DISKRETNA MATEMATIKA

VJEŽBE

U ovoj skripti su dijelom natipkani zadaci koji su rješavani na vježbama iz Diskretne matematike u akademskoj godini 2009./2010., uz kasnije prepravke i dodatke.

Skripta može pomoći studentima u boljem shvaćanju gradiva, ali ne može zamijeniti vježbe.

Zadaci i rješenja:
MAROJE MAROHNIĆ i MATIJA BAŠIĆ.

Natipkali i uredili:
IVAN KRIJAN, MARKO BOŽIĆ, IVAN GAVRAN i MARIO BERLJAFA,
te
MARKO ERCEG.

Zagreb, 30. siječnja 2015.

Sadržaj

1 Osnovni principi prebrojavanja

Broj elementa nekog konačnog skupa A označavat ćemo s $|A|$.

Princip sume Broj elemenata unije u parovima disjunktnih skupova jednak je sumi njihove unije. Preciznije zapisano: za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takve da za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, imamo $A_i \cap A_j = \emptyset$, vrijedi:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Primjer 1.1. Iz grada A u grad B možemo doći brodom, autom ili avionom. Postoje dva morska, dva cestovna i tri zračna puta. Na koliko načina možemo doći iz grada A u grad B?

Rješenje. Označimo s AB skup svih puteva iz grada A u grad B, a s M, Z i C redom morske, zračne i cestovne putove. Jasno je da vrijedi

$$M \cap Z = Z \cap C = C \cap M = \emptyset,$$

stoga možemo primjeniti pravilo sume:

$$|AB| = |M \cup Z \cup C| = |M| + |Z| + |C| = 2 + 3 + 2 = 7.$$

✓

Definicija 1.1. S $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ označavamo **Kartezijev produkt** skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n) \,:\, a_i \in A_i\}.$$

Princip produkta Za konačne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vrijedi

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Princip bijekcije Dva skupa A i B imaju jednak broje elemenata ako postoji bijekcija između njih.

Primjer 1.2. Da bismo iz grada A došli u grad D, moramo proći kroz gradove B i C. Iz grada A u grad B možemo doći na 2 načina, iz B u C na 5, a iz grada C u grad D na 3 načina. Na koliko načina možemo doći iz grada A u grad D?

Rješenje. Neka je AD skup svih puteva između gradova A i D, AB skup svih puteva između A i B, BC skup svih puteva između B i C, te CD neka je skup svih puteva između gradova C i D. Svakom $p \in AD$ možemo bijektivno pridružiti uređenu trojku $(p_1,\, p_2,\, p_3)$, gdje je $p_1 \in AB$, $p_2 \in BC$, $p_3 \in CD$. Sada primjenom principa bijekcije i pravila produkta dobivamo da je

$$|AD| = |AB \times BC \times CD| = |AB| \cdot |BC| \cdot |CD| = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30.$$

✓

Zadatak 1.3. Odredite broj prirodnih djelitelja broja 600. [Rj. 24]

Uputa. Broj prirodnih djelitelja prirodnog broja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ prikazanog u raspisu na proste faktore je $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$. Dokaži!

Zadatak 1.4. Odredite broj uređenih parova nenegativnih cijelih brojeva $(x,\, y)$ koji zadovoljavaju nejednadžbu

$$x^2 + y^2 \leq 5.$$

[Rj. 8]

Uputa. Ukoliko je $x \geq 3$ jasno je da rješenja ne postoje, dakle, preostaje promotriti slučajeve kada je $x \in \{0, 1, 2\}$. Kako bi došli do konačnog rješenja, je li potrebno broj rješenja u svakom pojedinom slučaju pomnožiti ili zbrojiti?
Još jedan način je da promotrimo skupove definirane sa $S_i = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 = i\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$. Je li potrebno pomnožiti ili zbrojiti međusobno brojeve elemenata skupova S_i?

Primjer 1.5. Neka su definirani skupovi $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$ te

$$S = \{(a, b, c) : a, b, c, \in X, a < b, a < c\}.$$

Koliko je $|S|$?

Rješenje. Broj a može biti bilo koji broj iz skupa $X \setminus \{100\}$, fiksiramo li broj a iz tog skupa, broj b i broj c tada, zbog uvjeta možemo izabrati na $100 - a$ načina (bilo koji broj između $a + 1$ i 100, uključivo). Konačno, traženi broj je

$$|S| = \sum_{a=1}^{99} (100 - a)^2 = \sum_{a=1}^{99} a^2 = \frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} = 328350.$$

✓

Napomena 1.2. Prethodni primjer smo mogli riješiti tako da smo najprije odabrali i fiksirali b i c, te potom birali a. U tom slučaju se dobiva

$$|S| = \sum_{b=2}^{100} \sum_{c=2}^{100} (\min\{b, c\} - 1) .$$

Lako se provjeri na računalu da obje formule daju isti rezultat.

Princip komplementa Za konačne skupove A i S takve da je $A \subseteq S$ vrijedi

$$|S \setminus A| = |S| - |A|.$$

Primjer 1.6. Koliko ima prirodnih brojeva manjih (strogo) od 10^n koji sadrže znamenku 4?

Rješenje. Jasno je da svi takvi brojevi mogu sadržavati $1, 2, \ldots, n$ znamenki 4. Jednostavnije nam je prebrojati koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n koji ne sadrže znamenku 4. Prirodnih brojeva manjih od 10^n ima $10^n - 1$. Sve prirodne brojeve manje od 10^n možemo promatrati kao n–znamenkaste (na početku može biti nekoliko nula, jedini koji nam "ne valja" je onaj koji sadrži samo nule). Dakle, prirodnih brojeva manjih od 10^n koji ne sadrže znamenku 4 ima $9^n - 1$, svaka znamenka može biti bilo koja osim 4, te još moramo odbaciti slučaj kada su sve znamenke jednake 0. Konačno, odgovor na pitanje zadatka je

$$(10^n - 1) - (9^n - 1) = 10^n - 9^n.$$

✓

Pokušajte riješiti prethodni primjer bez principa komplementa za $n = 3$. Koje je rješenje jednostavnije?

Definicija 1.3. Neka je S skup. **Partitivni skup** $\mathcal{P}(S)$ je skup koji sadrži sve podskupove skupa S.

Teorem 1.4. Neka je S konačan skup i $|S| = n \in \mathbb{N}_0$. Tada je $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Dokaz. Ukoliko je S prazan skup, jasno je da je jedini podskup skupa S samo prazan skup, pa tvrdnja vrijedi, jer je $2^0 = 1$. Pretpostavimo sada da je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Promotrimo sve binarne nizove duljine n, svaki od njih će određivati jedan podskup skupa S. Ukoliko je na i–tom mjestu u nizu broj 1, onda se a_i nalazi, a ukoliko je 0 onda se ne nalazi u podskupu određenom s tim nizom. Jasno je da smo na ovaj način odredili sve moguće podskupove skupa S i da svakom podskupu odgovara točno jedan binarni niz duljine n. Na svakom mjestu u binarnom nizu može se nalaziti broj 1 ili broj 0, dakle, takvih nizova ima 2^n. Prema principu bijekcije, zaključujemo da je $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$. Ovime je dokaz gotov. ■

Primjer 1.7. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredi sumu svih upisanih brojeva.

