brojem n nezavisnih vektora kanonske baze, a u drugom slučaju uspoređujemo p s brojem n vektora kanonske baze koji razapinju $\mathbb{R}^n$. □

5.12. Pitanje. Može li biti 7 linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^5$? DA NE

5.13. Pitanje. Može li biti 7 izvodnica u $\mathbb{R}^5$? DA NE

5.14. Pitanje. Može li biti 5 izvodnica u $\mathbb{R}^7$? DA NE

5.15. Pitanje. Može li biti 5 linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^7$? DA NE

5.16. Teorem. *Svake dvije baze u konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru imaju jednak broj elemenata.*

Dokaz. Neka su $a_1, \dots, a_p$ i $b_1, \dots, b_m$ dvije baze vektorskog prostora V. Budući da je V razapet vektorima $b_1, \dots, b_m$ i da su $a_1, \dots, a_p$ linearno nezavisni vektori u V, to je prema teoremu 5.11 $m \geq p$. No budući da je V razapet vektorima $a_1, \dots, a_p$ i da su $b_1, \dots, b_m$ linearno nezavisni vektori u V, to je prema teoremu 5.11 $p \geq m$. Znači da je $p = m$. □

5.17. Definicija dimenzije vektorskog prostora. Broj elemenata baze konačno dimenzionalnog prostora V zovemo dimenzijom prostora i označavamo s $\dim V$. Ako je $\dim V = n$, onda još kažemo da je V n-*dimenzionalni* vektorski prostor. Nul-prostor 0 je 0-dimenzionalan vektorski prostor.

5.18. Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Iz teorema 5.16 i činjenice da kanonska baza od $\mathbb{R}^n$ ima n elemenata slijedi da je dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ jednaka n, tj.

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

5.19. Teorem. *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor i neka su $v_1, \dots, v_n$ vektori u V. Tada je ekvivalentno:*

(1) *$v_1, \dots, v_n$ razapinju V i*
(2) *$v_1, \dots, v_n$ su linearno nezavisan vektori.*

Dokaz. (1) povlači (2): Neka su vektori $v_1, \dots, v_n$ izvodnice od V. Tada pretpostavka da ti vektori nisu linearno nezavisni vodi do kontradikcije: ako postoji netrivijalna linearna kombinacija

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

recimo da je $\lambda_1 \neq 0$, onda je

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n).$$

Izrazimo li proizvoljan vektor x kao linearnu kombinaciju izvodnica $v_1, v_2, \dots, v_n$ dobivamo

$$x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n = \xi_1 \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n) + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n.$$

Iz tog izraza vidimo da se vektor x može izraziti kao linearna kombinacija vektora $v_2, \dots, v_n$, pa slijedi da $n-1$ vektora razapinje V, suprotno tvrdnji teorema 5.11 da je broj izvodnica uvijek veći ili jednak broju n linearno nezavisnih vektora neke baze od V.

(2) povlači (1): Neka su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni. Tada pretpostavka da ti vektori nisu izvodnice od V vodi do kontradikcije: ako postoji vektor v u V koji nije linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_n$, onda su vektori

$$v, v_1, \dots, v_n$$

linearno nezavisni. Naime, ako je

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

onda mora biti $\lambda = 0$, jer bi u suprotnom imali da je v linearna kombinacija

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n.$$

No $\lambda = 0$ daje

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $v_1, \dots, v_n$ slijedi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Znači da imamo $n+1$ linearno nezavisnih vektora $v, v_1, \dots, v_n$, suprotno tvrdnji teorema 5.11 da je broj linearno nezavisnih vektora uvijek manji ili jednak broju n vektora neke baze koji su onda i izvodnice od V. □

6. Nadopunjavanje nezavisnog skupa do baze

Argumente iz dokaza prethodnog teorema 5.19 često koristimo u linearnoj algebri na razne načine. Tako malom izmjenom dokaza tvrdnje (1) povlači (2) dobivamo:

6.1. Redukcija skupa izvodnica do baze. *Neka je* $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *skup izvodnice od* V*. Tada postoji podskup od* S *koji je baza od* V*.*

DOKAZ. Ako je skup izvodnica S linearno nezavisan, onda je S baza od V i naša tvrdnja vrijedi. Ako skup S nije linearno nezavisan, onda postoji netrivijalna linearna kombinacija

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Ako je, recimo, $\lambda_1 \neq 0$, onda vektor v_1 možemo izraziti kao linearnu kombinaciju preostalih vektora $v_2, \ldots, v_n$:

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n).$$

Izrazimo li proizvoljan vektor x kao linearnu kombinaciju izvodnica $v_1, \ldots, v_n$ i u tu kombinaciju uvrstimo dobiveni izraz za v_1, onda za x imamo

$$x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n = \xi_1 \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n) + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n.$$

Iz tog izraza vidimo da se vektor x može izraziti kao linearna kombinacija preostalih vektora $v_2, \ldots, v_n$. Znači da podskup $S \backslash \{v_1\} = \{v_2, \ldots, v_n\}$ skupa S razapinje V. Ako je $S \backslash \{v_1\}$ linearno nezavisan skup, onda je to baza od V i naša tvrdnja vrijedi, a ako nije, onda nastavljamo opisani postupak i u konačno koraka dolazimo do baze koja je podskup od S. $\square$

6.2. Zadatak. Dokažite da vektori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

razapinju $\mathbb{R}^3$ i reducirajte taj skup do baze od $\mathbb{R}^3$.

6.3. Konačno generirani vektorski prostori. Ako vektorski prostor V ima konačan skup izvodnica, onda kažemo da je V *konačno generirani vektorski prostor*. Iz prethodne točke 6.1 slijedi *da je svaki konačno generirani vektorski prostor konačno dimenzionalan.*

6.4. Primjedbe. Slijedimo li postupak opisan u točki 6.1, za zadani skup izvodnica $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vektorskog prostora V možemo u konačno koraka naći podskup koji je baza od V — često kažemo da *skup izvodnica* $v_1, \ldots, v_n$ *reduciramo do baze izbacivanjem linearno zavisnih elemenata* v_j. Pritom u svakom koraku trebamo utvrditi da li je dobiveni skup linearno nezavisan i, ako nije, trebamo naći vektor koji je linearna kombinacija preostalih vektora. U slučaju $V = \mathbb{R}^n$ to možemo utvrditi koristeći elementarne transformacije niza vektora.

Koristeći tvrdnju 6.1 na drugi način možemo dokazati da (1) povlači (2) u teoremu 5.19. Naime, da izvodnice $v_1, \ldots, v_n$ n-dimenzionalnog prostora V nisu linearno nezavisne, njihovom redukcijom dobili bismo bazu koja ima manje od n elemenata, suprotno tvrdnji teorema 5.16 da svaka baza u V ima n elemenata.

Malom izmjenom dokaza tvrdnje (2) povlači (1) teorema 5.19 dobivamo:

6.5. Lema. *Neka je S linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V. Ako S ne razapinje V, onda postoji vektor v u V takav da je*

$$S \cup \{v\}$$

linearno nezavisan skup.

Dokaz. Budući da S ne razapinje V, to postoji vektor v koji nije linearna kombinacija elemenata iz S. Tvrdimo da je za svaki izbor $v_1, \dots, v_n$ iz S skup

$$\{v, v_1, \dots, v_n\}$$

linearno nezavisan. Naime, ako je

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

onda mora biti $\lambda = 0$, jer bi u suprotnom imali da je v linearna kombinacija

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n$$

vektora $v_1, \dots, v_n$ iz S. No $\lambda = 0$ daje

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $v_1, \dots, v_n$ slijedi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Znači da je skup

$$\{v_1, \dots, v_n, v\}$$

linearno nezavisan. Time smo pokazali da je svaki konačan podskup od $S \cup \{v\}$ linearno nezavisan, pa je onda po definiciji i skup

$$S \cup \{v\}$$

linearno nezavisan. □

6.6. Nadopunjavanje linearno nezavisnog skupa do baze. *Neka je $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ linearno nezavisan skup u konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada postoji nadskup od S koji je baza od V.*

Dokaz. Ako skup $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ razapinje V, onda je S baza od V i naša tvrdnja vrijedi. Ako pak S ne razapinje V, onda prema prethodnoj lemi 6.5 postoji vektor v u V takav da je skup

$$S \cup \{v\} = \{v_1, \dots, v_n, v\}$$

linearno nezavisan skup. Ako $S \cup \{v\}$ razapinje V, onda je to baza od V i naša tvrdnja vrijedi, a ako nije, onda nastavljamo opisani postupak. Budući da je po teoremu 5.11 u konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V broj linearno nezavisnih vektora uvijek manji ili jednak dimenziji od V, to u konačno koraka dolazimo do baze koja je naddskup od S. □

6.7. Teorem. *Ako je V potprostor konačno dimenzionalnog vektorskog prostora W, onda je V konačno dimenzionalni vektorski prostor i*

$$\dim V \leq \dim W.$$

Štoviše, $\dim V = \dim W$ *ako i samo ako je* $V = W$*.*

DOKAZ. Ako je $V \neq 0$ potprostor konačno dimenzionalnog vektorskog prostora W, onda postoji vektor $v_1 \neq 0$ u V i $S = \{v_1\}$ je linearno nezavisan skup u V. Budući da su linearno nezavisni vektori u V ujedno i linearno nezavisni vektori u W, to je njihov broj uvijek manji ili jednak $\dim W = m$. Eventualnim dopunjavanjem linearno nezavisnog skupa S, kao u dokazu prethodnog teorema, dobivamo bazu od V.

Ako u V imamo bazu $v_1, \ldots, v_m$ od $m = \dim W$ elemenata, onda je to i linearno nezavisan skup u W, pa je prema teoremu 5.19 to ujedno i baza od W. No ako V i W imaju istu bazu, onda je to jedan te isti prostor $V = W$. □

6.8. Odgovor na prvo važno pitanje o potprostorima u $\mathbb{R}^n$. U točki 2.8.17 prethodnog poglavlje postavili smo dva pitanja o obliku potprostora od $\mathbb{R}^n$. Teorem 6.7 daje potvrdan odgovor na prvo pitanje: *Svaki potprostor u $\mathbb{R}^n$ je k-dimenzionalan za neki $0 \leq k \leq n$ i može se napisati kao linearna ljuska neke svoje baze $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.*

6.9. k-dimenzionalne ravnine u $\mathbb{R}^n$. Iz definicije pravaca i ravnina u $\mathbb{R}^n$ je očito da su pravci kroz ishodište 1-dimenzionalni potprostori, a ravnine kroz ishodište 2-dimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}^n$. Zato k-dimenzionalne potprostore u $\mathbb{R}^n$ zovemo i *k-dimenzionalnim ravninama kroz ishodište*. Općenito za dani vektor b i k-dimenzionalni potprostor V u $\mathbb{R}^n$ skup oblika

$$\Sigma = b + V = \{b + v \mid v \in V\}$$

zovemo *k-dimenzionalnom ravninom* ili kraće *k-ravninom kroz točku b*. Za dvije različite k-ravnine oblika

$$b + V = \{b + v \mid v \in V\} \quad \text{i} \quad c + V = \{c + v \mid v \in V\}$$

kažemo da su *paralelne*[9]. Ako je $v_1, \ldots, v_k$ baza potprostora V, onda imamo *parametarski prikaz* k-ravnine Σ kroz točku b paralelne ravnini V,

$$\Sigma = b + \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{b + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

[9]Općenitije, neka je $Z \subset V$ k'-dimenzionalni potprostor od V. Ako je $c + Z \subset b + V$, onda kažemo da *k'-ravnina $c + Z$ leži u k-ravnini $b + V$*. Ako $c + Z$ ne leži u $b + V$, onda kažemo da je *k'-ravnina $c + Z$ paralelna k-ravnini $b + V$*. Dokažite da paralelene ravnine nemaju zajedničkih točaka!

7. Koordinatizacija

7.1. Izomorfizam vektorskih prostora. Neka su V i W dva vektorska prostora. Ako je preslikavanje

$$f \colon V \to W$$

bijekcija, onda možemo identificirati elemente skupova V i W, na primjer

$$x \longleftrightarrow f(x) \quad \text{i} \quad y \longleftrightarrow f(y).$$

Kažemo da je bijekcija f *izomorfizmam vektorskih prostora*[10] ako zajedno s identifikacijom elemenata možemo identificirati i operacije na tim skupovima, tj. ako je

$$x + y \longleftrightarrow f(x) + f(y), \quad \alpha x \longleftrightarrow \alpha f(x) \tag{7.1}$$

za sve vektore $x, y \in V$ i sve skalare $\alpha \in \mathbb{R}$. Budući da je

$$x + y \longleftrightarrow f(x + y), \quad \alpha x \longleftrightarrow f(\alpha x),$$

to formula (7.1) u stvari znači da je bijekcija f linearno preslikavanje, tj.

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

7.2. Izomorfni vektorski prostori. Kažemo da su dva vektorska prostora V i W *izomorfna* ako postoji neki izomorfizam vektorskih prostora $f \colon V \to W$. Tada pišemo

$$V \cong W.$$

7.3. Baza i uređena baza. Neka je V realan n-dimenzionalni vektorski prostor. Reći ćemo da je niz vektora $(v_1, \dots, v_n)$ *uređena baza od V* ako je skup vektora $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza od V. Tako od kanonske baze $\{e_1, e_2\}$ u $\mathbb{R}^2$ možemo dobiti dvije uređene baze koje zapisujemo kao dvije različite matrice

$$I = (e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = (e_2, e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.4. Baza i koordinatizacija n-dimenzionalnog prostora. Neka je u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V dana uređena baza $B = (v_1, \dots, v_n)$. Tada za svaki vektor x imamo jedinstveni prikaz

$$x = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n.$$

Koeficijente $\xi_1, \dots, \xi_n$ u prikazu vektora x zovemo *koordinatama vektora x u uređenoj bazi $v_1, \dots, v_n$* i kažemo da je koeficijent ξ_1 uz prvi vektor baze *prva koordinata*, koeficijent ξ_2 uz drugi vektor baze *druga koordinata*, itd. Koordinate vektora x obično zapisujemo kao vektor-stupac x_B u $\mathbb{R}^n$,

$$x_B = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

---

[10] izomorfan = istog oblika na starogrčkom

Preslikavanje $f\colon V \to \mathbb{R}^n$ koje svakom vektoru $x \in V$ pridruži njegove koordinate x_B u bazi B je očito bijekcija pa možemo identificirati elemente u V i $\mathbb{R}^n$,

$$x \longleftrightarrow f(x) = x_B = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Štoviše, za $y = \eta_1 v_1 + \cdots + \eta_n v_n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)v_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)v_n, \quad \alpha x = (\alpha\xi_1)v_1 + \cdots + (\alpha\xi_n)v_n,$$

pa je zbog jedinstvenosti zapisa vektora u bazi i-ta koordinata od $x+y$ suma i-tih koordinata od x i od y, a i-ta koordinata od αx je umnožak broja α i i-te koordinata od x. Budući da su operacije zbrajanja i množenja skalarom na $\mathbb{R}^n$ definirane po koordinatama, to je

$$(x+y)_B = x_B + y_B \quad \text{i} \quad (\alpha x)_B = \alpha x_B,$$

odnosno

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Znači da je $f\colon x \mapsto x_B$ izomorfizam vektorskih prostora i

$$V \cong \mathbb{R}^n.$$

Preslikavanje f zovemo *koordinatizacijom od V u uređenoj bazi $v_1, \dots, v_n$*, ili samo *koordinatizacijom od V*. Grubo govoreći, pomoću koordinatizacije svaki realni n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem realnih brojeva "izgleda isto" kao $\mathbb{R}^n$!

7.5. Primjer. Za dvije uređene baze $I = (e_1, e_2)$ i $H = (e_2, e_1)$ u $\mathbb{R}^2$ imamo dvije različite koordinatizacije. U bazi $I = (e_1, e_2)$ imamo

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \mapsto x_I = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

jer je u uređenoj bazi I prva koordinata od x jednaka ξ_1, a druga ξ_2. S druge strane, u bazi $H = (e_2, e_1)$ imamo

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 e_2 + \xi_1 e_1 \mapsto x_H = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

jer je u uređenoj bazi H prva koordinata od x jednaka ξ_2, a druga ξ_1.

7.6. Zadatak. Napiši koordinatizaciju za bazu $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ u $\mathbb{R}^2$.

7.7. Koordinate vektora u novoj bazi od $\mathbb{R}^n$. Neka je dana uređena baza $B = (v_1, \dots, v_n)$ od $\mathbb{R}^n$. Tada su koordinate $x_B = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektora x u bazi B koeficijenti u jedinstvenom prikazu

$$x = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n, \tag{7.2}$$

ili, drugim riječima, *koordinate $x_B = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektora x u bazi B su jedinstveno rješenje $n \times n$ sistema jednadžbi s desnom stranom x i matricom sistema B.*

7.8. Primjer. Koordinate od $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ u bazi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ u $\mathbb{R}^3$ iz primjera 3.14 dobivamo rješavajući sistem jednadžbi s proširenom matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znači da je $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$, $\xi_1 = 1$, odnosno $x_B = (1, 0, 1)$.

7.9. Zadatak. Nađite x_B za $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.10. Primjer. Vektori $v_1 = (1, 1, 2)$ i $v_2 = (2, -1, -1)$ u $\mathbb{R}^3$ čine bazu 2-dimenzionalnog potprostora

$$\Sigma = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\},$$

pa je preslikavanje

$$f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (\lambda_1, \lambda_2)$$

koordinatizacija. Tako, na primjer, f pridružje vektoru $(3, 0, 1) \in \Sigma$ njegove koordinate $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

7.11. Zadatak. Pokažite da je vektor $x = (-1, 2, 3)$ u ravnini Σ iz prethodnog primjera i nađite njegove koordinate $f(x)$.

7.12. Zadatak. Dokažite da su vektori $w_1 = v_1 + v_2$ i $w_2 = v_1 - v_2$ druga baza potprostora Σ iz prethodnog primjera. Nađite vezu između koordinata vektora $x \in \Sigma$ u bazi (v_1, v_2) i bazi (w_1, w_2).

POGLAVLJE 4

Egzistencija i jedinstvenost rješenja sistema jednadžbi

U ovom se poglavlju vraćamo općim pitanjima vezanim za sisteme jednadžbi, posebno pitanjima egzistencije i jedinstvenosti rješenja. Odgovori na ta pitanja dani su u terminima ranga i defekta matrice sistema. Zatim dokazujemo teorem o rangu i defektu i pokazujemo da se svaka k-ravnina u $\mathbb{R}^n$ može zadati sa $n-k$ jednadžbi.

