DISKRETNA MATEMATIKA - 1. zadaća

Ime i prezime : ______________________________ JMBAG : ________________

Rješenja treba predati asistentu na sljedećim vježbama.
Zaokružite redne brojeve zadataka koje ste rješavali.

1. Odredite broj 3-permutacija i 3-kombinacija skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$.

2. Odredite broj pozitivnih djelitelja brojeva 630 i 151200 koji su djeljivi s 3.

3. Odredite koliko ima četveroznamenkastih brojeva kojima je

   (a) prva znamenka paran broj;
   (b) prva znamenka neparan broj;
   (c) prva i zadnja znamenka paran broj;
   (d) koji su neparni i kojima su sve znamenke različite;
   (e) koji su djeljivi s 5 i imaju međusobno različite znamenke;
   (f) koji su parni i ne sadrže znamenke 1 i 3.

4. Na koliko načina možemo posjesti 6 djevojaka i 5 mladića oko okruglog stola ako

   (a) nema restrikcija;
   (b) nema susjednih mladića;
   (c) sve djevojke čine jedan blok;
   (d) Ana sjedi između Ivane i Marka?

5. Koliko ima permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ takvih da nikoja dva od $1,2,3$ nisu susjedni?

6. Odredite broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1+\ldots x_6=66$, takvih da je

$$x_1\geq 3,\ x_2\geq 6,\ 3\leq x_3\leq 8,\ x_4\geq 2,\ x_5\geq 4,\ x_6\geq 3.$$

7. Odredite broj najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od točke $(0,0)$ do točke $(m,n)(m,n\geq 8)$ koji prolaze kroz točku $(2,3)$ i segment $[(4,4),(4,5)]$, a ne prolaze kroz točku $(7,7)$.

8. Na koliko načina možemo odabrati grupu od $2k$ ljudi od n bračnih parova ako:

   (a) se grupa sastoji od k parova;
   (b) u grupi se ne nalazi niti jedan par;
   (c) u grupi se nalazi barem jedan par;
   (d) u grupi se nalaze točno dva para?

9. Neka su zadani skupovi $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ i $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$. Neka je zadan $S\subset A\times B$. Pretpostavimo da se element a_i javlja kao prva komponenta u x_i parova iz S, $i=1,\ldots,m$, te da se b_j javlja kao druga komponenta u y_j parova iz S, $j=1,\ldots,n$. Dokažite da je tada

$$|S|=\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{j=1}^{n}y_j.$$

10. Neka je zadan $k\in\mathbb{N}$. Dokažite da se svaki $N\in\mathbb{N}$ na jedinstven način može zapisati u formi

$$N=\binom{x_k}{k}+\binom{x_{k-1}}{k-1}+\cdots+\binom{x_1}{1}$$

gdje je $0\leq x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k$.