Rješenje. Prije samog rješavanja promotrimo kako ploča izgleda u slučajevima $n = 2$ i $n = 3$:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}\,, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 9 & 12 & 9 \\ \hline 12 & 16 & 12 \\ \hline 9 & 12 & 9 \\ \hline \end{array}\,.$$

Uvedimo koordinatni sustav kao na slici.

n						
$\vdots$						
j				b		
$\vdots$						
2						
1						
	1	2	$\dots$	i	$\dots$	n

Svakom polju s brojem b odgovara točno b pravokutnika koji sadrže to polje. Zato je suma svih brojeva b jednaka sumi površine svih pravokutnika na ploči. Svaki pravokutnik je jednoznačno određen svojim dimenzijama i pozicijom donjeg lijevog polja. x koordinatu donjeg lijevog polja pravokutnika dimenzija $i \times j$ možemo odabrati na $n - i + 1$ načina (bilo koji broj između 1 i $n - i + 1$, uključivo), analogno, y koordinatu možemo odabrati na $n - j + 1$ načina. Dakle, pravokutnika dimenzija $i \times j$ na danoj ploči ima $(n - i + 1)(n - j + 1)$. Konačno, traženo rješenje je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[(n-i+1)(n-j+1)\cdot i\cdot j\right]\right\} &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[(n-i+1)\cdot i\right]\cdot\sum_{j=1}^{n}\left[(n-j+1)\cdot j\right]\right\} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(n+1)\cdot i - i^2\right]\right\}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[(n+1)\cdot i - i^2\right]\right\} \\
&= \left[(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2\right]^2 \\
&= \left[(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^2 \\
&= \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right]^2.
\end{aligned}$$

✓

2 Permutacije skupova

Definicija 2.1. Uređenu k–torku $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ međusobno različitih elemenata iz skupa $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ koji sadrži n elemenata nazivamo k–**permutacijom** skupa A. Posebno n–permutaciju nazivamo jednostavno permutacijom skupa A. Često ćemo radi jednostavnije notacije ispustiti zagrade i permutaciju $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ označavati s $b_1 b_2 \dots b_k$.

Primjer 2.1. Neka je $A = \{a, b, c, d\}$. Napišite sve 2–permutacije skupa A.

Rješenje. Iz definicije odmah slijedi da je rješenje $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$. ✓

Primijetite da aa, bb, cc, dd nisu permutacije, već *permutacije s ponavljanjem*. Također poredak nam je bitan, pa npr. $ba \neq ab$. Ukoliko poredak nije bitan riječ je o kombinacijama, no o tome više u sljedećem poglavlju. Sada ćemo odrediti koliko ima k–permutacija skupa od n elemenata. Prisjetimo se definicije faktorijele:

Definicija 2.2. Za prirodan broj n definiramo $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (n **faktorijel**), dodatno $0! = 1$.

Napomena 2.3. Primijetite da faktorijele brzo rastu (već je $7! = 5040$), stoga je korisna Stirlingova formula koja ih (za velike n) dobro aproksimira:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Problem 2.4. Odredite koliko ima k–permutacija skupa koji sadrži n elemenata.

Rješenje. Označimo traženi broj s P_k^n. Prvi element k–permutacije možemo odabrati na n načina, drugi na $n-1$, ..., a posljednji (k–ti) na $n-k+1$ način. Iz principa produkta slijedi

$$P_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

✓

Primjer 2.2. Koliko se nizova slova duljine 5 može sastaviti iz hrvatske abecede, tako da su na prvom i petom mjestu različiti samoglasnici, a na ostala tri mjesta međusobno različiti suglasnici. (Hrvatska abeceda ima 30 slova, od kojih su 5 samoglasnici, a ostalo suglasnici.)

Rješenje. Na prvo mjesto možemo postaviti bilo koji od 5 samoglasnika, pa nam za peto mjesto ostaju 4 izbora, točnije, postoji P_2^5 načina za popuniti prvo i peto mjesto. Drugo, treće i četvrto mjesto možemo popuniti na ukupno P_3^{25} načina. Sada, za bilo koji način popunjavanja prvog i petog mjesta, postoji P_3^{25} načina popunjavanja preostala tri mjesta. Dakle, konačno rješenje je

$$P_2^5 \cdot P_3^{25} = 5 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 276000.$$

✓

Primjer 2.3. Na zabavi je 7 mladića i 3 djevojke. Na koliko načina ljude možemo posložiti u red tako da

(a) djevojke se nalaze na prva tri mjesta;

(b) tri djevojke čine jedan blok;

(c) mladići se nalaze na prvoj i posljednjoj poziciji i nema susjednih djevojaka.

Rješenje.

(a) Djevojke mogu stati u red na $3!$ načina, a mladići na $7!$ načina pa je konačno rješenje $3! \cdot 7!$. Zašto smo koristili princip produkta, a ne princip sume?.

(b) Blok od tri djevojke možemo postaviti na 8 različitih mjesta (tako da je prva djevojka u bloku na jednom od 1. do 8. mjesta u redu, uključivo). Djevojke unutar toga bloka možemo rasporediti na 3! načina. Mladiće moramo rasporediti na preostalih 7 mjesta, što možemo učiniti na 7! načina. Dakle, rješenje je $8 \cdot 3! \cdot 7! = 3! \cdot 8!$.

(c) Rasporedimo najprije mladiće u red, to možemo učiniti na 7! načina. Sada u red moramo smjestiti još 3 djevojke. Prvu djevojku možemo smjestiti između prvog i drugog, drugog i trećeg, itd. šestog i sedmog mladića. Dakle, za prvu djevojku imamo 6 načina, slično, nakon što smo smjestili prvu djevojku, za drugu imamo 5 načina, a konačno za treću 4 načina. Rješenje je $7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

✓

Primjer 2.4. Koliko ima parnih brojeva između 20000 i 70000 takvih da su znamenke svakog broja međusobno različite.

Rješenje. Na prvom mjestu može se nalaziti bilo koja znamenka iz skupa $\{2, 3, \ldots, 6\}$. Moramo posebno promotriti slučaj kada je prva znamenka parna, te kada je neparna.

1° Ukoliko je prva znamenka parna, nju možemo izabrati na 3 načina. Zadnju znamenku tada možemo izabrati na 4 načina (bilo koja parna znamenka osim one koja je već odabrana kao prva), a preostale tri znamenke na $8 \cdot 7 \cdot 6$ načina. Dakle, u ovom slučaju imamo $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ načina.

2° Ukoliko je prva znamenka neparna, nju možemo izabrati na 2 načina, zadnju na 5, a preostale 3 opet na $8 \cdot 7 \cdot 6$, što nam daje još $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

Dakle, konačno rješenje je $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot (3 \cdot 4 + 2 \cdot 5) = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 22 = 7392$. ✓

Zadatak 2.5. Na koliko načina se može razmjestiti 8 kula na šahovku ploču tako da se nikoje dvije kule ne napadaju?

(a) Bez dodatnih uvjeta. [Rj. 8!]

(b) Tako da se kule razlikuju. $\left[\text{Rj. } (8!)^2\right]$

(Kula napada sva polja u istom retku i stupcu u kojem se nalazi.)