0.13. Svojstvo linearnosti lijeve strane sistema jednadžbi. Neka je $A=(a_1,\dots,a_n)$ matrica tipa $m\times n$. U ovom poglavlju matricu A sistema linearnih jednadžbi $Ax=b$ shvaćamo i kao matricu linearnog preslikavanja koje vektoru x u $\mathbb{R}^n$ s koordinatama $\xi_1,\dots,\xi_n$ pridružuje linearnu kombinaciju[1]

$$Ax=\xi_1a_1+\cdots+\xi_na_n\in\langle a_1,\dots,a_n\rangle. \tag{0.3}$$

U točki 2.6.9 dokazali smo svojstvo linearnosti tog preslikavanja:

$$Ax+Ay=A(x+y)\quad\text{i}\quad A(\lambda x)=\lambda(Ax) \tag{0.4}$$

za sve vektore $x,y\in\mathbb{R}^n$ i skalare $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Rang matrice

1.1. Rang matrice. Neka je je $A=(a_1,\dots,a_n)$ matrica tipa $m\times n$. Tada je prema točki 2.7.3 linearna ljuska stupaca matrice A

$$\langle a_1,\dots,a_n\rangle=\{\xi_1a_1+\cdots+\xi_na_n\mid(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\}$$

vektorski potprostor od $\mathbb{R}^m$. Prema teoremu 3.6.7 taj je potprostor konačno dimenzionalan. Dimenziju linearne ljuske $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ zovemo *rangom matrice* $(a_1,\dots,a_n)$ i pišemo

$$\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}(a_1,\dots,a_n)=\dim\langle a_1,\dots,a_n\rangle.$$

Ponekad se linearna ljuska stupaca matrice zove *područjem vrijednosti od* A i označava s

$$R(A)=\langle a_1,\dots,a_n\rangle.$$

[1]Podsjetimo se da tu linearnu kombinaciju zovemo produktom matrice A i vektora x.

1.2. Primjer. Za jediničnu $n \times n$ matricu I imamo

$$\operatorname{rang} I = \operatorname{rang}(e_1, \dots, e_n) = \dim\langle e_1, \dots, e_n\rangle = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

S druge strane je dimenzija nul-potprostora od $\mathbb{R}^m$ jednaka nuli, pa za $m \times n$ nul-matricu 0 imamo

$$\operatorname{rang} 0 = \operatorname{rang}(0, \dots, 0) = \dim\langle 0, \dots, 0\rangle = \dim 0 = 0.$$

1.3. Primjedba. Prema teoremu 3.6.7 dimenzija svakog potprostora u $\mathbb{R}^m$ manja je ili jednaka $m = \dim \mathbb{R}^m$, pa za $m \times n$ matricu A imamo

$$\operatorname{rang} A \leq m.$$

Prema teoremu 3.5.11 broj generatora veći je ili jednak dimenziji prostora, pa za linearnu ljusku $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ imamo

$$\operatorname{rang} A \leq n.$$

1.4. Rang i elementarne transformacije. Prema točki 2.7.16 elementarne transformacije ne mijenjaju linearnu ljusku, pa to svojstvo koristimo za računaje ranga: elementarnim transformacijama svedemo vektore $A = (a_1, \dots, a_n)$ na oblik

$$(c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0)$$

gdje su $c_1, \dots, c_r$ linearno nezavisni vektori, obično u trokutastoj ili stepenastoj formi[2]. Tada su ti vektori baza potprostora $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$, pa je $\operatorname{rang} A = r$. Na primjer, svođenjem matrice na donje stepenasti oblik dobivamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (c_1, c_2, 0, 0),$$

pa zaključujemo da je $\operatorname{rang} A = 2$.

1.5. Zadatak. Nađite rang matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.6. Pitanje. Da li je $\operatorname{rang}(1, -1, 0, 2) = 3$? DA NE

[2] Vidi točku 3.4.14.

2. Egzistencija rješenja sistema jednadžbi i rang matrice

2.1. Egzistencija rješenja za svaku desnu stranu. Iz samih definicija slijedi da sistem jednadžbi $Ax = b$ ima rješenje ako i samo ako je $b \in R(A)$.

Posebno, sistem jednadžbi $Ax = b$ tipa $m \times n$ ima rješenje za svaku desnu stranu $b \in \mathbb{R}^m$ ako i samo ako je

$$R(A) = \mathbb{R}^m.$$

Prema teoremu 3.6.7 gornja jednakost prostora vrijedi ako i samo ako je

$$\operatorname{rang} A = \dim R(A) = \dim \mathbb{R}^m = m.$$

2.2. Zadatak. Utvrdite ima li sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= \beta_1, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= \beta_2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4 &= \beta_3 \end{aligned}$$

rješenje za svaku desnu stranu (i) rješavajući sistem Gaussovom metodom i (ii) računajući rang matrice sistema.

2.3. Kronecker-Capellijev teorem. *Neka je zadana $m \times n$ matrica $(a_1, \ldots, a_n)$ i vektor b u $\mathbb{R}^m$. Tada sistem jednadžbi*

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b$$

ima rješenje ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema, tj. $\operatorname{rang}(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{rang}(a_1, \ldots, a_n, b)$.

DOKAZ. Sistem jednadžbi ima rješenje ako i samo ako je b linearna kombinacija vektora $a_1, \ldots, a_n$ s nekim koeficijentima $\xi_1, \ldots, \xi_n$, tj. ako i samo ako je

$$b \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle. \tag{2.1}$$

To je, prema lemi 2.7.12, ekvivalentno

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle. \tag{2.2}$$

No budući da je $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \subset \langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle$, prema teoremu 3.6.7 jednakost (2.2) ekvivalentna je jednakosti

$$\dim\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \dim\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle.$$

□

2.4. Primjedba. U točki 3.7.19 pitanje egzistencije rješenja sistema jednadžbi sveli smo na pitanje da li je $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle$ i kako to možemo provjeriti koristeći elementarne transformacije. U Kronecker-Capellijevom teorem idemo korak dalje i pitanje svodimo na provjeru jednakosti dimenzija tih prostora.

2.5. Primjer. Sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= -1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

iz primjera 1.3.7 nema rješenja. To smo u točki 1.3.9 vidjeli Gaussovom metodom izvođenjem elementarnih transformacija na recima proširene matrice sistema:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix},$$

pa sistem (2.3) nema rješenja jer jednadžba

$$0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3 = \tfrac{7}{3}$$

nema rješenja. S druge strane, elementarnim transformacijama na stupcima proširene matrice sistema dobivamo

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \dots$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

i zaključujemo da je rang $A = 3$ i rang $(A, b) = 4$, pa iz Kronecker-Capellijevog teorema slijedi da sistem (2.3) nema rješenja.

2.6. Zadatak. Primjenom Kronecker-Capellijevog teorema utvrdite ima li sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2, \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 2 \end{aligned}$$

rješenje?

3. Defekt matrice

3.1. Defekt matrice. Neka je je $A = (a_1, \dots, a_n)$ matrica tipa $m \times n$. Prema teoremu 2.8.16 skup svih rješenja homogenog sistema jednadžbi

$$N(A) = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_1 a_1 + \dots + a_n \xi_n = 0\}$$

je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ — zovemo ga *nul-potprostorom matrice* A. Prema teoremu 3.6.7 potprostor $N(A)$ je konačno dimenzionalan, a njegovu dimenziju zovemo *defektom matrice* A i pišemo

$$\operatorname{defekt} A = \dim N(A) = \dim\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_1 a_1 + \cdots + a_n \xi_n = 0\}.$$

3.2. Primjer. Za jediničnu $n \times n$ matricu I homogeni sistem ima jedinstveno rješenje $0 \in \mathbb{R}^n$ pa imamo

$$\operatorname{defekt} I = \dim 0 = 0.$$

S druge strane za $m \times n$ nul-matricu 0 je svaka n-torka brojeva rješenje homogenog sistema pa imamo

$$\operatorname{defekt} 0 = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Na primjer,

$$\operatorname{defekt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

3.3. Pitanje. Mora li za $m \times n$ matricu A biti $m \geq \operatorname{defekt} A$? DA NE

3.4. Primjedba. Prema teoremu 3.6.7 dimenzija svakog potprostora u $\mathbb{R}^n$ manja je ili jednaka $n = \dim \mathbb{R}^n$, pa za $m \times n$ matricu A imamo

$$\operatorname{defekt} A \leq n.$$

3.5. Reducirana gornja stepenasta forma matrice. U točki 1.3.10 smo vidjeli kako elementarnim transformacijama redaka matricu možemo svesti na gornju stepenastu formu po recima. Taj postupak možemo nastaviti tako da svaki ugaoni element bude 1 i da onda s tom jedinicom eliminiramo sve ostale ne-nul elemente u tom stupcu. Za dobivenu matricu kažemo da je u *reduciranom gornjem stepenastom obliku.*

U slučaju 5×7 gornje stepenaste matrice (u kojoj umjesto $*$ može biti bilo koji broj) elementarnim transformacijama redaka dobivamo reduciranu gornju stepenastu matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 2 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 3 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kod koje su svi ugaoni elementi jednaki jedan i oni su jedini elementi različiti od nule u svojim stupcima (prvom, drugom, trećem i petom).

3.6. Defekt i elementarne transformacije redaka. Budući da je defekt matrice po definiciji dimenzija prostora rješenja pripadne homogene jednadžbe, to defekt $m \times n$ matrice A određujemo rješavanjem homogenog sistema $Ax = 0$ Gaussovim eliminacijama. Možda je najjednostavniji način da elementarnim transformacijama redaka matricu sistema svedemo na reduciranu gornju stepenastu matricu

$$\begin{pmatrix} 0\dots & 1 & \alpha_{1j_1+1} & \dots & 0 & \alpha_{1j_2+1} & \dots & 0 & \alpha_{1j_3+1} & \dots \\ 0\dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{2j_2+1} & \dots & 0 & \alpha_{2j_3+1} & \dots \\ 0\dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{3j_3+1} & \dots \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

pri čemu su indeksi $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \cdots < j_r \leq n$ indeksi stupaca u kojima se nalazi r ugaonih elementa. Zadnji redak matrice koji nije nula je r-ti redak oblika

$$(0, \dots, 0, 1, \alpha_{rj_r+1}, \dots, \alpha_{rn})$$

(ako je $j_r < n$) i homogeni sistem $Ax = 0$ počinjemo rješavati s pripadnom r-tom jednadžbom

$$\xi_{j_r} + \xi_{j_r+1}\alpha_{rj_r+1} + \cdots + \xi_n\alpha_{rn} = 0.$$

Tu jednadžbu možemo riješiti po nepoznanici ξ_{j_r}

$$\xi_{j_r} = -(\xi_{j_r+1}\alpha_{rj_r+1} + \cdots + \xi_n\alpha_{rn})$$

tako da vrijednosti nepoznanica $\xi_{j_r+1}, \dots, \xi_n$ biramo po volji. U narednom koraku rješavamo $(r-1)$-tu jednadžbu po nepoznanici $\xi_{j_{r-1}}$

$$\begin{aligned} \xi_{j_{r-1}} = &- (\xi_{j_{r-1}+1}\alpha_{r-1,j_{r-1}+1} + \cdots + \xi_{j_r-1}\alpha_{r-1,j_r-1}) \\ &- (\xi_{j_r+1}\alpha_{r-1,j_r+1} + \cdots + \xi_n\alpha_{r-1,n}) \end{aligned}$$

tako da vrijednosti nepoznanica $\xi_{j_{r-1}+1}, \dots, \xi_{j_r-1}$ biramo po volji. Na taj način u r koraka odredimo vrijednosti nepoznanica

$$\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_r}$$

(koje ponekad zovemo *vezanim nepoznanicama*) ovisno o izboru vrijednosti preostalih nepoznanica

$$\xi_j, \quad j \notin \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$$

(koje ponekad zovemo *slobodnim nepoznanicama*). Opće rješenje homogenog sistema možemo zapisati kao vektor

$$v = (\xi_1, \dots, \xi_{j_1-1}, \boxed{\xi_{j_1}}, \xi_{j_1+1}, \dots, \xi_{j_r-1}, \boxed{\xi_{j_r}}, \xi_{j_r+1}, \dots, \xi_n) \tag{3.2}$$

koji ovisi o $n - r$ parametara (tj. slobodnih nepoznanica), a uokvirene vrijednosti su funkcije tih parametara (tj. vezane nepoznanice). Bazu nul-potprostora matrice A možemo dobiti tako da biramo za jednu slobodnu varijablu vrijednost 1 i sve ostale slobodne varijable vrijednost 0:

$$v_n = (0, \dots, 0, \boxed{\xi_{j_1}}, 0, \dots, 0, \boxed{\xi_{j_r}}, 0, \dots, 1) \text{ za } \xi_n = 1, \text{ ostali } \xi_j = 0,$$

$$\dots$$

$$v_{j_r+1} = (0,\dots,0,\boxed{\xi_{j_1}},0,\dots,0,\boxed{\xi_{j_r}},1,\dots,0) \text{ za } \xi_{j_r+1}=1, \text{ ostali } \xi_j = 0,$$

$$v_{j_r-1} = (0,\dots,0,\boxed{\xi_{j_1}},0,\dots,1,\boxed{\xi_{j_r}},0,\dots,0) \text{ za } \xi_{j_r-1}=1, \text{ ostali } \xi_j = 0,$$
$$\dots$$

Očito su dobiveni vektori linearno nezavisni, a lako je vidjeti i da je vektor v dan formulom (3.2) oblika

$$v = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_{j_1-1} v_{j_1-1} + \xi_{j_1+1} v_{j_1+1} + \dots + \xi_{j_r-1} v_{j_r-1} + \xi_{j_r+1} v_{j_r+1} + \dots + \xi_n v_n.$$

Znači da smo dobili bazu od $N(A)$ od $n-r$ vektora, pa je

$$\operatorname{rang} A = n - r.$$

Valja primijetiti da smo na isti način mogli zaključivati i da stepenasta matrica nije bila reducirana.

3.7. Primjer. Za homogeni sistem jednadžbi stepenastog oblika

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 0, \\ \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 0, \\ \xi_5 - 4\xi_6 &= 0 \end{aligned}$$

odmah vidimo da matrica sistema ima 3 ugaona elementa, pa je defekt matrice sistema jednak $6-3=3$. Bazu prostora rješenja dobivamo birajući vrijednosti slobodnih nepoznanica na gore opisani način i određujući odgovarajuće vrijednosti vezanih nepoznanica:

1) $\xi_6 = 1$, $\xi_4 = 0$, $\xi_2 = 0$ daje $\xi_5 = 4$, $\xi_3 = -4$, $\xi_1 = -8$,
2) $\xi_6 = 0$, $\xi_4 = 1$, $\xi_2 = 0$ daje $\xi_5 = 0$, $\xi_3 = -2$, $\xi_1 = -4$,
3) $\xi_6 = 0$, $\xi_4 = 0$, $\xi_2 = 1$ daje $\xi_5 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = -2$.

Time smo dobili bazu nul-potprostora matrice sistema

$$\begin{aligned} v_6 &= (\boxed{-8},0,\boxed{-4},0,\boxed{4},1), \\ v_4 &= (\boxed{-4},0,\boxed{-2},1,\boxed{0},0), \\ v_2 &= (\boxed{-2},1,\boxed{0},0,\boxed{0},0), \end{aligned}$$

pri čemu smo vezane varijable uokvirili kao u prethodnoj točki. Isti rezultat dobivamo ako napišemo rješenje sistema pomoću tri parametra ξ_6, ξ_4 i ξ_2,

$$\begin{aligned} \boxed{\xi_1} &= -2\xi_2 - 4\xi_4 - 8\xi_6 \\ \xi_2 &= \xi_2 \\ \boxed{\xi_3} &= -2\xi_4 - 4\xi_6 \\ \xi_4 &= \xi_4 \\ \boxed{\xi_5} &= 4\xi_6 \\ \xi_6 &= \xi_6 \end{aligned}$$

i onda te parametre "izlučimo" iz vektora općeg rješenja v koji o tim parametrima ovisi

$$v = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi_2 - 4\xi_4 - 8\xi_6 \\ \xi_2 \\ -2\xi_4 - 4\xi_6 \\ \xi_4 \\ 4\xi_6 \\ \xi_6 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_6 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.8. Zadatak. Svedite matricu sistema iz gornjeg primjera na reduciranu gornju stepenastu matricu i nađite na opisani način bazu potprostora rješenja homogenog sistema. U čemu je razlika?

3.9. Zadatak. Odredite defekt matrice A i bazu od $N(A)$ za

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.10. Pitanje. Da li je defekt $(1, -1, 0, 2) = 3$? DA NE

4. Jedinstvenost rješenja sistema jednadžbi i defekt matrice

4.1. Opći oblik rješenja sistema jednadžbi. Pretpostavimo da sistem jednadžbi

$$Ax = b$$

ima rješenje, označimo ga s x_{part} i zovimo ga *partikularnim rješenjem* sistema. Sistem

$$Ax = 0$$

zovemo *pripadnim homogenim sistemom.* Po definiciji je nul-potprostor $N(A)$ skup svih rješenja pripadnog homogenog sistema.

Teorem. *Skup svih rješenja sistema $Ax = b$ je*

$$x_{part} + N(A) = \{x_{part} + y \mid Ay = 0\}.$$

Posebno, x_{part} je jedinstveno rješenje sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $N(A) = 0$.

Dokaz. Po pretpostavci je $Ax_{\text{part}} = b$. Ako je $Ax = b$ za neki x, onda zbog svojstva linearnosti (0.4) za $y = x - x_{\text{part}}$ imamo

$$Ay = A(x - x_{\text{part}}) = Ax - Ax_{\text{part}} = b - b = 0.$$

To znači da je svako rješenje sistema $Ax = b$ oblika

$$x = x_{\text{part}} + y, \quad Ay = 0.$$

Obratno, zbog svojstva linearnosti za vektor x tog oblika imamo

$$Ax = A(x_{\text{part}} + y) = Ax_{\text{part}} + Ay = b + 0 = b,$$

tj. x je rješenje sistema. □

4.2. Jedinstvenost rješenja sistema jednadžbi. Kao što je već naglašeno u gornjem teoremu, iz općeg oblika rješenja sistema $Ax = b$ slijedi da je rješenje[3] **jedinstveno** ako i samo ako je $N(A) = 0$, ili ekvivalentno, ako i samo ako je

$$\operatorname{defekt} A = 0.$$

4.3. Više rješenja ili manje rješenja? Primijetimo da odstupanje od jedinstvenosti rješenja sistema $Ax = b$ mjeri defekt matrice sistema A: ako je $\operatorname{defekt} A = d$ i $v_1, \dots, v_d$ baza u $N(A)$, onda opće rješenje x sistema ovisi o d proizvoljnih parametara:

$$x = x_{\text{part}} + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}.$$

Grubo rečeno, što je veći defekt matrice sistema, to je više rješenja sistema[4]. No s druge strane iz relacije[5]

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{defekt} A = \text{broj nepoznanica sistema } n$$

veći defekt A znači manji $\operatorname{rang} A = \dim R(A)$, a to znači da rješenje sistema $Ax = b$ postoji za manje desnih strana $b \in R(A)$!

4.4. Primjer. Očito sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 4, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - 5\xi_3 &= 4, \\ 4\xi_1 + 5\xi_2 - 9\xi_3 &= 8 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ima jedno rješenje

$$x_{\text{part}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rješavanjem pripadnog homogenog sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - 5\xi_3 &= 0, \\ 4\xi_1 + 5\xi_2 - 9\xi_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

dobivamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & -9 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa su sva rješenja pripadnog homogenog sistema

$$\xi_3 = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \xi_2 = \xi_3 = \lambda, \quad \xi_1 = \xi_3 = \lambda.$$

---

[3]ako postoji

[4]ako postoji bar jedno rješenje x_{part} za danu desnu stranu b!

[5]to je teorem o rangu i defektu kojeg dokazujemo u sljedećoj točki

Znači da su sva rješenja x sistema jednadžbi (4.1) oblika

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.5. Zadatak. Nađite sva rješenja sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 2, \\ \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 1, \\ \xi_5 - 4\xi_6 &= -3. \end{aligned}$$

4.6. Primjedba. Ako je defekt $m \times n$ matrice A jednak d, onda je za $c \in \mathbb{R}^n$ skup rješenja sistema

$$Ax = Ac \tag{4.3}$$

d-ravnina Σ u $\mathbb{R}^n$ kroz točku c oblika

$$\Sigma = c + N(A).$$

Znači da je d-ravnina Σ zadana sistemom (4.3) od m jednažbi. Prirodno se nameće pitanje da li je svaka k-ravnina u $\mathbb{R}^n$ zadana nekim sistemom jednadžbi? Naravno, to je u stvari drugo pitanje iz točke 2.8.17, a na koje ćemo odgovoriti potvrdno na kraju ovog poglavlja korištenjem biortogonalnih baza i u sljedećem poglavlju korištenjem ortonormiranih baza.

5. Teorem o rangu i defektu

5.1. Teorem o rangu i defektu. *Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$ matrica tipa $m \times n$. Tada je*

$$\mathrm{rang} A + \mathrm{defekt} A = n.$$

Dokaz. Za n vektora $v_1, \dots, v_n$ u $\mathbb{R}^n$ imamo n vektora $Av_1, \dots, Av_n$ u $\mathbb{R}^m$, pa možemo gledati $(m+n) \times n$ matrice

$$\begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Na takvim ćemo matricama provoditi elementarne transformacije i, zbog svojstva linearnosti, dobit ćemo matrice istog oblika. Naime, zbog jednakosti $\lambda A v_1 = A(\lambda v_1)$ množenjem prvog stupca matrice (5.1) skalarom $\lambda \neq 0$ dobivamo matricu

$$\begin{pmatrix} A(\lambda v_1) & Av_2 & \dots & Av_n \\ \lambda v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

Isto tako zbog jednakosti $Av_2 + Av_1 = A(v_2 + v_1)$ dodavanjem prvog stupca matrice (5.1) drugom stupcu dobivamo matricu

$$\begin{pmatrix} Av_1 & A(v_2 + v_1) & \dots & Av_n \\ v_1 & v_2 + v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

Budući da je $Ae_j = a_j$, to je

$$\begin{pmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \dots & Ae_n \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama stupaca

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \dots \mapsto (a'_1, \dots, a'_r, 0, \dots, 0)$$

možemo matricu $A = (a_1, \dots, a_n)$ prevesti u donju stepenastu matricu čiji su linearno nezavisni stupci $a'_1, \dots, a'_r$ baza linearne ljuske $R(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Paralelnim izvođenjem istog niza elementarnih transformacija na matricama oblika (5.1) dobivamo

$$\begin{pmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \dots & Ae_n \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} Af_1 & \dots & Af_r & 0 & \dots & 0 \\ f_1 & \dots & f_r & f_{r+1} & \dots & f_n \end{pmatrix},$$

pri čemu su, zbog teorema 3.3.13, vektori $f_1, \dots, f_n$ baza u $\mathbb{R}^n$. Po konstrukciji su $f_{r+1}, \dots, f_n$ linearno nezavisni vektori u $N(A)$. Zbog linearne nezavisnosti vektora $a'_1 = Af_1, \dots, a'_r = Af_r$ slijedi da su vektori

$$f_{r+1}, \dots, f_n$$

baza od $N(A)$. Naime, za vektor x zapisan u bazi

$$x = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_n f_n$$

relacija $Ax = 0$ i svojstvo linearnosti povlači

$$\lambda_1 Af_1 + \dots + \lambda_r Af_r = 0,$$

a onda zbog linearne nezavisnosti $Af_1, \dots, Af_r$ slijedi $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Znači da je

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{defekt} A = r + (n - r) = n.$$

□

Opisanim postupkom možemo za danu matricu A istovremeno tražiti baze od $R(A)$ i $N(A)$. Tako, na primjer, elementarnim transformacijama dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odavle vidimo ne samo bazu

$$(1, 1, 2, -1), \quad (0, 3, 1, -1)$$

od $R(A)$, nego i bazu

$$(-1,-1,1,0), \quad (-2,0,1,1)$$

od $N(A)$

5.2. Zadatak. Nađite baze od $N(A)$ i $R(A)$ za matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

5.3. Zadatak. Nađite opisanim načinom bazu prostora rješenja homogenog sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 0, \\ \xi_3 + 2\xi_4 + 2\xi_5 - 4\xi_6 &= 0, \\ \xi_5 - 4\xi_6 &= 0. \end{aligned}$$

5.4. Pitanje. Da li je defekt 2×4 matrice barem 2 ? DA NE

5.5. Pitanje. Da li je rang 4×2 matrice barem 2 ? DA NE

5.6. Pitanje. Da li je defekt 4×2 matrice barem 2 ? DA NE

5.7. Rang i elementarne transformacije redaka. Ako smo $m \times n$ matricu B dobili iz A uzastopnim elementarnim transformacijama redaka, pišemo

$$B \underset{r}{\sim} A,$$

onda su homogeni sistemi jednadžbi $Ax = 0$ i $Bx = 0$ ekvivalentni, tj.

$$N(B) = N(A).$$

No onda zbog teorema o rangu i defektu imamo jednakost rangova

$$\operatorname{rang} B = n - \dim N(B) = n - \dim N(A) = \operatorname{rang} A.$$

Znači da elementarne transformacije redaka ne mijenjaju rang.

5.8. Rang matrice "po recima i stupcima". Iz gornjeg razmatranja slijedi da pri računanja ranga matrice možemo "istovremeno" koristiti elementarne transformacije i na stupcima i na recima matrice. Na primjer, postupak na primjeru iz točke 1.4 mogli smo nastaviti izvođenjem elementarnih transformacija na recima

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, 0, 0),$$

pri čemu je rang zadnje matrice očito 2.

Općenito $m \times n$ matricu A možemo elementarnim transformacijama na stupcima i recima svesti na oblik

$$(e_1, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0) \tag{5.2}$$

iz kojeg očitavamo $\operatorname{rang} A = r$.

Naime, ako matrica A tipa $m \times n$ nije nula, onda eventualnom zamjenom stupaca i/ili redaka problem svedemo na slučaj $\alpha_{11} \neq 0$. Sada podijelimo prvi stupac s α_{11} i "eliminiramo" sve preostale elemente u prvom retku, a potom i u prvom stupcu. Znači da smo dobili matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha'_{22} & \ldots & \alpha'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha'_{m2} & \ldots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix}$$

i problem sveli na matricu tipa $(m-1) \times (n-1)$.

5.9. Transponirana matrica. Za matricu A tipa $m \times n$ matrica tipa $n \times m$ kojoj su stupci jednaki recima matrice A zovemo *transponiranm matricom od A* i označavamo je s A^t. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.10. Osnovni teorem o rangu matrica. $\operatorname{rang} A^t = \operatorname{rang} A$.

Dokaz. Primijetimo da je prvih r stupaca $e_1, \ldots, e_r$ u matrici (5.2) u stvari prvih r elemenata kanonske baze u $\mathbb{R}^m$. Transponirana matrica ima "isti oblik"

$$(e_1, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0)^t = (e_1, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0), \tag{5.3}$$

"jedino" što je tipa $n \times m$ i $e_1, \dots, e_r$ na desnoj strani je prvih r elemenata kanonske baze u $\mathbb{R}^n$. Na primjer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Budući da su stupci transponirane matrice A^t reci matrice A, a reci od A^t stupci od A, to elementarnim transformacijama možemo "paralelno" svesti A na oblik (5.2), a A^t na oblik (5.3), te zaključiti da je u oba slučaja rang matrice jednak r. □

6. Kanonski produkt na $\mathbb{R}^n$ i dualne baze

6.1. Osnovno pitanje. Do sada smo se susreli s dvije "vrste" potprostora vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$: linearne ljuske konačnog niza vektora

$$R(A) = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$$

i skupa svih rješenja homogenog sistema linearnih jednadžbi

$$N(B) = \{x \mid Bx = 0\}.$$

U prethodnom smo poglavlju pokazali da svaki potprostor W u $\mathbb{R}^n$ ima neku bazu $a_1, \dots, a_k$, pa ga možemo prikazati kao linearnu ljusku $R(A)$ elemenata te baze. Osnovno pitanje na koje želimo odgovoriti jest: *Da li je svaki potprostor W vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ možemo prikazati kao skup svih rješenja $N(B)$ nekog homogenog sistema jednadžbi $Bx = 0$?*

6.2. Kanonski produkt vektora. Kanonski produkt[6] vektora

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

iz $\mathbb{R}^n$ je broj

$$\langle a \mid b \rangle = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

Na primjer, kanonski produkt vektora

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je

$$\langle a \mid b \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 1.$$

[6]Kanonski produkt vektora a i b u $\mathbb{C}^n$ definiran je istom formulom

$$\langle a \mid b \rangle = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n.$$

6.3. Kanonski produkt na $\mathbb{R}^n$. *Kanonski produkt na* $\mathbb{R}^n$ je preslikavanje

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (a, b) \mapsto \langle a \mid b \rangle.$$

6.4. Svojstva kanonskog produkta. Kanonski produkt je *linearan u prvom argumentu*

$$\langle \lambda a + \lambda' a' \mid b \rangle = \lambda \langle a \mid b \rangle + \lambda' \langle a' \mid b \rangle$$

i *linearan u drugom argumentu*

$$\langle a \mid \mu b + \mu' b' \rangle = \mu \langle a \mid b \rangle + \mu' \langle a \mid b' \rangle.$$

Zato kažemo da je kanonski produkt *bilinearno preslikavanje.* Kanonski produkt je *simetričan*: za sve a i b vrijedi

$$\langle a \mid b \rangle = \langle b \mid a \rangle.$$

6.5. Kroneckerov simbol. Često ćemo koristiti Kroneckerov simbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kad je} \quad i = j, \\ 0 & \text{kad je} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Tako, na primjer, jediničnu matricu možemo zapisati kao $I = (\delta_{ij})$.

6.6. Kanonski produkt elemenata kanonske baze. Za elemente $e_1, \ldots, e_n$ kanonske baze u $\mathbb{R}^n$ očito vrijedi

$$\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

6.7. Biortogonalni vektori. *Neka su $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Ako je*

$$\langle a_i \mid b_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{6.1}$$

onda su $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ baze u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Zbog teorema 3.5.19 je dovoljno dokazati da su vektori $a_1, \ldots, a_n$ linearno nezavisni. Pretpostavimo zato da je

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0.$$

No tada, zbog linearnosti kanonskog produkta u prvom argumentu i pretpostavke (6.1), za sve $j = 1, \ldots, n$ imamo

$$0 = \langle 0 \mid b_j \rangle = \langle \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid b_j \rangle = \lambda_1 \langle a_1 \mid b_j \rangle + \cdots + \lambda_n \langle a_n \mid b_j \rangle = \lambda_j.$$

□

6.8. Biortogonalne baze. Za dvije baze $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ za koje vrijedi (6.1) kažemo da su *biortogonalne baze.* Još kažemo da je *baza* $b_1, \ldots, b_n$ *dualna bazi* $a_1, \ldots, a_n$. Zbog simetričnosti kanonskog produkta je i baza $a_1, \ldots, a_n$ dualna bazi $b_1, \ldots, b_n$.

6.9. Primjer. Stupci matrice

$$(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

su baza u $\mathbb{R}^3$ kojoj je

$$(b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dualna baza. Provjerite relacije $\langle a_i \mid b_j \rangle = \delta_{ij}$ za $i, j = 1, 2, 3$.

6.10. Dualna baza i koordinate vektora. *Koordinate λ_j vektora*

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

u bazi $a_1, \ldots, a_n$ dane su pomoću dualne baze formulom

$$\lambda_j = \langle x \mid b_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Dokaz. Zbog linearnosti kanonskog produkta u prvom argumentu i pretpostavke (6.1), za sve $j = 1, \ldots, n$ imamo

$$\langle x \mid b_j \rangle = \langle \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid b_j \rangle = \lambda_1 \langle a_1 \mid b_j \rangle + \cdots + \lambda_n \langle a_n \mid b_j \rangle = \lambda_j .$$

□

6.11. Zadatak. Izračunajte koordinate vektora v u bazi A,

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad (a_1, a_2, a_3) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

koristeći formulu (6.2).

6.12. Svaka baza ima dualnu bazu. *Neka je $a_1, \ldots, a_n$ baza u $\mathbb{R}^n$. Tada postoji jedinstvena baza $b_1, \ldots, b_n$ takva da je*

$$\langle a_i \mid b_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Dokaz. Stavimo $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Budući da su po pretpostavci stupci matrice A baza u $\mathbb{R}^n$, to je rang $A = n$. Po teoremu 5.10 je rang transponirane matrice $A^t = (c_1, \ldots, c_n)$ također n, pa svaki od n sistema jednadžbi

$$A^t x_1 = e_1, \quad A^t x_2 = e_2, \quad \ldots, \quad A^t x_n = e_n$$

ima jedinstveno rješenje. Budući da se pomoću kanonskog produkta u j-tom sistemu i-ta jednadžba može zapisati kao

$$\langle a_i \mid x_j \rangle = \delta_{ij},$$

to su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dualna baza baze $a_1, a_2, \ldots, a_n$. □

6.13. Primjer. Postupak opisan u dokazu teorema koristimo za nalaženje dualne baze. Ako je, na primjer, dana baza

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

u $\mathbb{R}^3$, onda dualnu bazu x_1, x_2, x_3 tražimo rješavajući Gaussovom metodom istovremeno tri sistema jednadžbi

$$A^t x_1 = e_1\,, \quad A^t x_2 = e_2\,, \quad A^t x_3 = e_3\,.$$

Gaussovim eliminacijama na recima dobivamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

pa je tražena baza

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.14. Zadatak. Za svaku od baza (v_1, v_2) u $\mathbb{R}^2$,

$$(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

nađite dualnu bazu i svaki par biortogonalnih baza nacrtajte u ravnini.

6.15. Zadatak. Rješavanjem sistema jednadžbi nađite dualnu bazu baze

$$(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

6.16. Teorem. *Neka je W potprostor u $\mathbb{R}^n$, $\dim W = k$. Tada postoje vektori $b_1, \dots, b_{n-k}$ u $\mathbb{R}^n$ takvi da je W skup svih rješenja x sistema jednadžbi*

$$\langle b_1 \mid x \rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle b_{n-k} \mid x \rangle = 0.$$

Stavimo li $B = (b_1, \dots, b_{n-k})^t$, onda je $W = N(B)$.

Dokaz. Neka je

$$v_{n-k+1}, \dots, v_n$$

baza potprostora W koju nadopunimo do baze

$$v_1, \dots, v_{n-k}, v_{n-k+1}, \dots, v_n$$

od $\mathbb{R}^n$. Tada je

$$W = \{\xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n \mid \xi_1 = \dots = \xi_{n-k} = 0\}.$$

Neka je $b_1, \dots, b_n$ dualna baza. Tada zbog $\langle b_i \mid v_j \rangle = \delta_{ij}$ imamo

$$\langle b_i \mid \xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n \rangle = \xi_1 \langle b_i \mid v_1 \rangle + \dots + \xi_n \langle b_i \mid v_n \rangle = \xi_i,$$

pa je

$$W = \{x \mid \langle b_1 \mid x \rangle = \dots = \langle b_{n-k} \mid x \rangle = 0\}.$$

□

6.17. Jednadžbe k-dimenzionalne ravnine u $\mathbb{R}^n$. U točki 3.6.9 definirali smo k-ravninu kroz točku $c \in \mathbb{R}^n$ kao skup oblika

$$\Sigma = c + W = \{c + v \mid v \in W\} = \{x \mid x - c \in W\},$$

gdje je W k-dimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^n$. Ako je $v_{n-k+1}, \dots, v_n$ neka baza potprostora W, onda imamo parametarski prikaz k-ravnine Σ

$$\Sigma = \{c + \lambda_{n-k+1} v_{n-k+1} + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_{n-k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

Prema prethodnom teoremu postoje vektori $b_1, \dots, b_{n-k}$ u $\mathbb{R}^n$ takvi da je W skup svih rješenja x sistema jednadžbi $\langle b_j \mid x \rangle = 0$, $j = 1, \dots, n-k$. Zbog toga k-ravninu Σ kroz točku b možemo zadati sistemom od $n-k$ jednadžbi

$$\langle b_j \mid x - c \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n-k,$$

odnosno

$$\Sigma = \{x \mid \langle b_1 \mid x \rangle = \langle b_1 \mid c \rangle, \dots, \langle b_{n-k} \mid x \rangle = \langle b_{n-k} \mid c \rangle\}.$$

6.18. Primjer jednadžbi ravnine u $\mathbb{R}^4$. Neka je $W = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ linearna ljuska vektora u $\mathbb{R}^4$ za

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama stupaca dobivamo da je W dvodimenzionalan prostor s bazom v_1, v_2,

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, 0, 0).$$

Očito je v_1, v_2, e_3, e_4 baza od $\mathbb{R}^4$ i lako je vidjeti da je

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dualna baza od v_1, v_2, e_3, e_4. Znači da je

$$W = \langle v_1, v_2 \rangle = \{x \mid \langle b_3, x \rangle = 0,\ \langle b_4, x \rangle = 0\},$$

ili drugim riječima, potprostor W je 2-dimenzionalna ravnina u $\mathbb{R}^4$ zadana sistemom jednadžbi

$$\begin{aligned} -\tfrac{5}{3}\xi_1 - \tfrac{1}{3}\xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ \tfrac{2}{3}\xi_1 + \tfrac{1}{3}\xi_2 + \xi_4 &= 0. \end{aligned}$$

6.19. Primjer jednadžbi pravca u $\mathbb{R}^4$. Neka je p pravac u $\mathbb{R}^4$ kroz točku $a = (1,2,3,4)$ s vektorom smjera $q = (1,1,1,1)$. Tada je pravac p skup svih točaka $x \in \mathbb{R}^4$ takvih da je

$$x - a \in W = \langle q \rangle.$$

Iz prethodnog razmatranja i teorema o rangu i defektu slijedi da 1-dimenzionalni potprostor $W \subset \mathbb{R}^4$ možemo zadati s $4-1=3$ linearno nezavisne homogene jednadžbe: Prvo q nadopunimo do baze od $\mathbb{R}^4$, recimo

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (q, e_2, e_3, e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a onda istovremenim rješavanjem 4 sistema jednadžbi $A^t x_j = e_j$ nađemo dualni bazu

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$W = \langle v \rangle = \{x \mid \langle b_2, x \rangle = 0,\ \langle b_3, x \rangle = 0,\ \langle b_4, x \rangle = 0\},$$

odnosno W je skup svih rješenja homogenog sistema od tri jednadžbe

$$-\xi_1 + \xi_2 = 0, \quad -\xi_1 + \xi_3 = 0, \quad -\xi_1 + \xi_4 = 0.$$

Znači da je pravac p zadan s tri jednadžbe

$$\langle b_2, x - a \rangle = 0,\ \langle b_3, x - a \rangle = 0,\ \langle b_4, x - a \rangle = 0,$$

odnosno

$$-(\xi_1 - 1) + (\xi_2 - 2) = 0, \quad -(\xi_1 - 1) + (\xi_3 - 3) = 0, \quad -(\xi_1 - 1) + (\xi_4 - 4) = 0.$$

6.20. Napomena. Valja reći da smo u prethodnom primjeru mogli "naprosto pogoditi" tri linearno nezavisne homogene jednadžbe koje zadovoljava $q = (1,1,1,1)$, recimo

$$\xi_1 - \xi_3 = 0, \quad \xi_3 - \xi_4 = 0, \quad 2\xi_1 - \xi_2 - \xi_4 = 0.$$

Budući da je rang matrice tog sistema jednak 3, to je po teoremu o rangu i defektu skup svih rješenja potprostor dimenzije

$$\dim W = 4 - 3 = 1.$$

Budući da je q rješenje sistema, imamo $\langle q\rangle \subset W$, a onda zbog $\dim\langle q\rangle = 1 = \dim W$ slijedi

$$\langle q\rangle = W.$$

Znači da pravac p iz prethodnog primjera možemo zadati i sistemom jednadžbi

$$\xi_1 - \xi_3 = -2, \quad \xi_3 - \xi_4 = -1, \quad 2\xi_1 - \xi_2 - \xi_4 = -4.$$

6.21. Napomena. Razmatranja u ovom poglavlju napisana su za slučaj polja realnih brojeva, ali bez izmjene vrijede za svako polje. U sljedećem poglavlju proučavamo skalarni produkt, no ta razmatranja vrijede **samo za polja realnih i kompleksnih brojeva**. Naime, u slučaju polja realnih brojeva definicije kanonskog produkta $\langle\ |\ \rangle$ i kanonskog skalarnog produkta $(\ |\ )$ na $\mathbb{R}^n$ su iste, no u razmatranju skalarnog produkta koristimo uređaj $\alpha \geq \beta$ na skupu realnih brojeva i egzistenciju nenegativnog drugog korijena $\sqrt{\alpha}$ za realne brojeve $\alpha \geq 0$.