Primjer 2.6. Na koliko načina možemo rasporediti n bračnih parova oko okruglog stola? Dva rasporeda smatramo jednakim ako se jedan iz drugoga može dobiti rotacijom.

(a) Bez dodatnih uvjeta.

(b) Tako da Ana i Ivan sjede jedno do drugoga. $(n \geq 2)$

(c) muškarci i žene alterniraju,

(d) svaka žena sjedi do svog muža.

Rješenje.

(a) Možemo razmišljati na dva načina. Najprije poslažemo ljude normalno u red, što možemo učiniti na $(2n)!$ načina. Sada, "krajeve" tog reda spojimo u krug, vidimo da se svaki raspored ponavlja točno $2n$ puta, dakle, odgovor je $(2n-1)!$. **Zapamtimo da je broj rasporeda m ljudi oko okruglog stola jednak $(m-1)!$.**
Drugi način je da izaberemo jednu osobu i nju smatramo početkom, sada je jasno da preostale ljude možemo razmjestiti na $(2n-1)!$ načina.

(b) Anu i Ivana možemo smatrati jednim blokom i ujedno njega smatrati početkom, Anu i Ivana unutar toga bloka možemo rasporediti na 2 načina, a preostalih $2n-2$ ljudi na $(2n-2)!$ načina. Dakle, odgovor je $2 \cdot (2n-2)!$.

(c) Rasporeda n muževa oko okruglog stola ima $(n-1)!$. Između njih žene se mogu sjesti na $n!$ načina. Slijedi da je traženo rješenje (zašto princip produkta?) $n! \cdot (n-1)!$.

(d) Promatajmo bračne parove kao blokove. Tada ima $(n-1)!$ rasporeda bračnih parova oko okruglog stola. Svaki blok možemo permutirati na dva načina pa je rješenje (zašto princip produkta?) jednako $2^n \cdot (n-1)!$.

✓

Zadatak 2.7.

(a) S koliko nula završava broj 100!?

(b) S kojim eksponentom prost broj p ulazi u rastav broja $n!$ na proste faktore?

Rješenje.

(a) Primjetimo da će broj 100! završiti s onoliko nula koliko puta se broj 5 pojavljuje u njegovom raspisu na proste faktor. (Za svaki par brojeva 2 i 5 u raspisu broja $n!$ na proste faktore dobijemo jednu nulu na njegovom kraju, ali broj 2 se sigurno pojavljuje više puta od broja 5.) Konačno, broj 100! završava s $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 24$ nule. (U (b) dijelu zadatka je objašnjeno zašto vrijedi korištena formula.)

(b) Prost broj p se u raspisu broja $n!$ na proste faktore pojavljuje onoliko puta koliko ulazi u raspis svakog od brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na proste faktore. Broj p se u svim brojevima koji su djeljivi s p, a nisu djeljivi s p^2 pojavljuje jednom, u svim onima koji su djeljivi s p^2, ali nisu s p^3 još jednom, itd. Dakle, ukupni broj pojavljivanja prostog broja p u raspisu broja $n!$ na proste faktore je $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

✓

Napomena 2.5. Suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ je konačna, jer za sve prirodne brojeve k takve da je $p^k > n$ vrijedi $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

Zadatak 2.8. Pauk ima po jednu cipelu i jednu čarapu za svaku od svojih 8 nogu. Na koliko načina se pauk može obuti ako na svaku nogu najprije mora obući čarapu, a onda cipelu. Prebrojavamo procese oblačenja, a ne konačan rezultat!

Rješenje. Označimo s a_i radnju oblačenja čarape, a s b_i radnju oblačenja cipele na i-tu nogu, $i \in \{1, \ldots, 8\}$. Kako se čarapa treba obući prije cipele, a_i uvijek trebamo izvršiti prije b_i. Tada tražimo broj permutacija skupa $S := \{a_1, \ldots, a_8, b_1, \ldots, b_8\}$ takvih da se za sve $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ element a_i nalazi u permutaciji prije elementa b_i. Ukupan broj permutacija tog skupa bez restikcija jednak je 16!. Sada trebamo pronaći način kako izbaciti nepovoljne permutacije. Iz tog razloga uvedimo relaciju ekvivalencije na skupu permutacija prostora S s uvjetom da su dvije permutacije *ekvivalentne* ako se jedna može dobiti iz druge samo proizvoljnim zamjenom mjesta elemenata a_i i b_i (indeks mora biti isti). Konkretno, tada imamo da su permutacije

$$(a_3, b_3, a_1, a_4, a_7, b_1, a_2, b_2, b_4, a_5, a_6, b_6, b_7, a_8, b_5, b_8) \quad \text{i} \quad (a_3, b_3, b_1, a_4, a_7, a_1, b_2, a_2, b_4, a_5, a_6, b_6, b_7, b_8, b_5, a_8)$$

ekvivalentne (u drugoj permutaciji samo trebamo zamijeniti mjesta parovima (a_1, b_1), (a_2, b_2) i (a_8, b_8)), dok permutacije

$$(a_3, b_3, a_1, a_4, a_7, b_1, a_2, b_2, b_4, a_5, a_6, b_6, b_7, a_8, b_5, b_8) \quad \text{i} \quad (a_1, b_3, a_3, a_4, a_7, b_1, a_2, b_2, b_4, a_5, a_6, b_6, b_7, a_8, b_5, b_8)$$

nisu ekvivalentne (trbali bismo zamijeniti mjesta elementima a_1 i a_3 što nije dopušteno). Nije teško provjeriti da smo gornjim pravilom uistinu zadali relaciju ekvivalencije. Promotrimo particiju skupa permutacija skupa S po zadanoj relaciji ekvivalencije. Lako je uočiti da svaki skup iz dane particije ima točno 2^8 elemenata (imamo 8 parova kojima možemo mijenjati mjesta), te da od tih 2^8 particija imamo točno jednu particiju koja odgovara uvjetima zadatka. Sada je jasno da smo s brojem 16! dali točno 2^8 puta veći broj, iz čega slijedi da je rješenje $\frac{16!}{2^8}$.

✓

Zadaci za vježbu

Zadatak 2.9. Neka je S skup prirodnih brojeva čije znamenke su iz skupa $\{1, 3, 5, 7\}$ takvih da se niti jedna znamenka ne ponavlja.

(a) Odredite $|S|$. [Rj. 64]

(b) Odredite $\sum_{n \in S} n$. [Rj. 117856]

Uputa. Pokušajte nekako „pametno” grupirati brojeve u skupu S.

Zadatak 2.10. n kandidata za neki posao se predstavlja pred tročlanom komisijom. Svaki od članova komisije rangira kandidate prema svom kriteriju. Pravilo je da će neki kandidat biti prihvaćen ako su ga barem dvojica članova komisije stavila na prvo mjesto. Izračunajte u koliko će se posto slučajeva izabrati neki kandidat.

$$\left[\text{Rj. } \left(\frac{n((n-1)!)^3}{(n!)^3} + \frac{n(n-1)\binom{3}{2}((n-1)!)^3}{(n!)^3}\right) \cdot 100\% = \frac{3n-2}{n^2} \cdot 100\%\right]$$

Uputa. Povoljne ishode, tj. one u kojima će netko biti izabran prebrojite tako da najprije prebrojite ishode u kojem su nekog kandidata izabrala točno dva člana komisije, a zatim i one u kojima su ga izabrala sva tri člana komisije.