POGLAVLJE 5

Skalarni produkt

U ovom poglavlju uvodimo pojmove skalarnog produkta, norme i ortonormirane baze. Kao posljedicu Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije linearno nezavisnog skupa vektora dobivamo egzistenciju ortonormiranih baza potprostora konačno dimenzionalnih unitarnih prostora. Dokazujemo teorem o ortogonalnoj projekciji vektora na dani potprostor i teorem o najboljoj aproksimaciji vektora elementima danog potprostora, a kao posljedicu dobivamo metodu najmanjih kvadrata za približno rješavanje sistema jednadžbi koji koji nemaju točnog rješenja. Iz teorema o projekciji slijedi da se svaki potprostor od $\mathbb{R}^n$ može zadati kao skup rješenja homogenog sistema jednadžbi.

1. Norma i skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^n$

1.1. Duljina vektora u $\mathbb{R}^2$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2)$ iz $\mathbb{R}^2$ kao koordinate točaka euklidske ravnine u zadanom Kartezijevom sustavu, a elemente kanonske baze e_1, e_2 kao jedinične vektore na koordinatnim osima. Prema Pitagorinom poučku za pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0,0), \quad B = (\xi_1, 0), \quad C = (\xi_1, \xi_2)$$

kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AC}$ jednak je sumi kvadrata duljina kateta

$$\xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Ako usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AC}$ poistovjetimo s točkom $x = (\xi_1, \xi_2)$, onda je intuitivno opravdano kad kažemo da je

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

duljina (ili norma) vektora x u $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da za svaki vektor x imamo $\xi_1^2 + \xi_2^2 \geq 0$ i da u definiciji mislimo na nenegativan drugi korijen

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq 0.$$

Ako su $x = (\xi_1, \xi_2)$ i $y = (\eta_1, \eta_2)$ koordinate dviju točaka euklidske ravnine u zadanom Kartezijevom sustavu, onda je prema Pitagorinom poučku udaljenost $d(x, y)$ između tih točaka jednaka

$$d(x,y) = ||x - y|| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}.$$

1.2. Primjer. Duljina vektora $x = (1, 2)$ je

$$||x|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Za dvije točke $x = (1, 2)$ i $y = (2, 1)$ je njihova udaljenost jednaka

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}.$$

1.3. Duljina vektora u $\mathbb{R}^3$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ kao koordinate točaka euklidskog prostora u zadanom Kartezijevom sustavu, a elemente kanonske baze e_1, e_2, e_3 kao jedinične vektore na koordinatnim osima. Prema Pitagorinom poučku za pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (\xi_1, 0, 0), \quad C = (\xi_1, \xi_2, 0),$$

kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AC}$ jednak je sumi kvadrata duljina kateta

$$\xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Sada, primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut s vrhovima

$$A = (0, 0, 0), \quad C = (\xi_1, \xi_2, 0), \quad D = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

dobijamo da je kvadrat duljine hipotenuze $\overline{AD}$ jednak sumi kvadrata duljina kateta

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2.$$

Ako usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AD}$ poistovjetimo s točkom $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, onda je intuitivno opravdano kad kažemo da je

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

duljina (ili norma) vektora x *u* $\mathbb{R}^3$.

Ako su $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ i $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ koordinate dviju točaka euklidskog prostora u zadanom Kartezijevom sustavu, onda je prema Pitagorinom poučku udaljenost $d(x, y)$ između tih točaka jednaka

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}.$$

1.4. Primjer. Duljina vektora $x = (1, 2, -2)$ u $\mathbb{R}^3$ je

$$||x|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3.$$

Za dvije točke $x = (1, 2, -2)$ i $y = (2, 1, 1)$ je njihova udaljenost jednaka

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 1)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{11}.$$

1.5. Norma vektora u $\mathbb{R}^n$. Za vektor $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ u $\mathbb{R}^n$ definiramo *normu (ili duljinu) vektora* x kao

$$||x|| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}.$$

1.6. Udaljenost točaka u $\mathbb{R}^n$. Za dvije točke $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ i $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ u $\mathbb{R}^n$ definiramo njihovu međusobnu *udaljenost* $d(x, y)$ kao

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2}.$$

1.7. Pitagorin poučak i okomitost vektora u $\mathbb{R}^2$. Zamislimo si elemente $x = (\xi_1, \xi_2)$ iz $\mathbb{R}^2$ kao koordinate točaka euklidske ravnine u zadanom Kartezijevom sustavu. Po Pitagorinom poučku su vektori $x = (\xi_1, \xi_2)$ i $y = (\eta_1, \eta_2)$ okomiti ako i samo ako je

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2. \tag{1.1}$$

Budući da je

$$||x + y||^2 = (\xi_1 + \eta_1)^2 + (\xi_2 + \eta_2)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) + \eta_1^2 + \eta_2^2,$$
$$||x||^2 + ||y||^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2,$$

to je uvjet okomitosti (1.1) vektora x i y ekvivalentan

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = 0. \tag{1.2}$$

Općenito za dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^2$ skalar (broj)

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

zovemo *skalarnim produktom vektora x i y.*

1.8. Pitagorin poučak i okomitost vektora u $\mathbb{R}^3$. Zamislimo si $\mathbb{R}^3$ kao koordinate točaka euklidskog prostora u zadanom Kartezijevom sustavu. Po Pitagorinom poučku su vektori $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ i $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ okomiti ako i samo ako je

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2. \tag{1.3}$$

Kratkim računom kao u prethodnoj točki vidimo da je to ekvivalentno

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = 0. \tag{1.4}$$

1.9. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Za vektore $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ i $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ u $\mathbb{R}^n$ stavimo

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n.$$

Funkciju

$$(\ \mid\ ) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y)$$

zovemo *kanonskim skalarnim produktom na* $\mathbb{R}^n$. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ ima sljedeća svojstva:

(1) skalarni produkt je *bilinearan*, tj. za sve vektore $x, x', x'', y \in \mathbb{R}^n$ i skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi *linearnost u prvom argumentu*

$$(x' + x'' \mid y) = (x' \mid y) + (x' \mid y), \quad (\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y)$$

i *linearnost u drugom argumentu*

$$(y \mid x' + x'') = (y \mid x') + (y \mid x'), \quad (y \mid \lambda x) = \lambda(x \mid y),$$

(2) *simetričan*, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = (y \mid x),$$

(3) i *strogo pozitivan*, tj. za svaki vektor x vrijedi

$$(x \mid x) \geq 0 \quad \text{i} \quad (x \mid x) = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0.$$

Dokaz. Bilinearnost i simetričnost skalarnog produkta vrijedi zbog algebarskih svojstava realnih brojeva:

$$(\lambda x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \xi_i)\eta_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \lambda (x \mid y),$$

$$(x' + x'' \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i' + \xi_i'')\eta_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i'\eta_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i''\eta_i = (x' \mid y) + (x'' \mid y),$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \xi_i = (y \mid x).$$

Očito je $(x \mid x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \geq 0$ i jednakost vrijedi ako i samo ako je $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$. $\square$

1.10. Primjer. Skalarni produkt vektora $x = (1, 0, 1)$ i $y = (1, 2, -1)$ u $\mathbb{R}^3$ je $(x \mid y) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$.

1.11. Napomena. Ponekad skalarni produkt $(x \mid y)$ vektora iz $\mathbb{R}^3$ zapisujemo kao "množenje" $x \cdot y$, a svojstva linearnosti u prvom i drugom argumentu zovemo svojstvima distributivnosti skalarnog množenja u odnosu na zbrajanje

$$(x' + x'') \cdot y = x' \cdot y + x'' \cdot y, \quad y \cdot (x' + x'') = y \cdot x' + y \cdot x''$$

i homogenosti skalarnog množenja u odnosu na množenje vektora skalarom

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y) = x \cdot (\lambda y).$$

Zbog tih svojstava u slučaju skalarnog množenja linearnih kombinacija primjenjujemo, kao i za brojeve, pravilo množenja "svakog sa svakim":

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_m b_m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (a_i \mid b_j).$$

1.12. Kanonski skalarni produkt i norma vektora u $\mathbb{R}^n$. Očito je

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)}.$$

1.13. Okomiti vektori u $\mathbb{R}^n$ i Pitagorin poučak. Kažemo da su vektora x i y u $\mathbb{R}^n$ *okomiti* ili *ortogonalni* ako je

$$(x \mid y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n = 0,$$

često pišemo $x \perp y$. Primijetimo da je tada i $(y \mid x) = (x \mid y) = 0$, tj. $y \perp x$.

Ako je $x \perp y$, onda zbog bilinearnosti i simetričnosti skalarnog produkta vrijedi *Pitagorin poučak*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

1.14. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}$. U slučaju $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ skalarni produkt vektora (brojeva) ξ i η u $\mathbb{R}$ je

$$(\xi \mid \eta) = \xi\eta,$$

a norma $||\xi||$ je apsulutna vrijednost $|\xi|$ broja ξ:

$$|\xi| = ||\xi|| = \sqrt{\xi \cdot \xi}.$$

Primijetimo da u polju $\mathbb{R}$ relacija $(\xi \mid \eta) = \xi\eta = 0$ povlači da je bar jedan od brojeva ξ i η jednak nula.

2. Skalarni produkt vektora u $\mathbb{C}^n$

2.1. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}$. Polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je skup $\mathbb{R}^2$ čije elemente $z = (x, y)$ obično zapisujemo kao $z = x + iy$. Apsolutna vrijednost $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je u stvari norma $||z||$ elementa $z \in \mathbb{R}^2$. Koristimo li konjugiranje i množenje u polju $\mathbb{C}$, imamo formulu

$$|z| = ||z|| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Za kompleksne brojeve z i w kažemo da je

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w}$$

skalarni produkt vektora (brojeva) z i w u $\mathbb{C}$, a apsolutnu vrijednost kompleksnog broja

$$|z| = ||z|| = \sqrt{(z \mid z)}$$

zovemo i *normom vektora z u kompleksnom vektorskom prostoru* $\mathbb{C}$.

Primijetimo da u polju $\mathbb{C}$ relacija $(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = 0$ povlači da je bar jedan od brojeva z i w jednak nula. Za razliku od realnih brojeva, skalarni produkt na $\mathbb{C}$ ima svojstvo *hermitske simetrije*

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = \overline{w} \cdot z = \overline{w} \cdot \overline{\overline{z}} = \overline{w \cdot \overline{z}} = \overline{(w \mid z)}.$$

2.2. Kanonski skalarni produkti na $\mathbb{C}$ i na $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da je za kompleksne brojeve $z = x + iy$ i $w = u + iv$

$$(z \mid w) = z \cdot \overline{w} = xu + yv + i(-xv + yu)$$

pa je skalarni produkt $xu + yv$ vektora (x, y) i (u, v) u 2-dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ jednak realnom dijelu skalarnog produkta $(z \mid w)$ vektora $z = x + iy$ i $w = u + iv$ u 1-dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}$.

2.3. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$. Funkciju

$$(\ \mid\ ) \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y) = \xi_1\overline{\eta_1} + \xi_2\overline{\eta_2} + \cdots + \xi_n\overline{\eta_n},$$

gdje je $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ i $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, zovemo *kanonskim skalarnim produktom na* $\mathbb{C}^n$. Kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$ ima sljedeća svojstva:

(1) skalarni produkt je *linearna funkcija u prvom argumentu*, tj.

$$(x' + x'' \mid y) = (x' \mid y) + (x'' \mid y), \quad (\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y)$$

i *antilinearna funkcija u drugom argumentu*, tj.

$$(x \mid y' + y'') = (x \mid y') + (x \mid y''), \quad (x \mid \lambda y) = \overline{\lambda}(x \mid y),$$

(2) *hermitski simetričan*, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)},$$

(3) i *strogo pozitivan*, tj. za svaki vektor x vrijedi

$$(x \mid x) \geq 0 \quad \text{i} \quad (x \mid x) = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0.$$

DOKAZ. Linearnost i hermitska simetrija skalarnog produkta vrijede zbog algebarskih svojstava kompleksnih brojeva:

$$(\lambda x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \xi_i)\overline{\eta_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} = \lambda(x \mid y),$$

$$(x' + x'' \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i' + \xi_i'')\overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' \overline{\eta_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i'' \overline{\eta_i} = (x' \mid y) + (x'' \mid y),$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{\xi_i} \eta_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \overline{\xi_i}} = \overline{(y \mid x)}.$$

Antilinearnost u drugom argumentu slijedi iz linearnosti u prvom argumentu i hermitske simetrije:

$$\begin{aligned}(x \mid y + \lambda v) &= \overline{(y + \lambda v \mid x)} = \overline{(y \mid x) + \lambda(v \mid x)} \\ &= \overline{(y \mid x)} + \overline{\lambda} \cdot \overline{(v \mid x)} = (x \mid y) + \overline{\lambda}(x \mid v).\end{aligned}$$

Očito je $(x \mid x) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 \geq 0$ i jednakost vrijedi ako i samo ako je $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$. $\square$

2.4. Primjer. Za vektore

$$x = (2, -i) \quad \text{i} \quad y = (i, 1 + i)$$

u $\mathbb{C}^2$ kanonski skalarni produkt je

$$(x \mid y) = 2 \cdot \overline{i} + (-i) \cdot \overline{1 + i} = 2 \cdot (-i) + (-i) \cdot (1 - i) = -2i - i - 1 = -1 - 3i.$$

2.5. Norma vektora u $\mathbb{C}^n$. *Norma vektora* $x = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ je po definiciji

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2}.$$

2.6. Primjer. Norma vektora $x = (2, -i)$ u $\mathbb{C}^2$ je $||x|| = \sqrt{|2|^2 + |-i|^2}$ $= \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

2.7. Norme vektora u $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{R}^{2n}$. Napišemo li koordinate $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$ vektora

$$x = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

kao parove (α_k, β_k) realnih brojeva, onda vektor x možemo shvatiti kao element

$$x = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$$

iz $\mathbb{R}^{2n}$, a norma je u oba slučaja ista:

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2} = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}.$$

3. Unitarni prostori

3.1. Skalarni produkt na vektorskom prostoru. Neka je K polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Funkciju

$$(\ \mid\ ) \colon V \times V \to K, \quad (x, y) \mapsto (x \mid y)$$

zovemo *skalarnim produktom na vektorskom prostoru* V ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) funkcija je linearna u prvom argumentu, tj.

$$(x' + x'' \mid y) = (x' \mid y) + (x'' \mid y), \quad (\lambda x \mid y) = \lambda (x \mid y),$$

i funkcija je antilinearna u drugom argumentu, tj.

$$(x \mid y' + y'') = (x \mid y') + (x \mid y''), \quad (x \mid \lambda y) = \overline{\lambda}(x \mid y),$$

(2) funkcija je hermitski simetrična, tj. za sve x i y vrijedi

$$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)},$$

(3) i strogo pozitivna, tj. za svaki vektor x vrijedi

$$(x \mid x) \geq 0 \quad \text{i} \quad (x \mid x) = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0.$$

Vektorski prostor sa zadanim skalarnim produktom zovemo *unitarnim prostorom.* U ovom paragrafu pretpostavljamo da je V unitaran.

3.2. Napomena. Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu za svaki vektor x imamo $(0 \mid x) = (0 + 0 \mid x) = (0 \mid x) + (0 \mid x)$, odnosno

$$(0 \mid x) = 0. \tag{3.1}$$

Isto tako je $(x \mid 0) = \overline{(0 \mid x)} = 0$.

3.3. Napomena. Za nas su najvažniji primjeri unitarnih prostora vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ s kanonskim skalarnim produktima. U matematičkoj analizi su važni primjeri unitarnih prostora vektorski prostori funkcija, kao što je, na primjer, realni vektorski prostor neprekidnih funkcija

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$$

sa skalarnim produktom

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

3.4. Potprostor unitarnog prostora je unitaran. Neka je V unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\ \mid\ )$ i W vektorski potprostor od V. Tada je W unitaran prostor s naslijeđenim skalarnim produktom

$$(\ \mid\ )\colon W \times W \to K, \quad (x,y) \mapsto (x \mid y),$$

jer su za vektore iz W očito zadovoljena sva svojstva (1) – (3) u definiciji skalarnog produkta. Posebno je svaki potprostor od $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$ unitaran prostor. Na primjer, ako je $W = \langle a_1, a_2\rangle$ potprostor od $\mathbb{R}^3$ razapet vektorima

$$a_1 = (1,1,1) \quad \text{i} \quad a_2 = (1,1,2),$$

onda kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ daje skalarni produkt na potprostoru W, u bazi (a_1, a_2) zadan formulom

$$(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 \mid \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2) = 3\xi_1\eta_1 + 4\xi_1\eta_2 + 4\xi_2\eta_1 + 6\xi_2\eta_2. \tag{3.2}$$

3.5. Zadatak. Dokažite da je za sve $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$

$$3\,\xi_1^2 + 8\,\xi_1\xi_2 + 6\,\xi_2^2 \geq 0$$

ne koristeći činjenicu da je formulom (3.2) zadan skalarni produkt.

3.6. Napomena. Ako je V kompleksan vektorski prostor, onda je skalarni produkt vektora $(x \mid y)$ kompleksan broj. No zbog hermitske simetrije je $(x \mid x) = \overline{(x \mid x)}$, pa je za svaki vektor x u V skalarni produkt $(x \mid x)$ realan broj. Budući da u definiciji skalarnog produkta za taj realni broj zahtijevamo $(x \mid x) \geq 0$, to postoji drugi korijen $\sqrt{(x \mid x)} \geq 0$.

3.7. Norma vektora. *Norma vektora* x u unitarnom prostoru V je po definiciji

$$||x|| = \sqrt{(x \mid x)} \geq 0.$$

Zbog svojstva (3) skalarnog produkta imamo i da je

$$||x|| = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 0. \tag{3.3}$$

Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu i antilinearnosti u drugom, za svaki vektor x u V i svaki skalar $\lambda \in K$ vrijedi

$$||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x \mid x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x \mid x)} = |\lambda| \cdot ||x||. \tag{3.4}$$

3.8. Normirani vektori. Kažemo da je vektor x u unitarnom prostoru V *normirani* ili *jedinični*[1] vektor ako je

$$||x|| = 1.$$

Za svaki vektor $x \neq 0$ "dijeljenjem" s normom $||x|| \neq 0$ dobijamo normirani vektor

$$||\tfrac{1}{||x||}x|| = \tfrac{1}{||x||}||x|| = 1.$$

Kažemo da smo normirani vektor $\frac{1}{||x||}x$ dobili *normiranjem vektora* $x \neq 0$. Često pišemo

$$\tfrac{1}{||x||}x = \tfrac{x}{||x||} = x/||x||.$$

3.9. Okomiti vektori. Kažemo da su vektora x i y u unitarnom prostoru V *okomiti* ili *ortogonalni* ako je

$$(x \mid y) = 0,$$

često pišemo $x \perp y$. Primijetimo da je tada i $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)} = 0$, tj. $y \perp x$.

3.10. Okomiti skupovi. Kažemo da je *vektor x okomit na skup vektora A*, pišemo $x \perp A$, ako je $x \perp a$ za svaki vektor a iz skupa A. Kažemo da je *skup vektora B okomit na skup vektora A* ako je svaki vektor b iz B okomit na svaki vektor a iz A, pišemo $B \perp A$. Primijetimo da je tada i $A \perp B$.

3.11. Teorem. *Ako je $x \perp x$, onda je $x = 0$. Posebno, ako je $x \perp V$, onda je $x = 0$.*

DOKAZ. Po definiciji skalarnog produkta $(x \mid x) = 0$ povlači $x = 0$. Posebno, ako je x okomit na sve vektore iz V, onda je okomit i na sebe, pa mora biti nula. □

3.12. Pitagorin poučak. Ako je $x \perp y$, onda je

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

DOKAZ. Zbog bilinearnosti skalarnog produkta imamo

$$(x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y),$$

pa zbog pretpostavke $(x \mid y) = (y \mid x) = 0$ slijedi tvrdnja teorema. □

[1] U engleskom se za jedinični vektor kaže *unit vector*, odakle i dolazi naziv "unitarni prostor".

3.13. Teorem o projekciji vektora na pravac. Neka su x i e vektori u unitarnom prostoru, $||e|| = 1$. Tada je

(1) $x - (x \mid e)e \perp e$,
(2) $x = (x \mid e)e + (x - (x \mid e)e)$,
(3) $||x||^2 = |(x \mid e)|^2 + ||x - (x \mid e)e||^2$.

Vektor $(x \mid e)e$ zovemo *ortogonalnom projekcijom vektora x na pravac $\langle e \rangle$*.

DOKAZ. Tvrdnja (1) slijedi iz linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu i pretpostavke da je e jedinični vektor:

$$(x - (x \mid e)e \mid e) = (x \mid e) - (x \mid e)(e \mid e) = 0.$$

Tvrdnja (2) je očita, a tvrdnja (3) slijedi iz Pitagorinog teorema. □

3.14. Kosinus kuta između dva vektora. Neka je e jedinični vektor. Prema tvrdnji (2) prethodnog teorema vektor $x \neq 0$ možemo rastaviti na sumu dva vektora, pri čemu je prvi vektor

$$a = (x \mid e)e$$

proporcionalan jediničnom vektoru e duljine $||a|| = |(x \mid e)|$, a drugi je vektor

$$b = x - (x \mid e)e$$

okomit na vektor e. Da su vektori x i e u prostoru $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$, onda bi rastav vektora

$$x = a + b$$

geometrijski mogli shvatiti kao rastav vektora na dvije komponente, pri čemu je komponenta a na pravcu $\langle e \rangle = \mathbb{R}e$, a komponenta b okomita na pravac $\mathbb{R}e$. Štoviše, vektor x je u tom slučaju hipotenuza pravokutnog trokuta sa katetama a i b, a kosinus kuta φ između vektora x i e je

$$\cos\varphi = (x \mid e)/||x|| \tag{3.5}$$

(nacrtajte sliku za slučajeve $(x \mid e) \geq 0$ i $(x \mid e) < 0$). U slučaju unitarnog prostora nad poljem $\mathbb{R}$ relacijom (3.5) definiramo kosinus kuta između vektora e i x, ili općenitije, kosinus kuta između vektora $y \neq 0$ i x je

$$\cos\varphi = \frac{(x \mid y)}{||x||\,||y||}. \tag{3.6}$$

3.15. Primjer. Kosinus kuta između vektora $(1,0)$ i $(1,1)$ je $1/\sqrt{2}$.

3.16. Primjer. Kosinus kuta između vektora $(0,0,1,0,0)$ i $(1,1,1,1,3)$ u $\mathbb{R}^5$ je $1/\sqrt{13}$.

3.17. Zadatak. Nađite kosinus kuta između vektora a) $(1,0)$ i $(1,0)$, b) $(1,0)$ i $(1/2, \sqrt{3}/2)$, c) $(1,0)$ i $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, d) $(1,0)$ i $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ i e) $(1,0)$ i $(-1/2, \sqrt{3}/2)$. Nacrtajte sliku.

3.18. Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzova nejednakost. *Za vektore x i y vrijedi nejednakost*

$$|(x \mid y)| \leq ||x|| \, ||y||, \tag{3.7}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

DOKAZ. Ako je desna strana $||x|| \, ||y|| = 0$, onda je jedan od vektora nula. Tada je zbog (3.1) i lijeva strana jednaka nuli i u (3.7) vrijedi jednakost, a vektori x i y su linearno zavisni.

Ako je desna strana $||x|| \, ||y|| \neq 0$, onda su oba vektora različita od nule. Stavimo li $e = y/||y||$, onda nejednakost (3.7) glasi

$$|(x \mid e)| = |(x \mid y/||y||)| = |(x \mid y)|/||y|| \leq ||x||$$

i slijedi iz tvrdnje (3) teorema 3.13:

$$|(x \mid e)|^2 \leq |(x \mid e)|^2 + ||x - (x \mid e)e||^2 = ||x||^2.$$

Štoviše, ako u (3.7) vrijedi jednakost, onda zbog stroge pozitivnosti skalarnog produkta $||x - (x \mid e)e|| = 0$ povlači $x - (x \mid e)e = 0$, tj. $x = (x \mid e)e = (x \mid y)y/||y||^2$. Na kraju, ako je $x = \lambda y$ za neki skalar λ, onda su obje strane (3.7) jednake $|\lambda| \, ||y||^2$. □

3.19. Nejednakost trokuta. *Za proizvoljne vektore x i y vrijedi tzv. nejednakost trokuta*

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||. \tag{3.8}$$

DOKAZ. Zbog svojstava skalarnog produkta imamo

$$\begin{aligned}
||x + y||^2 &= (x + y \mid x + y) \\
&= (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) \\
&= ||x||^2 + (x \mid y) + (y \mid x) + ||y||^2 \\
&= ||x||^2 + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} + ||y||^2 \\
&= ||x||^2 + 2 \operatorname{Re} (x \mid y) + ||y||^2 \\
&\leq ||x||^2 + 2 \, |(x \mid y)| + ||y||^2 \\
&\leq ||x||^2 + 2 \, ||x|| \, ||y|| + ||y||^2 \\
&= (||x|| + ||y||)^2 \, ,
\end{aligned}$$

pri čemu prva nejednakost vrijedi jer je realni dio kompleksnog broja manji ili jednak apsolutnoj vrijednosti, a druga nejednakost vrijedi zbog Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzove nejednakosti. Sada nejednakost trokuta slijedi vađenjem drugog korijena. □

3.20. Udaljenost točaka u unitarnom prostoru. Za dvije točke x i y u unitarnom prostoru V definiramo njihovu međusobnu *udaljenost* $d(x,y)$ kao

$$d(x,y) = ||x-y||.$$

Iz dokazanih svojstava norme (3.3), (3.4) i (3.8) za sve $x,y,z \in V$ slijedi

(1) *pozitivnost* $d(x,y) \geq 0$ i $d(x,y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,
(2) *simetričnost* $d(x,y) = d(y,x)$ i
(3) *relacija trokuta* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

4. Ortonormirani skupovi vektora

4.1. Teorem. *Skup vektora $v_1, \dots, v_k$ je okomit na skup A ako i samo ako je $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \perp A$.*

DOKAZ. Budući da je $v_1, \dots, v_k \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, to $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \perp A$ povlači $v_1, \dots, v_k \perp A$. Obratno, ako je $v_1, \dots, v_k \perp A$ i $a \in A$, onda linearnost skalarnog produkta u prvom argumentu za linearnu kombinaciju daje

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid a) = \lambda_1 (v_1 \mid a) + \cdots + \lambda_k (v_k \mid a) = \lambda_1 \cdot 0 + \cdots + \lambda_k \cdot 0 = 0$$

Znači da je linearna kombinacija $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ okomita na a za svaki a iz A. □

4.2. Ortonormirani skupovi i ortonormirane baze. Kažemo da je skup vektora $v_1, \dots, v_k$ *ortonormirani skup* ako su vektori međusobno okomiti i ako je svaki od njih normiran. To možemo zapisati formulom

$$(v_i \mid v_j) = \delta_{ij} \quad \text{za sve} \quad i,j = 1, \dots, k.$$

Ortonormirani skup vektora $v_1, \dots, v_n$ koji razapinje prostor zovemo *ortonormiranom bazom prostora.*

4.3. Teorem. *Neka je $v_1, \dots, v_k$ ortonormirani skup. Ako je*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i,$$

onda je $\xi_i = (x \mid v_i)$ za sve $i = 1, \dots, n$, odnosno

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i. \tag{4.1}$$

Posebno, ortonormirani skup je linearno nezavisan.

DOKAZ. Skalarnim množenjem

$$x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i$$

s v_j i korištenjem linearnosti skalarnog produkta u prvom argumenti dobivamo

$$(x \mid v_j) = (\sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i (v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \delta_{ij} = \xi_j.$$

Posebno za $x = 0$ slijedi $\xi_1 = \cdots = \xi_k = 0$, pa je skup vektora $v_1, \ldots, v_k$ linearno nezavisan. $\square$

4.4. Fourierovi koeficijenti. Ako je $v_1, \ldots, v_n$ ortonormirana baza prostora, onda koordinate

$$\xi_i = (x \mid v_i)$$

vektora x zovemo *Fourierovim koeficijentima* od x.

4.5. Primjer. Vektori $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ i $v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ su ortonormirana baza u $\mathbb{R}^2$. Koordinate vektora $x = (2,1)$ u toj bazi su

$$\xi_1 = (x \mid v_1) = 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} = 3/\sqrt{2},$$
$$\xi_2 = (x \mid v_2) = 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 1/\sqrt{2}.$$

4.6. Zadatak. Izračunajte koordinate vektora $x = (2,1)$ u ortonormiranoj bazi $v_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ i $v_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ od $\mathbb{R}^2$.

4.7. Pitanje. Da li su Fourierovi koeficijenti vektora $x \in \mathbb{C}^n$ u ortonormiranoj bazi $v_1, \ldots, v_n$ dani formulom

$$\xi_i = (v_i \mid x)\,? \qquad \text{DA} \quad \text{NE}$$

4.8. Ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$. Ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$ lako je konstruirati. Za svaki vektor $f \neq 0$ je

$$||\tfrac{1}{||f||} f|| = \tfrac{1}{||f||} ||f|| = 1,$$

pa je vektor $f_1 = \frac{1}{||f||} f$ norme 1. Ako je $f_1 = (\alpha, \beta)$, onda je vektor $f_2 = (-\beta, \alpha)$ također norme 1 i vrijedi

$$(f_1 \mid f_2) = -\alpha\beta + \beta\alpha = 0.$$

Očito je i vektor $-f_2$ norme 1 i okomit na f_1, pa imamo dvije ortonormirane baze

$$(f_1, f_2), \quad (f_1, -f_2),$$

ili zapisano po stupcima kao matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

4.9. Zadatak. Pokažite geometrijski i algebarski da su

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

sve ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$.

4.10. Zadatak. Pokažite da su stupci kompleksnih matrica[2]

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar\beta \\ \beta & \bar\alpha \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$. Pokažite da su

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\lambda\bar\beta \\ \beta & \lambda\bar\alpha \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |\lambda| = 1, \quad \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$$

sve ortonormirane baze u $\mathbb{C}^2$.

5. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije

5.1. Teorem. *Ako je $v_1, \dots, v_k$ ortonormirani skup u V i $x \in V$, onda je*

$$Q(x) = x - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i \perp \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Štoviše, $Q(x) \neq 0$ ako i samo ako $x \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

DOKAZ. Skalarnim množenjem vektorom v_j dobivamo

$$(Q(x) \mid v_j) = (x - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i \mid v_j) = (x \mid v_j) - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i)(v_i \mid v_j)$$
$$= (x \mid v_j) - \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i)\delta_{ij} = (x \mid v_j) - (x \mid v_j) = 0.$$

Znači da je $Q(x) \perp v_1, \dots, v_k$, a to je prema teoremu 4.1 ekvivalentno $Q(x) \perp \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Ako je $x \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, onda zbog (4.1) imamo $Q(x) = 0$. Obratno, ako je $Q(x) = 0$, onda je očito $x \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. $\square$

5.2. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. *Ako je $a_1, \dots, a_n$ linearno nezavisan skup vektora u unitarnom prostoru V, onda postoji ortonormirani skup vektora $v_1, \dots, v_n$ takav da je*

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Nadalje, ako je V konačno dimenzionalan unitaran prostor, onda se svaki ortonormirani skup može dopuniti do ortonormirane baze od V.

DOKAZ. Konstruktivni dokaz provodimo u koracima koje zovemo *Gram-Scmidtov postupak ortogonalizacije*:

Za $n = 1$ stavimo $v_1 = \frac{1}{||a_1||} a_1$. Očito je v_1 normiran i $\langle v_1 \rangle = \langle a_1 \rangle$.

Pretpostavimo sada da već imamo ortonormirani skup $v_1, \dots, v_k$ za $k < n$ takav da je

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle. \tag{5.1}$$

[2] Kompleksne matrice tog oblika zovemo kvaternionima norme jedan.

Budući da je po pretpostavci $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ linearno nezavisan skup vektora, to a_{k+1} nije u linearnoj ljusci $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, pa iz teorema 5.1 slijedi da je

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1} \mid v_i) v_i \neq 0.$$

Tada imamo normirani vektor

$$v_{k+1} = \tfrac{1}{||b_{k+1}||} b_{k+1} \perp v_1, \dots, v_k,$$

pa je $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ ortonormirani skup vektora. Iz relacije

$$||b_{k+1}|| \, v_{k+1} - a_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

i pretpostavke indukcije (5.1) slijedi

$$\langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_k, v_{k+1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_k, a_{k+1} \rangle.$$

□

5.3. Primjer. Neka je $c = (1, 0)$ i $d = (1, 1)$. Primijenimo li Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije na vektore c, d, dobivamo ortonormiranu bazu $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$$v_1 = \tfrac{1}{||c||} c = (1, 0),$$

$$b_2 = d - (d \mid v_1) v_1 = d - v_1 = (1, 1) - (1, 0) = (0, 1),$$

$$v_2 = \tfrac{1}{||b_2||} b_2 = (0, 1).$$

Primijenimo li pak Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije na vektore d, c, dobivamo ortonormiranu bazu u_1, u_2

$$u_1 = \tfrac{1}{||d||} d = \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1, 1),$$

$$b_2 = c - (c \mid u_1) u_1 = c - \tfrac{1}{\sqrt{2}} u_1 = (1, 0) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1, 1) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}),$$

$$u_2 = \tfrac{1}{||b_2||} b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1, -1).$$

5.4. Zadatak. Gram-Schmidtov postupkom ortogonalizacije ortonormirajte baze u $\mathbb{R}^3$:

(1) $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ i
(2) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0)$.

5.5. Koordinatizacija n-dimenzionalnog unitaranog prostora. Neka je V n-dimenzionalni unitarni prostor nad poljem $K = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Prema teoremu 5.2 postoji uređena ortonormirana baza $B = (v_1, \dots, v_n)$ prostora V. Ako je $e_1, \dots, e_n$ kanonska baza u K^n, onda je koordinatizacija

$$K_B \colon V \to K^n, \qquad K_B \colon\ x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i \mapsto x_B = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

izomorfizam vektorskih prostora V i K^n. Štoviše, za

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i \quad \text{i} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i,$$

imamo

$$(x \mid y) = (\sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} (v_i \mid v_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}\,.$$

Znači da koordinatizacija K_B *čuva skalarni produkt* u smislu

$$(x \mid y) = (K_B x \mid K_B y) = (x_B \mid y_B),$$

gdje je $(x \mid y)$ skalarni produkt vektora u V, a $(x_B \mid y_B)$ je kanonski skalarni produkt vektora u K^n.

Znači da svaki n-dimenzionalni unitarni prostor nad poljem $\mathbb{R}$ izgleda isto kao $\mathbb{R}^n$ s kanonskim skalarnim produktom, a svaki n-dimenzionalni unitarni prostor nad poljem $\mathbb{C}$ izgleda isto kao $\mathbb{C}^n$ s kanonskim skalarnim produktom.