Zadatak 2.11. 10 majki vodi po jedno svoje dijete na kazališnu predstavu. Pred ulazom u kazalište stvorio se red. Na koliko načina je moguće posložiti red ako:

(a) svaka majka mora biti točno iza svog djeteta, [Rj. 10!]

(b) svaka majka mora biti iza svog djeteta, ali ne moraju biti susjedni? $\left[\text{Rj. } \frac{20!}{2^{10}}\right]$

3 Kombinacije skupova

Definicija 3.1. Za podskup B, koji sadrži k elemenata, nekog skupa A kažemo da je k-kombinacija od A.

Primjer 3.1. Odredite sve 2-kombinacije skupa $\{a,\ b,\ c,\ d\}$.

Rješenje. $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$ ✓

Napomena 3.2. Sada je, naravno, $\{a,b\} = \{b,a\}$, tj. kod kombinacija nam za razliku od permutacija nije bitan poredak. Kao i kod permutacija elementi se ne smiju ponavljati pa $\{a,a\}$ nije kombinacija već *kombinacija s ponavljanjem* (vidi iduće poglavlje).

Problem 3.3. Broj k-kombinacija skupa od n elemenata jednak je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Dokaz. Znamo da k–permutacija n–članog skupa ima $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$. Kod kombinacija poredak nije bitan, stoga svakoj k–kombinaciji odgovara točno $k!$ različitih k–permutacija. Zaključujemo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

■

Napomena 3.4. Za $k > n$ definiramo $\binom{n}{k} = 0$.

Primjer 3.2. Na koliko načina možemo odabrati grupu od 5 osoba iz grupe od 4 profesora i 7 studenata

(a) ako nema restrikcija,

(b) tako da u grupi budu točno 2 profesora,

(c) tako da u grupi budu barem 3 profesora,

(d) tako da određeni profesor i student ne budu u grupi?

Rješenje.

(a) Iz grupe od $4 + 7 = 11$ ljudi moramo izabrati 5, odgovor je $\binom{11}{5}$ načina.

(b) 2 profesora možemo izabrati na $\binom{4}{2}$ načina, a preostalih troje ljudi na $\binom{7}{3}$, rješenje je $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}$.

(c) Posebno promatramo dva (disjunktna!) slučaja.

1° Odabrana su točno 3 profesora, imamo $\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} = 4 \cdot \binom{7}{2} = 84$ načina.

2° Odabrana su točno 4 profesora, imamo $\binom{4}{4} \cdot \binom{7}{1} = 7$ načina.

Dakle, imamo sveukupno 91 načina.

Napomena 3.5. Netočno bi bilo najprije odabrati 3 profesora, a zatim od preostalih 8 ljudi još dvije osobe. Više puta bi brojali istu situaciju u kojoj su sva četiri profesora izabrana. Zašto? Od pomoći vam može biti da pojednostavite zadatak tako da imate 2 profesora i jednog studenta te tražite dvočlanu grupu s barem jednim profesorom.

(d) Kako ne smijemo izabrati jednog profesora i jednog studenta, preostaje nam 9 ljudi od kojih moramo izabrati grupu od 5 ljudi, odnosno, imamo $\binom{9}{5}$ načina.

✓

Primjer 3.3. Na koliko načina možemo podijeliti 240 studenata u 3 jednakobrojne skupine tako da

(a) prva skupina ide na vježbe iz Vjerojatnosti, druga na vježbe iz Diskretne matematike, a treća na Engleski,

(b) sve tri skupine idu na vježbe iz Diskretne matematike?

Rješenje.

(a) Najprije odaberemo studente za prvu skupinu, zatim od ostatka studente za drugu skupinu, a preostale studente smjestimo u treću skupinu. Što nam daje $\binom{240}{80} \cdot \binom{160}{80}$ načina.

(b) Razmišljamo isto kao u (a) dijelu zadatka, samo što nam u ovom slučaju nije bitno u koju će prostoriju koja grupa ići (u svima se slušaju vježbe iz Diskretne matematike), pa je odgovor $\frac{\binom{240}{80} \cdot \binom{160}{80}}{3!}$ načina.

✓

Teorem 3.6. Neka su n i k prirodni brojevi takvi da je $n \geq k$. Za binomne koeficijente vrijedi.

(1) **Simetrija.**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(2) **Pascalova formula.**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Provesti ćemo ga na dva načina.

(i) Algebarski način.

(1)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k \cdot (n-k)} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

(ii) Kombinatorni način.

(1) Broj s lijeve strane jednak je broju k–članih podskupova n–članog skupa. Broj s desne strane jednak je broju $(n-k)$–članih podskupova n–članog skupa. Ta dva broja su očito jednaka, jer za svaki izbor k–članog podskupa jednoznačno odredimo jedan $(n-k)$–člani podskup i obratno.

(2) Ukoliko je $n = k$ identitet trivijalno vrijedi, jer je $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} = 1$. Pretpostavimo sada da je $k < n$. Prema definiciji je izraz s lijeve strane broj k–kombinacija n–članog skupa. Pokažimo da je tome jednak i broj s desne strane. Promatrajmo proizvoljan skup S koji ima n elemenata. Neka je $x \in S$. Sve k–kombinacije možemo podjeliti u dvije (disjunktne!) familije k–članih podskupova skupa S:

- one koje sadrže element x: $\mathcal{A} = \{X \subseteq S : |X| = k,\, x \in X\}$,
- te one koje ne sadrže element x: $\mathcal{B} = \{X \subseteq S : |X| = k,\, x \notin X\}$.

Vrijedi $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1}$ (svaki skup familije $\mathcal{A}$ sastoji se od elementa x i još $k-1$ elemenata od preostalih $n-1$ elemenata skupa S), $|\mathcal{B}| = \binom{n-1}{k}$. Očito je da familije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ u uniji daju sve k–člane podskupove skupa S. Ovime je dokaz gotov.

■

Zadatak 3.4. Neka su n i k prirodni brojevi takvi da je $n \geq k$. Koliko ima binarnih nizova duljine n koji sadrže k nula i $n-k$ jedinica? $\left[\text{Rj. } \binom{n}{k}\right]$

Primjer 3.5. „Metoda kuglica i štapića."
Na koliko načina možemo $n \in \mathbb{N}$ jednakih kuglica rasporediti u $m \in \mathbb{N}$ različitih kutija?

Rješenje.

$$\bullet\bullet \longleftarrow \Big| \longleftarrow \Big| \bullet\bullet \ldots \longleftarrow \Big| \bullet \ldots \longleftarrow \Big\|\longrightarrow \bullet$$

Promatrajmo niz kuglica i pregrada kao na gornjoj slici. Kuglice lijevo od prve pregrade pripadaju prvoj kutiji, kuglice između prve i druge pregrade drugoj kutiji, itd. kuglice nakon zadnje pregrade zadnjoj kutiji. Dakle, imamo niz od n kuglica i $m-1$ pregrada. Svaki niz određuje točno jedan raspored kuglica po kutijama. Pregrade možemo razmjestiti na $\binom{n+m-1}{m-1}$ načina, što je i odgovor na pitanje zadatka. ✓

Zadatak 3.6. Neka su m i n prirodni brojevi. Odredite broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n.$$

$\left[\text{Rj. } \binom{n+m-1}{m-1}\right]$

Primjer 3.7. Koliko ima uređenih četvorki $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ takvih da je $x_1x_2x_3x_4 = 9000$.