5.6. Parsevalova jednakost. Budući da su koordinate vektora u ortonormiranoj bazi Fourierovi koeficijenti dani formulom (4.1), formulu za skalarni produkt $(x \mid y)$ iz prethodnog dokaza možemo zapisati kao tzv. *Parsevalovu jednakost*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i)\overline{(y \mid v_i)}, \tag{5.2}$$

a za normu vrijedi

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid v_i)|^2. \tag{5.3}$$

5.7. Besselova nejednakost. *Ako je $v_1, \dots, v_k$ ortonormirani skup u V, vektor x u V i $Q(x)$ kao u teoremu 5.1, onda je*

$$||x||^2 = ||Q(x)||^2 + \sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2. \tag{5.4}$$

Posebno, vrijedi Besselova nejednakost

$$\sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2 \leq ||x||^2, \tag{5.5}$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Dokaz. Stavimo

$$P(x) = x - Q(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i.$$

Tada je po definiciji i teoremu 5.1

$$x = P(x) + Q(x), \quad P(x) \perp Q(x),$$

pa je po Pitagorinom poučku

$$||x||^2 = ||P(x)||^2 + ||Q(x)||^2. \tag{5.6}$$

Budući da je $v_1, \ldots, v_k$ ortonormirana baza od $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, to prema (5.3) za $P(x) \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ imamo

$$||P(x)||^2 = \sum_{i=1}^{k} |(x \mid v_i)|^2,$$

pa jednakost (5.4) slijedi iz (5.6).

Ako u (5.5) vrijedi jednakost, onda iz (5.4) slijedi $||Q(x)|| = 0$. No onda je $Q(x) = 0$ i $x = P(x) \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Obratno, ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, onda prema (4.1) imamo $x = P(x)$, pa zbog (5.3) imamo jednakost u (5.5). □

5.8. Potpunost ortonormiranog skupa. *Neka je $v_1, \ldots, v_n$ ortonormirani skup vektora u unitarnom prostoru V. Tada je ekvivalentno:*

(1) *$v_1, \ldots, v_n$ je ortonormirana baza od V.*

(2) *Za sve x u V je*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i) v_i.$$

(3) *Za sve x u V vrijedi Besselova jednakost*

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid v_i)|^2.$$

(4) *Za sve x i y u V vrijedi Parsevalova jednakost*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid v_i) \overline{(y \mid v_i)}.$$

Ortonormirani skup $v_1, \ldots, v_n$ za koji vrijedi jedno od ova četiri svojstva zovemo potpunim ortonormiranim skupom.

Dokaz. (1) povlači (4) jer vrijedi (5.2). (4) povlači (3) zbog definicije norme. (3) povlači (2) zbog teorema 5.7 i (4.1). (2) povlači (1) jer po pretpostavci $v_1, \dots, v_n$ razapinje prostor, a ortonormirani skup jest linearno nezavisan. $\square$

6. Metoda najmanjih kvadrata

6.1. Teorem o projekciji. *Neka je V unitaran prostor i neka je Y konačno dimenzionalni potprostor. Tada za vektor x u V postoje jedinstveni vektori $P(x)$ u Y i $Q(x) \perp Y$ takvi da je*

$$x = P(x) + Q(x).$$

Dokaz. Po pretpostavci je Y konačno dimenzionalni potprostor, pa prema teoremu 5.2 postoji ortonormirana baza $v_1, \dots, v_k$ od Y. Stavimo

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i, \quad Q(x) = x - P(x).$$

Tada je $x = P(x) + Q(x)$ traženi rastav jer je prema teoremu 5.1 $Q(x) \perp Y$.

Dokažimo jedinstvenost. Ako je $x = P(x) + Q(x) = y + u$ za neki $y \in Y$ i $u \perp Y$, onda je $P(x) - y = u - Q(y)$ i vrijedi

$$P(x) - y \in Y \quad \text{i} \quad u - Q(x) \perp Y.$$

Odavle slijedi

$$u - Q(x) \perp u - Q(x),$$

što povlači $u - Q(x) = 0$, odnosno $u = Q(x)$. No onda mora biti i $y = P(x)$. $\square$

6.2. Teorem o najboljoj aproksimaciji. *Neka je V unitaran prostor i neka je Y konačno dimenzionalni potprostor. Tada za vektor x u V postoji jedinstveni vektor $P(x)$ u Y takav da je*

$$||x - P(x)|| \le ||x - y|| \quad \textit{za svaki} \quad y \in Y,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $y = P(x)$.

Kažemo da je od svih vektora iz potprostora Y vektor $P(x)$ najbolja aproksimacija od x.

Dokaz. Po pretpostavci je Y konačno dimenzionalni potprostor, pa prema teoremu 5.2 postoji ortonormirana baza $v_1, \dots, v_k$ od Y. Stavimo

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i, \quad Q(x) = x - P(x).$$

Tada je po teoremu 5.1

$$Q(x) \perp P(x) - y \in Y,$$

pa je po Pitagorinom poučku

$$||x-y||^2 = ||x-P(x)+P(x)-y||^2 = ||x-P(x)||^2 + ||P(x)-y||^2 \ge ||x-P(x)||^2,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $||P(x)-y|| = 0$, odnosno $P(x)-y = 0$. Budući da je $||x - P(x)|| < ||x - y||$ za $y \neq P(x)$, vektor $P(x) \in Y$ mora biti jedinstven. Stoga $P(x)$ ne ovisi o izboru ortonormirane baze $v_1, \dots, v_k$ u Y. $\square$

6.3. Primjer. Vektori

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

čine ortonormirani skup u $\mathbb{R}^3$ i razapinju 2-dimenzionalni potprostor $Y = \langle v_1, v_2 \rangle$. Za vektor

$$b = (-1,-2,1)$$

je točka

$$P(b) = (b \mid v_1)v_1 + (b \mid v_2)v_2 = \tfrac{1}{2}(1,-1,0) - \tfrac{2}{3}(1,1,1) = (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{2}{3})$$

najbolja aproksimacija od b točkama iz ravnine Y jer je za sve y iz Y

$$\tfrac{5}{\sqrt{6}} = ||(-1,-2,1) - (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{2}{3})|| \leq ||(-1,-2,1) - y||.$$

Vektor $Q(b) = b - P(b) = (-1,-2,1) - (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{2}{3})$ interpretiramo kao vektor-okomicu na ravninu Y sa hvatištem u točki ravnine $P(b)$ i završetkom u točki $b = Q(b) + P(b)$, a duljinu $\tfrac{5}{\sqrt{6}} = ||Q(b)||$ tog vektora interpretiramo kao udaljenost točke b od ravnine Y.

6.4. Zadatak. Nađite udaljenost točke b od ravnine $\langle v_1, v_2 \rangle$, gdje je

$$v_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}, \quad v_2 = (1,1,-2)/\sqrt{6}, \quad b = (1,0,1).$$

6.5. Metoda najmanjih kvadrata. Neka su dani vektori $a_1, \dots, a_n$ u $\mathbb{R}^m$ i vektor b koji nije u linearnoj ljusci $Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Tada sistem od m jednadžbi s n nepoznanica

$$Ax - b = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n - b = 0$$

nema rješenja, a najbolje što možemo tražiti su takvi $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ za koje je

$$||a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n - b||^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n - \beta_i|^2$$

najmanje moguće. Ponekad taj problem zapisujemo kao

$$||a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n - b||^2 \longrightarrow \min .$$

Prema teoremu o najboljoj aproksimaciji rješenje tog problema su oni $x \in \mathbb{R}^n$ za koje je

$$Ax = P(b), \tag{6.1}$$

gdje je $P(b)$ najbolja aproksimacija od b vektorima iz Y. Budući da je $P(b) \in Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, sistem (6.1) uvijek ima rješenje x. Rješavanje sistema (6.1) zovemo *metodom najmanjih kvadrata.*

6.6. Sistem jednadžbi za metodu najmanjih kvadrata. Neka V unitaran prostor, b vektor u V i $Y = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ potprostor u V razapet vektorima $a_1, \dots, a_n$. Prema teoremu 6.1 postoji jedinstveni

$$P(b) = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \in Y$$

takav da je

$$b - P(b) \perp Y.$$

To je, prema teoremu 4.1, ekvivalentno

$$(\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n - b \mid a_i) = 0 \quad \text{za sve} \quad i = 1, \dots, n,$$

ili, zapisano kao sistem jednadžbi,

$$\begin{aligned}
&(a_1 \mid a_1)\xi_1 + (a_2 \mid a_1)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_1)\xi_n = (b \mid a_1),\\
&(a_1 \mid a_2)\xi_1 + (a_2 \mid a_2)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_2)\xi_n = (b \mid a_2),\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&(a_1 \mid a_n)\xi_1 + (a_2 \mid a_n)\xi_2 + \cdots + (a_n \mid a_n)\xi_n = (b \mid a_n).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Znači da koeficijente $\xi_1, \dots, \xi_n$ za najbolju aproksimaciju $\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = P(b)$ možemo tražiti rješavanjem sistema jednadžbi (6.2).

6.7. Primjer. Vratimo se primjeru 6.3: zadan je ortonormirani skup

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

u $\mathbb{R}^3$ i vektor

$$b = (-1, -2, 1),$$

a traži se najbolja aproksimacija od b u 2-dimenzionalnom potprostoru $Y = \langle v_1, v_2 \rangle$. Da bismo učinili primjer zanimljivijim, stavimo

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{2}v_1 + \sqrt{3}v_2 = (2, 0, 1),\\
a_2 &= \sqrt{3}v_2 = (1, 1, 1),\\
a_3 &= \sqrt{2}v_1 - \sqrt{3}v_2 = (0, -2, -1),
\end{aligned}$$

pa još uvijek imamo isti $Y = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Sada tražimo

$$P(b) = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$$

rješavanjem sistema jednadžbi (6.2):

$$\begin{aligned}
5\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 &= -1,\\
3\xi_1 + 3\xi_2 - 3\xi_3 &= -2,\\
-\xi_1 - 3\xi_2 + 5\xi_3 &= 3.
\end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema Gaussovom metodom eliminacija vidimo da sistem nema jedinstveno rješenje. Lako se provjeri da je $x = (\frac{3}{6}, -\frac{7}{6}, 0)$ jedno rješenje, pa je

$$P(b) = \tfrac{3}{6}a_1 - \tfrac{7}{6}a_2 = \tfrac{3}{6}(2, 0, 1) - \tfrac{7}{6}(1, 1, 1) = (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{7}{6}, -\tfrac{4}{6}).$$

6.8. Zadatak. Nađite udaljenost točke b od ravnine $\langle a_1, a_2\rangle$, gdje je

$$a_1 = (1,1,1), \quad a_2 = (2,2,-1), \quad b = (1,0,1).$$

6.9. Primjer. Zamislimo si da eksperimentalno mjerimo veličine x i y koje su vezane “zakonom”

$$y = Ax + B,$$

a na nama je odrediti koeficijente A i B. Recimo da smo za (x, y) redom dobili $(1,2)$, $(2,3)$ i $(3,5)$. Tada sistem

$$\begin{aligned} A + B &= 2,\\ 2A + B &= 3,\\ 3A + B &= 5, \end{aligned}$$

nema rješenja i najbolje što možemo je da nepoznanice A i B odredimo metodom najmanjih kvadrata. Sistem prvo zapišemo kao $Aa_1 + Ba_2 = b$, tj.

$$A(1,2,3) + B(1,1,1) = (2,3,5) \quad \text{ili} \quad A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}.$$

a odgovarajući sistem (6.2) kao

$$\begin{aligned} (a_1 \mid a_1)A + (a_2 \mid a_1)B &= (b \mid a_1),\\ (a_1 \mid a_2)A + (a_2 \mid a_2)B &= (b \mid a_2). \end{aligned}$$

To je u našem primjeru sistem

$$\begin{aligned} 14A + 6B &= 23,\\ 6A + 3B &= 10, \end{aligned}$$

a rješenje tog sistema je $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{1}{3}$. Znači da je za taj izbor A i B suma kvadrata

$$|A + B - 2|^2 + |2A + B - 3|^2 + |3A + B - 5|^2$$

najmanja moguća. Nacrtajte pravac $y = \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{3}$ i točke $(1,2)$, $(2,3)$ i $(3,5)$ “dobivene mjerenjem”.

6.10. Zadatak. Metodom najmanjih kvadrata odredite koeficijente A i B u “zakonu”

$$y = Ax + B,$$

gdje smo “mjerenjem” za (x, y) redom dobili $(3,7)$, $(4,10)$, $(5,11)$ i $(6,12)$.

7. Teorem o projekciji

7.1. Ortogonalni komplement potprostora. Neka je V unitaran prostor i Y potprostor od V. Tada je zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu

$$Y^{\perp} = \{x \in V \mid (x \mid y) = 0 \text{ za sve } y \in Y\}$$

potprostor od Y. Potprostor $Y^{\perp}$ zovemo ga *ortogonalnim komplementom od Y.*

7.2. Suma potprostora. *Neka su W i U potprostori od V. Skup svih vektora*

$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}$$

zovemo sumom potprostora. Suma potprostora $W + U$ je vektorski prostor.

Dokaz. Za vektore $w, w', w'' \in W$ i $u, u', u'' \in U$ i skalar λ imamo

$$(w'+u')+(w''+u'') = (w'+w'')+(u'+u''), \quad \lambda(w+u) = \lambda w+\lambda u \in W+U.$$

□

7.3. Ortogonalna suma potprostora. *Neka su W i U potprostori od V. Ako je $W \perp U$, onda $W + U$ zovemo ortogonalnom sumom potprostora i pišemo*

$$W \oplus U.$$

U tom slučaju imamo jedinstveni prikaz svakog elementa $x \in W \oplus U$ kao sumu

$$x = w + u, \quad w \in W, \ u \in U.$$

Dokaz. Ako je $w + u = w' + u'$ za neke $w' \in W$ i $u' \in U$, onda je

$$w - w' = u' - u$$

element iz W i U, pa okomitost $W \perp U$ povlači

$$||w - w'||^2 = (w - w' \mid w - w') = (w - w' \mid u' - u) = 0.$$

No tada zbog svojstva norme (3.3) mora biti $w - w' = 0$, što povlači $w' = w$, a onda i $u' = u$. □

Uz uvedenu terminologiju teorem 6.1 možemo iskazati na sljedeći način

7.4. Teorem o projekciji. *Neka je V unitaran prostor i neka je Y konačno dimenzionalni potprostor. Tada je*

$$V = Y \oplus Y^{\perp}.$$

7.5. Teorem. *Neka je V unitaran konačno dimenzionalni prostor i neka je Y potprostor. Tada je*

$$\dim Y + \dim(Y^{\perp}) = \dim V \qquad \text{i} \qquad (Y^{\perp})^{\perp} = Y.$$

DOKAZ. $\square$

Neka je $v_1, \ldots, v_k$ ortonormirana baza u Y i $u_1, \ldots, u_r$ ortonormirana baza u $Y^{\perp}$. Tada je $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r$ ortonormirani skup u V. Budući da je po teoremu o projekciji svaki vektor x iz V suma vektora iz Y i $Y^{\perp}$, to je x linearna kombinacija vektora $v_1, \ldots, v_k$ i vektora $u_1, \ldots, u_r$. No to onda znači da je skup

$$v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r$$

ortonormirana baza od V, pa je $k + r = \dim V$. Nadalje, vektor

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x \mid v_i) v_i + \sum_{j=1}^{r} (x \mid u_j) u_j$$

je okomit na $Y^{\perp} = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ ako i samo ako su mu Fourierovi koeficijenti $(x \mid u_1) = \cdots = (x \mid u_r) = 0$, odnosno ako i samo ako je $x \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = Y$. Znači da je $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$.

7.6. Primjedba. Iz gornjeg teorema slijedi da se svaki potprostor $W \subset \mathbb{R}^n$ može napisati kao skup rješenja nekog homogenog sistema jednadžbi. Naime,

$$W = (W^{\perp})^{\perp},$$

pa ako ortonormiranu bazu $e_1, \ldots, e_k$ od W nadopunimo do ortonormirane baze $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ od $\mathbb{R}^n$, onda je

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x \mid e_{k+1}) = \cdots = (x \mid e_n) = 0\}.$$

7.7. Zadatak. Napišite potprostor $W = \langle a_1, a_2 \rangle$ kao skup rješenja nekog homogenog sistema jednadžbi, pri čemu je

$$a_1 = (1, 1, 0, 1), \quad a_2 = (0, 1, 1, 0).$$

POGLAVLJE 6

Površina paralelograma i volumen paralelepipeda

U ovom poglavlju izvodimo formule za površina paralelograma $P(a, b)$ u $\mathbb{R}^2$ i volumen paralelepipeda $V(a, b, c)$ u $\mathbb{R}^3$ iz svojstava koja očekujemo od takvih funkcija P i V. Pomoću dobivenih formula definiramo determinante 2×2 i 3×3 matrica. Na kraju poglavlja pomoću 3×3 determinante definiramo vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$ i dokazujemo njegova osnovna svojstva.

1. Površina paralelograma

1.1. Površina pravokutnika. Zamislimo si $\mathbb{R}^2$ kao euklidsku ravninu, a kanonsku bazu e_1, e_2 kao jedinične vektore u Kartezijevom sustavu. Tada je jedinični kvadrat (s vrhovima $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$) skup svih vektora

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,\ 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\},$$

a površina $P(e_1, e_2)$ tog jediničnog kvadrata je 1. Slično, pravokutnik s vrhovima $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(0, \beta))$, (α, β) je skup svih vektora

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda_1 \alpha e_1 + \lambda_2 \beta e_2,\ 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\}, \tag{1.1}$$

a površina tog pravokutnika

$$P(\alpha e_1, \beta e_2) = \alpha\beta \tag{1.2}$$

(baza α puta visina β). Ovdje pretpostavljamo $\alpha, \beta > 0$. Za površinu pravokutnika očito vrijede formule:

$$\begin{aligned} &P(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_1, \beta e_2) = P(\alpha_1 e_1, \beta e_2) + P(\alpha_2 e_1, \beta e_2), \\ &P(\mu\alpha e_1, \beta e_2) = \mu P(\alpha e_1, \beta e_2), \\ &P(\alpha e_1, \beta_1 e_2 + \beta_2 e_2) = P(\alpha e_1, \beta_1 e_2) + P(\alpha e_1, \beta_2 e_2), \\ &P(\alpha e_1, \mu\beta e_2) = \mu P(\alpha e_1, \beta e_2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

To su, za α_1, α_2, β_1, β_2, $\mu > 0$, samo komplicirano zapisane formule

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 + \alpha_2)\beta = \alpha_1\beta + \alpha_2\beta, \\ &(\mu\alpha)\beta = \mu(\alpha\beta), \\ &\alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2, \\ &\alpha(\mu\beta) = \mu(\alpha\beta). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ako formulom (1.2) definiramo površinu pravokutnika za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda još uvijek vrijedi (1.3) jer vrijedi (1.4) za sve α_1, α_2, β_1, β_2, $\mu \in$

$\mathbb{R}$. Naravno, u tom slučaju dozvoljavamo i negativne površine, na primjer, $P(-e_1, e_2) = -1$.

Primijetimo da sama definicija (1.1) pravokutnika ne igra nikakvu ulogu u ovom razmatranju, bitna je samo definicija **površine pravokutnika** *(1.2)!*

1.2. Površina paralelograma. Ako su $a, b \in \mathbb{R}^2$, onda definiramo *paralelogram razapet vektorima a i b* kao skup svih vektora

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda_1 a + \lambda_2 b,\ 0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1\}. \tag{1.5}$$

Naravno, dozvoljavamo i slučaj $a = b$ kada je "paralelogram" razapet vektorima a i a zapravo dužina

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda a,\ 0 \le \lambda \le 2\}. \tag{1.6}$$

Iz euklidske geometrije znamo računati površinu paralelograma: to je baza puta visina. Zato je razumno pretpostaviti da svakom paru vektora $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ možemo pridružiti površinu $P(a, b) \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} P(a_1 + a_2, b) &= P(a_1, b) + P(a_2, b), \quad P(\mu a, b) = \mu P(a, b), \\ P(a, b_1 + b_2) &= P(a, b_1) + P(a, b_2), \quad P(a, \mu b) = \mu P(a, b). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Naime, jasno je da μ puta duže stranica daje μ puta veću površinu, a geometrijski možemo interpretirati i jednakost $P(a_1 + a_2, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b)$ (nacrtajte sliku!).

Te su formule u potpunosti u skladu s formulama za površinu pravokutnika (1.3). Međutim, površine dužine (1.6) u euklidskoj ravnini mora biti nula, tj.

$$P(a, a) = 0,$$

što ne slijedi iz svojstava (1.7).

1.3. Definicija. *Kažemo da je funkcija*

$$P \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto P(a, b),$$

površina paralelograma ako za sve $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$ i $\mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

(1) $P(a_1 + a_2, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b), \quad P(\mu a, b) = \mu P(a, b),$

(2) $P(a, b_1 + b_2) = P(a, b_1) + P(a, b_2), \quad P(a, \mu b) = \mu P(a, b),$

(3) $P(a, a) = 0,$

(4) $P(e_1, e_2) = 1.$

U ovoj definiciji relacije (1) zovemo *linearnost od P u prvom argumentu*, a relacije (2) zovemo *linearnost od P u drugom argumentu.* Budući da je P linearno u oba argumenta, kažemo da je P *bilinearno.*

1.4. Linearnost u prvom argumentu funkcije P povlači (dokažite indukcijom!)

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i, b\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i P(a_i, b),$$

pa imamo formulu koja **sliči distributivnosti množenja s desna** (elementom b) u odnosu na zbrajanje (elemenata $\lambda_i a_i$). Naime, ako pišemo $a \bullet b = P(a,b)$, onda imamo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right) \bullet b = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (a_i \bullet b).$$

1.5. Linearnost u drugom argumentu funkcije P povlači

$$P\left(a, \sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\mu_j P\left(a, b_j\right)$$

pa imamo formulu koja **sliči distributivnosti množenja s lijeva** (elementom a) u odnosu na zbrajanje (elemenata $\mu_j b_j$). Naime, ako pišemo $a \bullet b = P(a,b)$, onda imamo:

$$a \bullet \left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\mu_j (a \bullet b_j).$$

1.6. Bilinearnost funkcije P povlači

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i, \sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i P\left(a_i, \sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sum_{j=1}^{m}\mu_j P\left(a_i, b_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_j P\left(a_i, b_j\right), \end{aligned}$$

pa imamo formulu koja **sliči pravilu množenja "svaki sa svakim"** elementa $\lambda_i a_i$ s elementima $\mu_j b_j$. Naime, ako pišemo $a \bullet b = P(a,b)$, onda imamo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_j (a_i \bullet b_j).$$

1.7. Lema. *Za bilinearno preslikavanje P je ekvivalentno*

(1) $P(a,a) = 0$ *za svaki* $a \in \mathbb{R}^2$,
(2) $P(a,b) = -P(b,a)$ *za sve* $a, b \in \mathbb{R}^2$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2). Zaista, zbog (1) i bilinearnosti imamo

$$0 = P(a+b, a+b) = P(a,a) + P(b,a) + P(a,b) + P(b,b) = P(b,a) + P(a,b).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Zaista, za $a = b$ relacija $P(a,b) + P(b,a) = 0$ povlači $2P(a,a) = 0$, pa imamo $P(a,a) = 0$. $\square$

Zbog svojstva $P(a,b) = -P(b,a)$ bilinearnu funkciju P zovemo *alternirajućom* ili *antisimetričnom*.

1.8. Teorem. *Površina paralelograma $P\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ postoji i jedinstvena je.*

Dokaz. Pretpostavimo da površina paralelograma postoji. Tada za

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \quad \text{i} \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

imamo

$$\begin{aligned} P(a,b) &= P(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \\ &= \alpha_1\beta_1 P(e_1,e_1) + \alpha_1\beta_2 P(e_1,e_2) + \alpha_2\beta_1 P(e_2,e_1) + \alpha_2\beta_2 P(e_2,e_2) \\ &= \alpha_1\beta_2 P(e_1,e_2) + \alpha_2\beta_1 P(e_2,e_1) \\ &= \alpha_1\beta_2 P(e_1,e_2) - \alpha_2\beta_1 P(e_1,e_2) \\ &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{aligned}$$

Ovdje druga jednakost slijedi množenjem svakog sa svakim, treća jednakost vrijedi zbog $P(e_1,e_1) = P(e_2,e_2) = 0$, četvrta zbog $P(e_2,e_1) = -P(e_1,e_2)$, peta zbog $P(e_1,e_2) = 1$. Budući da je prikaz vektora a i b u kanonskoj bazi jedinstven, to imamo jednu jedinu mogućnost za površinu P:

$$P(a,b) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \tag{1.8}$$

Da bismo dokazali egzistenciju površine, jednostavno je definiramo formulom (1.8) i provjerimo da tako definirana funkcija ima tražena svojstva. Na primjer,

$$\begin{aligned} &P(a+a',b) = (\alpha_1+\alpha_1')\beta_2 - (\alpha_2+\alpha_2')\beta_1 = P(a,b) + P(a',b), \\ &P(\lambda a,b) = (\lambda\alpha_1)\beta_2 - (\lambda\alpha_2)\beta_1 = \lambda P(a,b), \\ &P(a,b) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) = -P(b,a), \\ &P(e_1,e_2) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

1.9. Determinanta 2×2 matrice. Jedinstvenu površinu paralelograma zovemo *determinantom* 2×2 *matrice* i pišemo

$$\det(a,b) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

ili

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix}\right) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

1.10. Primjer paralelograma iste površine. Nacrtajte u ravnini, za razne $\lambda \in \mathbb{R}$, paralelograme s vrhovima $(0,0)$, $(2,0)$, $(\lambda,1)$, $(2+\lambda,1)$. Ti paralelogrami imaju iste baze duljine 2 i iste visine 1, pa i iste površine $2 \cdot 1$. Funkcija det "računa"

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Interpretirajte geometrijski formule[1]

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = 1.$$

1.11. Slučaj nul-stupca. Geometrijski je jasno da je $\det(a,0) = \det(0,b) = 0$. Prva formula slijedi algebarski iz linearnosti funkcije det u drugom argumentu. Naime,

$$\det(a,0) = \det(a, 0+0) = \det(a,0) + \det(a,0),$$

a to povlači $\det(a,0) = 0$. Formula $\det(0,b) = 0$ vrijedi zbog linearnosti funkcije det u prvom argumentu.

1.12. Zadatak. Dokažite da vektori a, b čine baza od $\mathbb{R}^2$ ako i samo ako je

$$\det(a,b) \neq 0.$$

2. Volumen paralelepipeda

2.1. Volumen kvadra i paralelepipeda. Zamislimo si $\mathbb{R}^3$ kao euklidski trodimenzionalni prostor, a kanonsku bazu e_1, e_2, e_3 kao jedinične vektore u Kartezijevom sustavu. Tada je volumen $V(e_1, e_2, e_3)$ te jedinične kocke jednak 1. Slično, kvadar sa stranicama $\alpha e_1, \beta e_2, \gamma e_3$ ima volumen

$$V(\alpha e_1, \beta e_2, \gamma e_3) = \alpha\beta\gamma. \tag{2.1}$$

Geometrijski je jasno značenje formula:

$$\begin{aligned} (\alpha_1+\alpha_2)\beta\gamma &= \alpha_1\beta\gamma + \alpha_2\beta\gamma, \quad (\mu\alpha)\beta\gamma = \mu(\alpha\beta\gamma), \\ \alpha(\beta_1+\beta_2)\gamma &= \alpha\beta_1\gamma + \alpha\beta_2\gamma, \quad \alpha(\mu\beta)\gamma = \mu(\alpha\beta\gamma), \\ \alpha\beta(\gamma_1+\gamma_2) &= \alpha\beta\gamma_1 + \alpha\beta\gamma_2, \quad \alpha\beta(\lambda\gamma) = \lambda(\alpha\beta\gamma). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Paralelepiped razapet vektorima $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ definiramo kao skup oblika

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c,\ 0 \le \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \le 1\}. \tag{2.3}$$

Naravno, dozvoljavamo i slučaj $b = a$ kada je "paralelepiped" razapet vektorima a, a i c zapravo paralelogram

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda a + \mu c,\ 0 \le \lambda \le 2,\ 0 \le \mu \le 1\}. \tag{2.4}$$

Iz euklidske geometrije znamo računati volumen paralelepipeda: to je površina baze puta visina. Zato je razumno pretpostaviti da svakoj trojki vektora

[1] Za funkcije sin i cos vrijedi $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ možemo pridružiti volumen $V(a,b,c) \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$
\begin{aligned}
&(2.5)\quad V(a_1+a_2,b,c) = V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c), \quad V(\mu a,b,c) = \mu V(a,b,c),\\
& V(a,b_1+b_2,c) = V(a,b_1,c)+V(a,b_2,c), \quad V(a,\mu b,c) = \mu V(a,b,c),\\
& V(a,b,c_1+c_2) = V(a,b,c_1)+V(a,b,c_2), \quad V(a,b,\mu c) = \mu V(a,b,c).
\end{aligned}
$$

Naime, jasno je da μ puta duža stranica daje μ puta veći volumen, a geometrijski možemo interpretirati i jednakost $V(a_1+a_2,b,c) = V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c)$ (nacrtajte sliku).

Te su formule u potpunosti u skladu s formulama za volumen kvadra (2.2). Međutim, volumen paralelograma (2.4) u ravnini trodimenzionalnog prostora mora biti nula, tj.

$$V(a,a,c) = 0,$$

što ne slijedi iz svojstava (2.5).

2.2. Definicija. *Kažemo da je funkcija*

$$V\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (a,b,c) \mapsto V(a,b,c),$$

volumen paralelepipeda ako za sve $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^3$ *i* $\mu \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

(1) $V(a_1+a_2,b,c) = V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c), \quad V(\mu a,b,c) = \mu V(a,b,c),$

(2) $V(a,b_1+b_2,c) = V(a,b_1,c)+V(a,b_2,c), \quad V(a,\mu b,c) = \mu V(a,b,c),$

(3) $V(a,b,c_1+c_2) = V(a,b,c_1)+V(a,b,c_2), \quad V(a,b,\mu c) = \mu V(a,b,c),$

(4) $V(a,a,c) = 0, \quad V(a,b,a) = 0, \quad V(a,b,b) = 0,$

(5) $V(e_1,e_2,e_3) = 1.$

U ovoj definiciji relacije (1) zovemo *linearnost od* V *u prvom argumentu*, relacije (2) zovemo *linearnost od* V *u drugom argumentu*, a relacije (3) zovemo *linearnost od* V *u trećem argumentu*. Budući da je V linearno u sva tri argumenta, kažemo da je V *trilinearno*. Svojstvo trilinearnosti treba shvatiti kao poopćenje svojstva množenja brojeva (2.2).

2.3. Trilinearnost za višestruke sume. Trilinearnost povlači

$$
\begin{aligned}
&V\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^m \mu_j b_j, \sum_{k=1}^p \nu_k c_k\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V\left(a_i, \sum_{j=1}^m \mu_j b_j, \sum_{k=1}^p \nu_k c_k\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j V\left(a_i, b_j, \sum_{k=1}^p \nu_k c_k\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j \sum_{k=1}^p \nu_k V\left(a_i, b_j, c_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_j \nu_k V\left(a_i, b_j, c_k\right),
\end{aligned}
$$

pa imamo formulu koja **sliči pravilu množenja "svaki sa svakim"** elemenata $\lambda_i a_i$, elemenata $\mu_j b_j$ i elemenata $\nu_k c_k$. Naime, ako pišemo $a \bullet b \bullet c = V(a, b, c)$, onda imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j\right) \bullet \left(\sum_{k=1}^{p} \nu_k c_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_j \nu_k (a_i \bullet b_j \bullet c_k).$$

Tu formulu trebamo shvatiti kao poopćenje pravila množenja "svaki sa svakim" za produkte višestrukih suma brojeva

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j\right)\left(\sum_{k=1}^{p} \nu_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_j \nu_k.$$

2.4. Lema. *Za trilinearno preslikavanje V je ekvivalentno:*

(1) $V(a, a, c) = 0$ *za svaki* $a \in \mathbb{R}^2$,
(2) $V(a, b, c) = -V(b, a, c)$ *za sve* $a, b \in \mathbb{R}^2$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Zaista, zbog (1) i trilinearnosti imamo

$$\begin{aligned} 0 = V(a+b, a+b, c) &= V(a, a, c) + V(b, a, c) + V(a, b, c) + V(b, b, c) \\ &= V(b, a, c) + V(a, b, c). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Zaista, za $a = b$ relacija $V(a, b, c) + V(b, a, c) = 0$ povlači $2V(a, a, c) = 0$, pa imamo $V(a, a, c) = 0$. □

Primijetimo da je ovaj dokaz u suštini prepisani dokaz leme 1.7. Naravno, na isti način vidimo da je $V(a, b, a) = 0$ za sve a ekvivalentno $V(a, b, c) = -V(c, b, a)$ za sve a i c. Zbog svojstva

$$V(a, b, c) = -V(b, a, c), \quad V(a, b, c) = -V(c, b, a), \quad V(a, b, c) = -V(a, c, b),$$

trilinearnu funkciju V zovemo *alternirajućom.*

2.5. Teorem. *Volumen paralelepipeda $V \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ postoji i jedinstven je.*

Dokaz. Pretpostavimo da volumen paralelepipeda postoji. Tada za

$$a = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{j=1}^{3} \beta_j e_j, \quad c = \sum_{k=1}^{3} \gamma_k e_k,$$

imamo

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{3} \beta_j e_j, \sum_{k=1}^{3} \gamma_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \alpha_i \beta_j \gamma_k V(e_i, e_j, e_k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \alpha_i \beta_j \gamma_k V(e_i, e_j, e_k) \\
&= \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(2)} \gamma_{\sigma(3)} V(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) \\
&= \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(2)} \gamma_{\sigma(3)} (-1)^{\sigma} V(e_1, e_2, e_3) \\
&= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(2)} \gamma_{\sigma(3)} \\
&= \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 \\
&+ \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1.
\end{aligned}
$$

Ovdje druga jednakost slijedi množenjem svakog sa svakim, primijetimo da se u sumi javljaju i članovi poput $\alpha_1\beta_1\gamma_3 V(e_1, e_1, e_3)$, a koji je nula zbog $V(e_1, e_1, e_3) = 0$. Suma $\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}$ označava da uzimamo samo indekse i, j, k koji su međosobno različiti. Budući da za indekse i, j, k koji nisu međosobno različiti $V(e_i, e_j, e_k) = 0$, treća jednakost vrijedi. Suma $\sum_\sigma$ označava sumu po svim permutacijama skupa $\{1, 2, 3\}$. Budući da su za permutaciju σ indeksi $i = \sigma(1)$, $j = \sigma(2)$ i $k = \sigma(3)$ međosobno različiti, to četvrta jednakost vrijedi jer smo samo malo drugačije zapisali sumu po međusobno različitim indeksima i, j, k. Oznaka $(-1)^\sigma = \pm 1$ je definirana relacijom

$$(-1)^\sigma V(e_1, e_2, e_3) = V(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}).$$

Na primjer, $V(e_1, e_3, e_2) = -V(e_1, e_2, e_3)$, pa je $(-1)^\sigma = -1$ za permutaciju $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 2$. Zato po definiciji vrijedi peta jednakost. Šesta jednakost vrijedi zbog $V(e_1, e_3, e_2) = 1$, a sedma jednakost daje formulu za $(-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(2)} \gamma_{\sigma(3)}$ za sve permutacije σ.

Budući da je prikaz vektora a, b i c u kanonskoj bazi jedinstven, to imamo jednu jedinu mogućnost za volumen V:

$$V(a, b, c) = \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1. \tag{2.6}$$

Da bismo dokazali egzistenciju volumena V, jednostavno ga definiramo formulom (2.6) i provjerimo da tako definirana funkcija ima sva tražena svojstva. $\square$

2.6. Determinanta 3×3 **matrice.** Jedinstveni volumen paralelepipeda zovemo *determinantom* 3×3 *matrice* i pišemo

$$\det(a, b, c) = \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1,$$

ili

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \right) = \det(a, b, c).$$

Formulu za determinantu 3×3 matrice možemo zapamtiti po *Sarrusovom pravilu*: napišemo matricu

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}$$

i zbrajamo produkte po "glavnim dijagonalama" i oduzimamo produkte po "sporednim dijagonalama":

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \beta_3\gamma_2\alpha_1 - \gamma_3\alpha_2\beta_1.$$

2.7. Zadatak. Dokažite da je determinata transponirane 3×3 matrice A^t jednaka determinanti početne matrice A, tj.

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

3. Osnovni teorem o 3×3 determinanti

3.1. Osnovni teorem o 3×3 determinanti. *Neka je $f\colon (\mathbb{R}^3)^3 \to \mathbb{R}$ multilinearna alternirajuća funkcija. Tada je*

$$f(a,b,c) = f(e_1,e_2,e_3)\det(a,b,c).$$

Dokaz. Pišemo li u dokazu teorema 2.5 multilinearnu alternirajuću funkciju f umjesto volumena V dobivamo

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= f\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{3}\beta_j e_j, \sum_{k=1}^{3}\gamma_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3}\alpha_i\beta_j\gamma_k f(e_i,e_j,e_k) \\ &= \sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}\alpha_i\beta_j\gamma_k f(e_i,e_j,e_k) \\ &= \sum_{\sigma}\alpha_{\sigma(1)}\beta_{\sigma(2)}\gamma_{\sigma(3)} f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},e_{\sigma(3)}) \\ &= \sum_{\sigma}\alpha_{\sigma(1)}\beta_{\sigma(2)}\gamma_{\sigma(3)}(-1)^{\sigma} f(e_1,e_2,e_3) \\ &= \det(a,b,c) f(e_1,e_2,e_3). \end{aligned}$$

□

3.2. Lema. *Neka su a,b,c,a',b',c' vektori u $\mathbb{R}^3$. Tada vrijedi*

(3.1)
$$\det\begin{pmatrix} (a'\mid a) & (a'\mid b) & (a'\mid c) \\ (b'\mid a) & (b'\mid b) & (b'\mid c) \\ (c'\mid a) & (c'\mid b) & (c'\mid c) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

DOKAZ. Fiksirajmo vektore a', b', c' i označimo s $f(a,b,c)$ lijevu stranu jednakosti (3.1). Budući da je skalarni produkt linearan u drugom argumentu, to prvi stupac

$$\begin{pmatrix} (a' \mid a) \\ (b' \mid a) \\ (c' \mid a) \end{pmatrix}$$

koji se javlja u formuli za f ovisi linearno o a. Zbog toga linearnost determinante u prvom argumentu povlači linearnost od f u prvom argumentu. Na isti način zaključujemo da je f linearna u drugom i u trećem argumentu. Očito je f alternirajuća funkcija jer je determinanta alternirajuća funkcija. Iz teorema 3.1 slijedi da je

$$f(a,b,c) = f(e_1,e_2,e_3)\det(a,b,c) = f(e_1,e_2,e_3)\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

pa (3.1) vrijedi jer je

$$f(e_1,e_2,e_3) = \det\begin{pmatrix} (a' \mid e_1) & (a' \mid e_2) & (a' \mid e_3) \\ (b' \mid e_1) & (b' \mid e_2) & (b' \mid e_3) \\ (c' \mid e_1) & (c' \mid e_2) & (c' \mid e_3) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{pmatrix}.$$

$\square$

3.3. Teorem. *Vektori a_1, a_2, a_3 su baza od $\mathbb{R}^3$ ako i samo ako je*

$$\det(a_1,a_2,a_3) \neq 0.$$

DOKAZ. Pretpostavimo prvo da vektori a_1, a_2, a_3 nisu baza od $\mathbb{R}^3$. Tada je jedan od vektora linearna kombinacija druga dva, recimo $a_1 = \lambda a_2 + \mu a_3$. No tada linearnost u prvom argumentu povlači

$$\det(a_1,a_2,a_3) = \det(\lambda a_2 + \mu a_3, a_2, a_3) = \lambda\det(a_2,a_2,a_3) + \mu\det(a_3,a_2,a_3),$$

a $\det(a_2,a_2,a_3) = \det(a_3,a_2,a_3) = 0$ jer je determinanta alternirajuća funkcija. Znači $\det(a_1,a_2,a_3) = 0$.