Rješenje. $9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.
Svaki faktor broja 9000 je oblika $x_i = 2^{\alpha_i} \cdot 3^{\beta_i} \cdot 5^{\gamma_i}$; $\alpha_i, \gamma_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta_i \in \{0, 1, 2\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Da bi bilo $x_1x_2x_3x_4 = 9000$, mora vrijediti

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 3, \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 &= 2, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 &= 3. \end{aligned}$$

Postoji $\binom{6}{3}$ različitih rješenja prve jednadžbe, $\binom{5}{3}$ druge, te $\binom{6}{3}$ zadnje. Odgovor na pitanje zadatka je $\binom{6}{3}^2 \cdot \binom{5}{2} = 4000$. ✓

Primjer 3.8. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do $(m, n) \in \mathbb{N}^2$?

(a) Bez dodatnih uvjeta.

(b) Koji prolaze točkom (p, q), gdje je $p \in \mathbb{N}$, $p < m$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$.

(c) Koji ne prolaze segmentom $[(p,\, q),\, (p+1,\, q)]$, gdje je $p \in \mathbb{N}$, $p < m-1$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$.

Rješenje. Najprije primjetimo da su svi putevi koji se sastoje samo od kretanja desno i gore jednako dugi i da su to najkraći putevi. Svaki niz od $x \in \mathbb{N}_0$ slova 'D' (desno) i $y \in \mathbb{N}_0$ slova 'G' (gore) određuje točno jedan put od $(x_0,\, y_0) \in \mathbb{N}_0^2$ do $(x_0+x,\, y_0+y)$. Npr. "GGGDDGDGGDDD" nam određuje put od $(x_0,\, y_0)$ do $(x_0+6,\, y_0+6)$.

(a) Nizova duljine $m+n$ koji sadrže m slova 'D' i n slova 'G' ima $\binom{m+n}{m}$ (izaberemo m mjesta na kojima će biti slovo 'D', a na preostalima tada mora biti slovo 'G'), to je i odgovor u ovom slučaju.

(b) Najprije iz $(0,\, 0)$ dođemo u $(p,\, q)$, a zatim iz njega u $(m,\, n)$. Prvi dio puta možemo izabrati na $\binom{p+q}{p}$ načina, a drugi na $\binom{m-p+n-q}{m-p}$ načina. Dakle, postoji $\binom{p+q}{p} \cdot \binom{m-p+n-q}{m-p}$ puteva.

(c) U ovom slučaju ćemo od svih mogućih (najkraćih) puteva oduzeti one koji prolaze tim segmentom, a tim segmentom prolaze svi putevi koji vode od $(0,\, 0)$ u $(p,\, q)$, iz njega u $(p+1,\, q)$, a zatim u $(m,\, n)$. Ukupno ima $\binom{m+n}{m}$ puteva. "Loših" puteva ima $\binom{p+q}{p} \cdot \binom{m-p-1+n-q}{m-p-1}$. Konačno, rješenje je $\binom{m+n}{m} - \binom{p+q}{p} \cdot \binom{m-p-1+n-q}{m-p-1}$ puteva.

✓

Definicija 3.7. Za prirodan broj n neka je dan skup A s $2n$ elemenata. **Sparivanje** je particija skupa A na dvočlane podskupove.

Primjer 3.9. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Odredite koliko ima različitih sparivanja skupa A koji sadrži $2n$ elemenata.

Rješenje. Dat ćemo dva načina rješavanja.

(i) Permutacija skupa A ima $(2n)!$. Permutacija jednog sparivanja skupa A ima $n!$. Dakle, iz svakog sparivanja skupa A možemo dobiti točno $2^n \cdot n!$ permutacija skupa A (svaki član sparivanja, koji je dvočlani skup, možemo "unutar sebe" permutirati 2 puta). Iz dva različita sparivanja nikako ne možemo dobiti dvije jednake permutacije. Također, iz svih mogućih sparivanja dobiti ćemo sve permutacije. Dakle, svih mogućih sparivanja skupa A ima $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

(ii) Najprije od $2n$ elemenata izaberemo 2, zatim od preostalih $2n-2$ još 2, itd. zadnja preostala 2 "stavimo" u n–ti skup. No, nije nam bitan poredak tako dobivenih dvočlanih skupova, stoga je rješenje

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1} \binom{2n-2i}{2}}{n!} = \frac{1}{n!} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(2n-2i)\,(2n-2i-1)}{2} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

✓

4 Permutacije i kombinacije s ponavljanjem

Definicija 4.1. Uređenu k–*torku* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ (ne nužno različitih) elemenata skupa S nazivamo k–**permutacijom s ponavljanjem**.

Primjer 4.1. $A = \{a, b, c\}$. Odredi sve 2-permutacije s ponavljanjem skupa A.

Rješenje. $(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)$ ✓

Prirodno se javlja pitanje: koliko je k–permutacija s ponavljanjem skupa od n elemenata?

Problem 4.2. Odredite koliko ima k–permutacija s ponavljanjem skupa koji sadrži n elemenata.

Rješenje. Prvi član uređene k–torke možemo odabrati na n načina, drugi također na n načina (jer se elementi smiju ponavljati), …, i k–ti na n načina. U svemu, uređenu k–torku možemo odabrati na n^k načina. ✓

Zadatak 4.2. Na koliko načina možemo 6 vrsta voća kojeg imamo u neograničenim količinama podijeliti između 10 djece tako da svako dijete dobije po jednu voćku? $\left[\text{Rj. } 6^{10}\right]$

Napomena 4.3. Kada voća ne bismo imali u neograničenim količinama, zadatak bi bio puno složeniji (vidi Primjer 4.5).

Definicija 4.4. **Konačni multiskup** M na skupu S je uređen par (S, m) gdje je $m : S \to \mathbb{N}_0$ funkcija takva da je $\sum\limits_{x \in S} m(x)$ konačan broj. Za $x \in S$ broj $m(x)$ zovemo *kratnost od x*.

Definicija 4.5. Neka je $M = (S, m)$ multiskup. Uređenu k–torku $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x_i \in S$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, takvu da je broj pojavljivanja elementa x_i manji ili jednak $m(x_i)$ zovemo k–**permutacija multiskupa**. Ako je $\sum\limits_{x \in S} m(x) = k$, govorimo o *permutaciji multiskupa M*.

Primjer 4.3. $M = \{a, a, b, b, c, c, c\} = \{a^2, b^2, c^3\}$ Koliko ima permutacija multiskupa M?

Rješenje. Možemo razmišljati na dva načina.

1. način. Broj permutacija 7–članog skupa je 7!. Kako je M multiskup, više puta smo brojali neke permutacije (prvi a i drugi a ne razlikujemo). Svaka permutacija istih elemenata skupa rezultira istom permutacijom multiskupa M. Zato je traženi broj $\dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$.