Pretpostavimo sada da su vektori a_1, a_2, a_3 baza od $\mathbb{R}^3$. Stavimo $A = (a', b', c') = (a_1, a_2, a_3)$. Tada transponirana matrica A^t ima linearno nezavisne retke a', b', c' i sistem jednadžbi

$$A^t x = \begin{pmatrix} (a' \mid x) \\ (b' \mid x) \\ (c' \mid x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = d$$

ima jedinstveno rješenje za svaku desnu stranu d (dokaži!). Neka su a, b, c rješenja sistema jednadžbi

$$A^t x = e_1, \quad A^t x = e_2, \quad A^t x = e_3.$$

Tada prema lemi 3.2 imamo

$$\det A^t \det(a,b,c) = det(A^t a, A^t b, A^t c) = \det(e_1,e_2,e_3) = 1 \neq 0.$$

Znači da je $\det A = \det A^t \neq 0$. $\square$

4. Laplaceov razvoj 3×3 determinante

4.1. Laplaceov razvoj 3×3 determinante. Sarrusovo pravilo vrijedi samo za determinante matrica tipa 3×3. Pravilo koje vrijedi općenito je tzv. Laplaceov razvoj determinante. Na primjer, Laplaceov razvoj determinante matrice tipa 3×3 po trećem stupcu je

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \gamma_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} - \gamma_2 \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} + \gamma_3 \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

a Laplaceov razvoj determinante po prvom retku je

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \det \begin{pmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} - \beta_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} + \gamma_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Općenito je Laplaceov razvoj po nekom stupcu (ili retku) suma elemenata u tom stupcu (odnosno retku) množenih determinantama 2×2 matrica dobivenih brisanjem retka i stupca u kojem se element nalazi, a predznaci se biraju po pravilu

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

4.2. Napomena. Ponekad pravilo o Laplaceovom razvoju koristimo za preglednije zapisivanje formula. Na primjer, ako su G_1, G_2 i G_3 vektori i $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, 3$, onda izraz

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)G_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)G_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)G_3$$

kraće zapisujemo kao

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & G_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & G_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & G_3 \end{pmatrix},$$

misleći pritom da treba primijeniti formulu (kao što je ona) za Laplaceov razvoj determinante po trećem stupcu.

5. Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$

Važnu ulogu u geometriji prostora $\mathbb{R}^3$ igra vektorski produkt. Općenito na $\mathbb{R}^n$ postoje algebarske strukture koje u nekim aspektima poopćuju vektorski produkt, ali ni jedna od njih nije sasvim kao vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$.

5.1. Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$. Za vektore $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiramo *vektorski produkt vektora a i b* kao vektor

$$a \times b = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 \tag{5.1}$$

u $\mathbb{R}^3$, što kraće zapisujemo kao

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & e_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & e_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & e_3 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Očito je *vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$*

$$\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (a, b) \mapsto a \times b$$

bilinearno preslikavanje[2], tj. vrijedi

$$\begin{aligned} (a' + a'') \times b &= a' \times b + a'' \times b, \quad (\lambda a) \times b = \lambda(a \times b), \\ a \times (b' + b'') &= a \times b' + a \times b'', \quad a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b), \end{aligned}$$

i alternirajuće preslikavanje[3], tj. vrijedi

$$a \times b = -\, b \times a.$$

5.2. Primjer.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a \times b = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & e_1 \\ 2 & 0 & e_2 \\ 1 & 3 & e_3 \end{pmatrix} = 6e_1 - 4e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Zadatak. Izračunajte $a \times b$ za $a = (1, 1, 1)$ i $b = (1, -1, 0)$.

5.4. Pitanje. Da li je definirano $a \times b$ za $a = b = (1, 1)$? DA NE

5.5. Mješoviti produkt u $\mathbb{R}^3$. Za $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$ skalarni produkt

$$(a \times b \mid c) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\gamma_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma_3, \tag{5.3}$$

zovemo *mješovitim produktom vektora a, b i c.* Očito je

$$(a \times b \mid c) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

pa zbog alternirajućeg svojstva determinante slijedi

$$(a \times b \mid a) = 0, \qquad (a \times b \mid b) = 0. \tag{5.5}$$

[2] ponekad kažemo i da vrijedi *distributivnost vektorskog množenja u odnosu na zbrajanje* i *homogenost vektorskog množenja u odnosu na množenje skalarom*

[3] ponekad kažemo i da je vektorski produkt *antikomutativno množenje*

5.6. Lema. *Vektori $a, b \in \mathbb{R}^3$ su linearno nezavisni ako i samo ako je njihov vektorski produkt $a \times b \neq 0$.*

DOKAZ. Zbog linearnosti u drugom argumentu imamo $a \times 0 = 0$. Ako je $a = \lambda b$, onda je opet $a \times b = (\lambda b) \times b = \lambda(b \times b) = \lambda 0 = 0$. S druge strane, ako su a i b linearno nezavisni, onda ih možemo nadopuniti do baze a, b, c od $\mathbb{R}^3$ i teorem 3.3 povlači da je mješoviti produkt $(a \times b \mid c) = \det(a, b, c) \neq 0$. No onda je nužno $a \times b \neq 0$. □

5.7. Konstrukcija okomice na ravninu u $\mathbb{R}^3$. Neka su a i b linearno nezavisni vektori. Tada je linearna ljuska $\langle a, b\rangle$ ravnina u $\mathbb{R}^3$. Iz relacije (5.5) i teorema 5.4.1 slijedi da je $a \times b$ okomica na ravninu, odnosno

$$a \times b \perp \langle a, b\rangle.$$

Po teoremu o projekciji 2-dimenzionalnu ravninu $W = \langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}^3$ možemo zadati jednom jednadžbom

$$W = (W^\perp)^\perp = (\mathbb{R}c)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (c \mid x) = 0\}$$

za neki vektor (odnosno bazu) $c \neq 0$ u $W^\perp$. Ako uzmemo $c = a \times b$, onda je

$$W = \langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a \times b \mid x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \det(a, b, x) = 0\}.$$

Tako je, na primjer, za vektore a i b iz primjera 5.2 ravnina $\langle a, b\rangle$ zadana jednadžbom

$$6\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 = 0,$$

odnosno

$$\langle a, b\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & \xi_1 \\ 2 & 0 & \xi_2 \\ 1 & 3 & \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

5.8. Primjer. Neka je

$$\Sigma = c + \langle a, b\rangle = \{x = c + d \mid d \in \langle a, b\rangle\}$$

ravnina u $\mathbb{R}^3$ kroz točku $c = (1, -1, 2)$ paralelna potprostoru razapetom vektorima $a = (1, 1, 0)$ i $b = (0, 1, 1)$. Tada uvjet $x - c = d \in \langle a, b\rangle$ možemo napisati pomoću jednadžbe

$$\det(a, b, x - c) = 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi_1 - 1 \\ 1 & 1 & \xi_2 + 1 \\ 0 & 1 & \xi_3 - 2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{x \mid (\xi_1 - 1) - (\xi_2 + 1) + (\xi_3 - 2) = 0\}. \end{aligned}$$

Kažemo da je

$$(\xi_1 - 1) - (\xi_2 + 1) + (\xi_3 - 2) = 0$$

jednadžba ravnine Σ.

5.9. Zadatak. Napišite jednadžbu ravnine Σ u $\mathbb{R}^3$ kroz točku $c = (1,-1,-1)$ paralelnu potprostoru razapetom vektorima $a = (1,-1,2)$ i $b = (2,1,1)$.

5.10. Udaljenost točke od ravnine u $\mathbb{R}^3$. Ako je x točka i W potprostor u $\mathbb{R}^n$, onda je udaljenost točke x od W jednaka normi $||Q(x)||$ vektora $Q(x) = x - P(x)$ okomitog na potprostor W, a projekciju $P(x) \in W$ računamo metodom najmanjih kvadrata. U slučaju kad je $W = \langle a, b\rangle$ ravnina u $\mathbb{R}^3$ razapeta vektorima a i b, onda je

$$e = \frac{a \times b}{||a \times b||}$$

jedinični vektor okomit na ravninu W, a komponenta od x duž vektora e je

$$Q(x) = (x \mid e)e, \quad ||Q(x)|| = |(x \mid e)| = \frac{|(x \mid a \times b)|}{||a \times b||}.$$

5.11. Primjer. Vratimo se primjeru 5.6.3 iz prethodnog poglavlja u kojem je izračunata udaljenost točke b od ravnine $Y = \langle v_1, v_2\rangle$ u $\mathbb{R}^3$ za vektore

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad b = (-1,-2,1).$$

Tada je

$$v_1 \times v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ -1 & 1 & e_2 \\ 0 & 1 & e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad ||v_1 \times v_2|| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1,$$

pa je projekcija od b na okomicu $e = v_1 \times v_2$ na ravninu Y jednaka

$$Q(b) = (b \mid e)e = \frac{1+2+2}{\sqrt{6}}\, e = \frac{5}{\sqrt{6}}\, e.$$

Znači da je udaljenost b od Y jednaka $||Q(b)|| = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

5.12. Zadatak 5.6.4. Nađite udaljenost točke b od ravnine $\langle v_1, v_2\rangle$ za

$$v_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}, \quad v_2 = (1,1,-2)/\sqrt{6} \quad \text{i} \quad b = (1,0,1).$$

5.13. Zadatak. Nađite udaljenost točke d od ravnine $\Pi = c + \langle v_1, v_2\rangle$,

$$v_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}, \quad v_2 = (1,1,-2)/\sqrt{6}, \quad c = (1,1,1) \quad \text{i} \quad d = (2,1,2).$$

(Uputa: Budući da je $d(x-c, y-c) = d(x,y)$, to je udaljenost točke d od ravnine Π jednaka udaljenosti točke $d - c$ od ravnine $\Pi - c = \langle v_1, v_2\rangle$.)

5.14. Teorem. *Za sve $a, b \in \mathbb{R}^3$ vrijedi*

$$||a \times b||^2 = \det \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) \\ (b \mid a) & (b \mid b) \end{pmatrix} = ||a||^2 ||b||^2 - |(a \mid b)|^2. \tag{5.6}$$

DOKAZ. Ako su vektori a i b linearno zavisni, onda su obje strane (5.6) jednake nuli i jednakost vrijedi. Pretpostavimo zato da su vektori a i b linearno nezavisni. Tada je prema lemi 5.6 $a \times b \neq 0$. Budući da je determinanta 3×3 matrice jednaka determinanti njoj transponirane matrice, to iz (3.1) za $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$ imamo

$$|(a \times b \mid c)|^2 = \left(\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \right)^2 = \det \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) & (a \mid c) \\ (b \mid a) & (b \mid b) & (b \mid c) \\ (c \mid a) & (c \mid b) & (c \mid c) \end{pmatrix}.$$

Prema (5.5) za $c = a \times b$ imamo $(a \mid c) = (b \mid c) = 0$, pa Laplaceov razvoj zadnje determinante po trećem stupcu daje

$$||c||^4 = ||a \times b||^4 = (c \mid c) \det \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) \\ (b \mid a) & (b \mid b) \end{pmatrix}.$$

Pokratimo li s $||c||^2 = (c \mid c) \neq 0$, dobijamo formulu (5.6). $\square$

5.15. Površina paralelograma u $\mathbb{R}^3$. Primijetimo da iz teorema 5.14 dobivamo Cauchyjevu nejednakost (5.3.7). Podsjetimo se da je Cauchyjeva nejednakost vezana uz formulu za kosinus kuta između vektora

$$(a \mid b) = ||a|| \, ||b|| \cos\varphi,$$

pa ako to uvrstimo u (5.6) dobivamo

$$||a \times b||^2 = ||a||^2 ||b||^2 (1 - \cos\varphi^2) = ||a||^2 ||b||^2 \sin\varphi^2.$$

U paralelogramu razapetom vektorima $a, b \in \mathbb{R}^3$ duljina baze je $||a||$, a visina je $||b|| \sin\varphi$. Zato $||a \times b||^2$ možemo interpretirati kao **kvadrat površine paralelograma** razapetog vektorima $a, b \in \mathbb{R}^3$ danog formulom

$$\Gamma(a, b) = \det \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) \\ (b \mid a) & (b \mid b) \end{pmatrix}.$$

Iz formule u dokazu teorema 5.14 vidimo da je **kvadrat volumena paralelepipeda** razapetog vektorima $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ dan formulom

$$\Gamma(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) & (a \mid c) \\ (b \mid a) & (b \mid b) & (b \mid c) \\ (c \mid a) & (c \mid b) & (c \mid c) \end{pmatrix}.$$

Determinante $\Gamma(a, b)$ i $\Gamma(a, b, c)$ zovemo *Gramovim determinantama.*

5.16. Zadatak. Izračunajte površinu paralelograma razapetog vektorima $a = (1, 1, 1)$ i $b = (1, 1, 0)$ koristeći

(1) Gramovu determinantu $\Gamma(a, b)$ i
(2) neki drugi način.

Iz teorema 5.14 i formule (5.5) slijedi

5.17. Teorem. *Neka su* f_1 *i* f_2 *ortonormirani vektori u* $\mathbb{R}^3$*. Tada je* f_1*,* f_2 *i* $f_3 = f_1 \times f_2$ *ortonormirana baze u* $\mathbb{R}^3$*.*

5.18. Konstrukcija ortonormirane baze u $\mathbb{R}^3$. Ako je f_1 normirani vektor u $\mathbb{R}^3$, onda nije teško naći normirani vektor f_2 okomit na f_1. Tako, na primjer, za

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

možemo "pogoditi" niz vektora okomitih na f_1:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Uzmemo li, na primjer, prvi od tih vektora i normiramo li ga, dobivamo

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Stavimo li

$$f_3 = f_1 \times f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & e_1\\1 & -1 & e_2\\1 & 0 & e_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

onda je f_1, f_2, f_3 ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$.

5.19. Primjer. Neka su a i b vektori iz primjera 5.2. Želimo li naći ortonormiranu bazu potprostora $\langle a, b\rangle$, onda možemo računati

$$g_1 = \frac{a}{||a||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g_3 = \frac{a \times b}{||a \times b||} = \frac{1}{\sqrt{56}}\begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Tada je

$$g_2 = g_1 \times g_3 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\det\begin{pmatrix}1 & 3 & e_1\\2 & -2 & e_2\\1 & 1 & e_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6\cdot 14}}\begin{pmatrix}4\\2\\-8\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$$

vektor iz potprostora $\langle a, b\rangle$ jer je okomit na okomicu $a \times b = \sqrt{56}\, g_3$. No onda je g_1, g_2 ortonormirana baza potprostora $\langle a, b\rangle$, tj.

$$\langle a, b\rangle = \langle g_1, g_2\rangle.$$

5.20. Jednadžbe pravca u $\mathbb{R}^3$. Neka je $v \neq 0$ vektor smjera pravca $p = \langle v\rangle$. Po teoremu o projekciji 1-dimenzionalni potprostor p u $\mathbb{R}^3$ možemo zadati dvjema jednadžbama

$$p = (p^\perp)^\perp = (\mathbb{R}a + \mathbb{R}b)^\perp = \{x \mid (a \mid x) = (b \mid x) = 0\}$$

za neku bazu a, b potprostora $p^\perp$ od $\mathbb{R}^3$. Za dani vektor $v \in \mathbb{R}^3$ lako je naći jedan vektor $a \neq 0$ okomit na v, a za drugi vektor onda uzmemo $b = a \times v$.

5.21. Primjer. Neka je $v = (1,2,1)$ vektor smjera pravca $p = \langle v \rangle$. Očito je $a = (1,0,-1)$ okomit na v. Ako stavimo

$$b = a \times v = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ 0 & 2 & e_2 \\ -1 & 1 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

onda je a, b baza potprostora $p^\perp$ i $p = (p^\perp)^\perp$ je zadan sistemom jednadžbi

$$\begin{aligned} (a \mid x) &= \xi_1 - \xi_3 = 0, \\ (b \mid x) &= 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = 0. \end{aligned}$$

5.22. Primjer. Neka je pravac $q = \{x = c + d \mid d \in p\}$ kroz točku $c = (3,-2,1)$ paralelan s pravcem $p = \langle v \rangle$ iz prethodnog primjera. Uvjet $x - c \in p$ možemo zapisati kao sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} (a \mid x - c) &= (\xi_1 - 3) - (\xi_3 - 1) = 0, \\ (b \mid x - c) &= 2(\xi_1 - 3) - 2(\xi_2 + 2) + (\xi_3 - 1) = 0 \end{aligned}$$

kojeg zovemo jednadžbama pravca q.

5.23. Zadatak. Neka je $q = \{x = c + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ pravac kroz točku $c = (3,-2,1)$ s vektorom smjera $v = (-2,1,-1)$. Napišite jednadžbe pravca q.

Dio 2

Linearna algebra 2