2. način. Odabiremo najprije dva mjesta (od sedam) na koje ćemo *smjestiti a*–ove. To možemo učiniti na $\binom{7}{2}$ načina. c–ove zatim možemo rasporediti na $\binom{5}{3}$ načina, a za b–ove je preostao samo još jedan način $\left(\binom{2}{2}\right)$.
Ukupno je broj permutacija multiskupa jednak $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$. ✓

Analogno određujemo i broj permutacija općenitog multiskupa.

Napomena 4.6. Broj permutacija multiskupa $\{x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_k^{m_k}\}$, pri čemu je $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = N$, jednak je

$$\binom{N}{m_1} \cdot \binom{N - m_1}{m_2} \cdot \ldots \cdot \binom{N - m_1 - m_2 - \ldots - m_{k-1}}{m_k} = \frac{N!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}$$

Zadatak 4.4. Odredi broj ternarnih nizova (nizovi nula, jedinica i dvojki) koji imaju 2 nule, 3 jedinice i 5 dvojki. $\left[\text{Rj. } \dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}\right]$

Primjer 4.5. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su znamenke elementi multiskupa $\{7^4, 2^2, 4^1, 6^1\}$?

Rješenje. Uočimo da bi zadatak bio znatno lakši da koristimo sve znamenke, odnosno da tražimo koliko ima osmeroznamenkastih brojeva. Zadatak ćemo riješiti rastavljanjem na nekoliko slučajeva u ovisnosti o tome koliko istih znamenaka sadrži traženi petroznamenkasti broj. U opisu svakog slučaja navodimo multiskupove zbroja kratnosti 5 čiji će elementi biti znamenke traženog broja.

1° $\{7^4, 2^1\}, \{7^4, 4^1\}, \{7^4, 6^1\}$
Broj permutacija svakog od triju multiskupova jednak je $\frac{5!}{4!}$, i zato je ukupan broj brojeva u prvom slučaju jednak $\#_1 = 3 \cdot \frac{5!}{4!} = 15$

2° $\{7^3, 2^1, 4^1\}, \{7^3, 2^1, 6^1\}, \{7^3, 6^1, 4^1\}$
$$\#_2 = 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$$

3° $\{7^3, 2^2\}$
$$\#_3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

4° $\{7^2, 2^2, 4^1\}, \{7^2, 2^2, 6^1\}$
$$\#_4 = 2 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1} = 60$$

5° $\{7^2, 2^1, 4^1, 6^1\}, \{7^1, 2^2, 4^1, 6^1\}$
$$\#_5 = 2 \cdot \frac{5!}{2!} = 120$$

Dakle, takvih je brojeva ukupno $\# = \sum_{i=1}^{5} \#_i = 265$
(Ovakav problem ne bismo mogli općenito riješiti — barem zasad) ✓

Primjer 4.6. Pokažite da je broj $(4n)!$ djeljiv s 2^{3n} i 3^n

Rješenje. Promotrimo multiskup $M = \{a_1^4, a_2^4, \ldots, a_n^4\}$. Broj permutacija tog multiskupa (**prirodan broj!**) je $\frac{(4n)!}{4! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 4!} = \frac{(4n)!}{2^{3n} \cdot 3^n} \in \mathbb{N}$ ✓

Napomena 4.7. Slično, zbog kombinatorne interpretacije znamo i da je izraz oblika $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ prirodan broj.

Definicija 4.8. Za k–člani $\left(\sum_{x \in S} m(x) = k\right)$ multiskup $M = (S, m)$ kažemo da je k–**kombinacija s ponavljanjem** skupa S.

Primjer 4.7. Ispiši sve 2-kombinacije s ponavljanjem skupa $S = \{a, b, c\}$.

Rješenje. $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}$. ✓

Napomena 4.9. Ovo su dvočlani **podmultiskupovi** multiskupa $M = \{a^\infty, b^\infty, c^\infty\}$ (svaki od elemenata možemo odabrati koliko god puta želimo).

Sada želimo odrediti broj k–kombinacija s ponavljanjem n–članog skupa. Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ zadani skup. Tada s x_i označimo broj ponavljanja elementa a_i u k–kombinaciji. Problem se tada svodi na određivanje broja nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k. \tag{1}$$

Taj problem rješavamo *metodom štapića i kuglica*, opisanom u **Primjeru 3.5.** na stranici 12.

Teorem 4.10. Broj k–kombinacija s ponavljanjem n–članog skupa jednak je $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

Napomena 4.11. Ponovno naglasimo da smo promatrali slučaj kad se svaki član skupa S može pojaviti po volji mnogo puta. U kontekstu jednadžbe (1) to znači da elementi x_i nisu odozgo ograničeni. Rješenje u slučaju kad će postojati ograničenja na broj ponavljanja određenog elementa u skupu ćemo za jednostavni slučaj vidjeti u **Primjeru 4.9**, dok ćemo rješenje u općenitijem obliku komentirati kasnije.

Primjer 4.8. U Bologni se prodaju tri vrste sendviča: sa šunkom, tunom i vegetarijanski. Na koliko načina student može naručiti 6 sendviča (nije bitan redoslijed naručivanja)?

Rješenje. Tražimo sve šesteročlane podskupove multiskupa $\{S^\infty, T^\infty, V^\infty\}$, odnosno broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Taj je broj jednak $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2}$. ✓

Primjer 4.9. Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$$

uz uvjete: $x_1,\, x_4,\, x_5 \geq 0$; $2 \leq x_3 \leq 7$; $x_2 \geq 2$

Rješenje. Uvest ćemo supstituciju $[y_1 = x_1,\, y_2 = x_2 - 2,\, y_3 = x_3 - 2,\, y_4 = x_4,\, y_5 = x_5]$, nakon čega početna jednadžba glasi

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 46 \tag{2}$$

uz uvjete $y_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ i $y_3 \leq 5$
Jednostavnom supstitucijom svodimo uvjet $x \geq c$, $c \in \mathbb{N}$ na $x \geq 0$, što znamo riješiti. Uvjet $y_3 \leq 5$ također ćemo pokušati svesti na poznatu situaciju. Poslužit ćemo se principom komplementa: broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe (2) uz uvjet $y_3 \leq 5$ jednak je razlici broja rješenja bez ikakvih dodatnih uvjeta i broja rješenja uz uvjet $y_3 > 5$, tj. $y_3 \geq 6$. Broj rješenja uz uvjet $y_3 \geq 6$ određujemo supstitucijom $z_3 = y_3 - 6$, te $z_i = y_i$, za $i = 1, 2, 4, 5$ pa govorimo o jednadžbi $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 40$. Na kraju, broj cjelobrojnih nenegativnih rješenja početne jednadžbe jednak je $\binom{46+5-1}{46} - \binom{40+5-1}{40} = \binom{50}{4} - \binom{44}{4}$. ✓

Primjer 4.10. Koliko ima k–podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvih da ne sadrže dva uzastopna broja?

Rješenje. Što k treba zadovoljavati da zadatak uopće ima smisla? Promatramo brojeve b_1, b_2,...,b_k takve da vrijedi

$$1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_k \leq n - k + 1\,.$$

Očito gornje ima smisla samo u slučaju $k \leq n - k + 1$, što je i nužan uvjet da postoji traženi podskup. Sada uvedimo $a_1 = b_1, a_2 = b_2 + 1, a_3 = b_3 + 2, \ldots, a_k = b_k + k - 1$. Među brojevima $a_1, \ldots, a_k$ nema uzastopnih i za njih vrijedi

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n\,,$$

pa nije teško uočiti da postoji bijekcija između k-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.
Dakle, potrebno je odgovoriti na koliko načina možemo odabrati k elemenata od njih $n - k + 1$. Odgovor je $\binom{n-k+1}{k}$. ✓

Problemi distribucije

1. Želimo odrediti broj rasporeda m različitih objekata u n različitih kutija tako da

   (a) u svaku kutiju možemo staviti najviše jedan objekt:

   $$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

   (b) svaka kutija može sadržavati proizvoljno mnogo objekata:

   $$n^m.$$

   Primjetite da poredak unutar kutija nije bitan; npr. $n = 1$ i $m = 2$.

   (c) svaka kutija može sadržavati samo jedan objekt, a na raspolaganju je r_1 objekata prve vrste, $\ldots$,r_k objekata k–te vrste, gdje je $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$:

   $$\frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}.$$

   (d) svaka kutija može sadržavati proizvoljan broj objekata, ali poredak unutar kutije je bitan:

   $$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+m-1).$$

2. Želimo odrediti broj rasporeda m identičnih objekata u n različitih kutija tako da

   (a) u svaku kutiju stavimo najviše jedan objekt:
   $$\binom{n}{m}.$$

   (b) u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj objekata:
   $$\binom{n+m-1}{m}.$$

   (c) niti jedna kutija ne bude prazna:
   Tražimo broj cjelobrojnih rjesšenja jednadžbe $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = m, \quad r_i \geq 1$.
   Uz supstituciju $s_i = r_i - 1 \Rightarrow s_1 + \ldots + s_n = m - n$.
   Rješenje je, stoga
   $$\binom{m-n+n-1}{n-1} = \binom{m-1}{n-1}.$$

5 Kombinatorno dokazivanje identiteta

U ovoj cjelini ćemo dokazivati identite metodom dvostrukog prebrojavanja. Pretpostavimo da želimo dokazati neki identitet $A = B$ pri čemu su izrazi A i B takvi da ih možemo kombinatorno interpretirati (sume i produkti binomnih keoficijenata, faktorijela, Stirlingovih ili Fibonaccijevih brojeva, itd.) Metoda se sastoji od tri koraka. Najprije definiramo skup S kojem ćemo odrediti broj elemenata na dva različita načina. U drugom koraku dokazujemo da je $A = |S|$. Najčešće je ovaj korak ide direktno iz definicije skupa S (izraz A nam daje ideju kako definirati S). Posljednji korak je dokazivanje $B = |S|$ iz čega zaključujemo da vrijedi $A = B$. Ponekad je potrebno iskoristiti princip bijekcije kako bi se dokazalo $B = |S|$.

5.1 Permutacije

Zadatak 5.1. Dokažite tvrdnje koristeći kombinatorne argumente, tj. metodom dvostrukog prebrojavanja.

(a) $P_k^n = nP_{k-1}^{n-1}$

Neka je S skup svih k-permutacija skupa X od n elemenata. Na lijevoj strani jednadžbe je broj elemenata skupa S prema Problemu 2.4. Na desnoj strani je isti broj zapisan na drugi način. Svaka k-permutacija određuje i određena je elementom x_1 na prvom mjestu i $(k-1)$-permutacijom preostalih $n-1$ elemenata skupa $X' = X \setminus \{x_1\}$. Element na prvom mjestu možemo odabrati na n načina, a preostali niz od $k-1$ elemenata iz $(n-1)$-članog skupa X' možemo odabrati na P_{k-1}^{n-1} načina.

(b) $P_k^{n+1} = P_k^n + kP_{k-1}^n$

Neka je S skup svih k-permutacija skupa X od $n+1$ elemenata. Na lijevoj strani jednadžbe je broj elemenata skupa S prema Problemu 2.4. Fiksirajmo neki element x iz skupa X. Skup svih k-permutacija od X možemo podijeliti u dva disjunktna skupa ovisno o tome pojavljuje li se element x u permutaciji ili ne. Broj permutacija u kojima se x pojavljuje je kP_n^{k-1} jer moramo odabrati jednu od n pozicija za element x i na preostale pozicije odbrati $(k-1)$-torku iz n-članog skupa $X \setminus \{x\}$. Broj permutacija u kojima se ne pojavljuje x je jednostavno broj k-permutacija n-članog skupa $X \setminus \{x\}$.

(c) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

Neka je X skup od n elemenata i neka je S skup svih urđenih parova (Y, Z) takvih da je $Z \subseteq Y \subseteq X$ i $|Z| = r, |Y| = m$. Podskup $Y \subseteq X$ takav da je $|Y| = m$ možemo odabrati na $\binom{n}{m}$ načina, a jednom kad smo odabrali skup Y podskup $Z \subseteq Y$ takav da je $|Z| = r$ možemo odabrati na $\binom{m}{r}$ načina. Zato je broj traženih parova (Y, Z) jednak lijevoj strani identiteta. S druge strane, skup S je u bijekciji sa skupom svih uređenih parova (Y', Z) pri čemu je $Z \subseteq X$, $|Z| = r$, $Y' \subseteq X \subseteq Z$, $|Y'| = m - r$. Bijekcija je dana s $Y' = Y \setminus Z$. Podskup $Z \subseteq X$ takav da je $|Z| = r$ možemo odabrati na $\binom{n}{r}$ načina. Jednom kad smo odabrali skup Z podskup $Y' \subseteq X \subseteq Z$ takav da je $|Y'| = m-r$ možemo odabrati na $\binom{n-r}{m-r}$. Ovo pokazuje da je broj elemenata skupa S jednak desnoj strani identiteta.
Dat ćemo slikovitiju interpetaciju. Pretpostavimo da promatramo izbor za najljepšu pudlicu svijeta. Tada je na lijevoj strani broj načina na koji od n pudlica možemo izabrati m njih koje idu u polufinale, a zatim od pudlica u polufinalu odabrati r njih koje idu u finale. Na desnoj strani prvo od n natjecateljica odabiremo r njih za finale, a onda od preostalih $n-r$ mjesta odabiremo njih $m-r$ koje su u polufinalu. Ovdje smo brojali uređene parove skupova pudlica koje idu u polufinale i finale.

(d) $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

Ponovno ćemo ponuditi slikovito rješenje zadatka. Prebrojimo skup S svih mogućih odabira r-člane ekipe za matematičku olimpijadu s kandidatima od kojih je m mladića i n djevojaka. S desne strane je broj načina na koji možemo od tih $m+n$ osoba odabrati r članova ekipe, tj. broj elemenata skupa S. Primjetimo da skup S možemo podijeliti na disjunktne skupove u ovisnosti o broju k koji predstavlja broj mladića u ekipi i može biti $0, 1, 2, \ldots, n$. Tih k mladića možemo odbrati na $\binom{m}{k}$ načina, a jednom kad smo

odabrali mladiće ekipu možemo dopuniti s $r-k$ djevojaka na $\binom{n}{r-k}$ načina. Zato lijeva strana također daje broj elemenata skupa S.
Preciznije, neka su X i Y disjunktni skupovi takvi da je $|X| = n$ i $|Y| = m$. Ako je S skup svih podskupova $Z \subseteq X \cup Y$ takvih da je $|Z| = r$, onda desna strana označava broj elemenata skupa S. Primjetite da je skup S u bijekciji s unijom disjunktnih skupova S_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, pri čemu su elementi skupa S_k uređeni parovi (P, R) takvi da je $P \subseteq X, R \subseteq Y$ i $|R| = k, |P| = r-k$. Bijekcija je dana s $Z = P \cup R$ i $P = Z \cap X, R = Z \cap Y$. Upotpunite sve detalje ovog rješenja.

(e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$

Zamislimo ovakvu situaciju: iz skupine od n vatrogasaca izdvojen je jedan kojeg nazivamo kapetan i on mora odabrati po volji mnogo ostalih ljudi koji s njim idu u misiju. Budući da kapetana možemo odabrati na n načina i on za svakog od preostalih $n-1$ ljudi odlučuje ide li ili ne ide u misiju, desna strana je broj načina da se formira takva vatrogasna ekipa. Svaka takva ekipa može se formirati tako da odaberemo i od n vatrogasaca koji idu u misiju i među njima (dakle, na i načina) odaberemo kapetana. Budući da je veličina ekipe proizvoljna zbrajamo brojeve $i\binom{n}{i}$ za sve vrijednosti i od 0 do n.
Preciznije, za n-člani skup X desna strana broji elemente skupa S svih uređenih parova (x, Y) pri čemu je $x \in X$ i $Y \subseteq X \setminus \{x\}$. Skup S je u bijekciji s unijom disjunktnih skupova S_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, pri čemu su elementi skupa S_i uređeni parovi (x, Z) takvi da je $Z \subseteq X$ i $x \in Z$. Bijekcija je dana s $Z = Y \cup \{x\}, Y = Z \setminus \{x\}$. Dovršite rješenje za vježbu.

Zadatak 5.2. Izračunajte sumu $\displaystyle\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k}$. $\left[\text{Rj. } 2^{n-k}\binom{n}{k}\right]$

6 Rekurzivne relacije

6.1 Homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

Izraz oblika $c_r a_{n+r} + c_{r-1}a_{n+r-1} + \ldots + c_0 a_n = 0$ nazivamo **homogena linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima reda** r.
Tražimo rješenje u obliku $a_n = x^n$. Uvrštavajući dobivamo

$$c_r x^{n+r} + c_{r-1}x^{n+r-1} + \ldots + c_0 x^n = 0 \ / : x^n$$

$$c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \ldots + c_0 x^0 = 0,$$

taj izraz se naziva **karakteristična jednadžba**.

Teorem 6.1. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_r$ međusobno različita rješenja karakteristične jednadžbe, onda je svako rješenje početne rekurzije oblika $a_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_r x_r^n$, gdje $A_1, \ldots, A_r$ određujemo iz početnih uvjeta.

Primjer 6.1. Riješite rekurzivnu relaciju:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}; \quad a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3.$$

Rješenje. Uvrštavanjem x^n u $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} = 0$ dobivamo karakterističnu jednadžbu

$$x^n - 2x^{n-1} - x^{n-2} + 2x^{n-3} = 0 \ / : x^{n-3},$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$

Izračunamo nultočke: $-1, 1, 2$, pa je opće rješenje: $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 1^n + C \cdot 2^n$. Sada iz početnih uvjeta imamo:

$$\left.\begin{array}{rcccl} 1 & = & a_1 & = & A \cdot (-1) + B + C \cdot 2 \\ 2 & = & a_2 & = & A \cdot 1 + B + C \cdot 4 \\ 3 & = & a_3 & = & A \cdot (-1) + B + C \cdot 8 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{3}.$$

Iz čega imamo rješenje $a_n = \dfrac{(-1)^n}{6} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2^n}{3}$. ✓

Teorem 6.2. Ako su rješenja karakteristične jednadžbe $x_1, \cdots, x_m$ s kratnostima $k_1, \cdots, k_m$, onda je opće rješenje rekurzije dano formulom

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & \left(A_{11} + A_{12}n + \cdots + A_{1k_1}n^{k_1-1}\right) x_1^n \\ & + & \left(A_{21} + A_{22}n + \cdots + A_{2k_2}n^{k_2-1}\right) x_2^n \\ & \vdots & \\ & + & \left(A_{m1} + A_{m2}n + \cdots + A_{mk_m}n^{k_m-1}\right) x_m^n. \end{array}$$

Napomena 6.3. Uočite da se za $k_i = 1$, $i = 1, \ldots, m$, formule iz prethodna dva teorema podudaraju, tj. formula iz Teorema 6.2 je uisitnu poopćenje formule iz Teorema 6.1.

Primjer 6.2. Riješite rekurziju:

$$a_n - 7a_{n-1} + 15a_{n-2} - 9a_{n-3} = 0; \ a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3.$$

Rješenje. Karakteristična jednadžba: $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1, x_2 = x_3 = 3$, sada je opće rješenje

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 3^n + C \cdot n \cdot 3^n.$$

Iz početnih uvjeta imamo

$$\left.\begin{array}{rclcl} 1 & = & a_0 & = & A+B \\ 2 & = & a_1 & = & A+3B+3C \\ 3 & = & a_2 & = & A+9B+18C \end{array}\right\} \Longrightarrow A=0,\ B=1,\ C=-\frac{1}{3}.$$

Uvrstimo u opće rješenje i imamo $a_n = \left(1-\frac{n}{3}\right)\cdot 3^n$. ✓

Zadatak 6.3. Riješite rekurziju

$$a_n + a_{n-2} = 0; \quad a_0 = 1,\, a_1 = 1.$$

$$\left[\text{Rj. } a_n = \frac{1-i}{2}\cdot i^n + \frac{1+i}{2}\cdot(-i)^n\right]$$

6.2 Nehomogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

Izraz oblika $c_r a_{n+r} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$, gdje je f neka funkcija od n, nazivamo **nehomogena linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima r–tog reda**.

Postupak za rješavanje:

(1) Nalazimo opće rješenje pripadne homogene jednadžbe a_n^H.

(2) Tražimo partikularno rješenje a_n^P prema tablici (koja slijedi).

(3) Opće rješenje je $a_n = a_n^H + a_n^P$, a koeficijente određujemo iz početnih uvjeta.

$f(n)$		a_n^P
$C\cdot b^n$	(a)	b nije korijen karakteristične jednadžbe; $a_n^P = A\cdot b^n$
	(b)	b je korijen karakteristične jednadžbe kratnosti k; $a_n^P = A\cdot n^k\cdot b^n$
$p(n)\in\mathbb{R}[x]$, stupanj od $p=m$	(a)	1 nije korijen karakteristične jednadžbe; $a_n^P = p_1(n)$, polinom stupnja m s neodređenim koeficijentima
	(b)	1 je korijen karakteristične jednadžbe kratnosti k; $a_n^P = n^k\cdot p_1(n)$
$C\cdot n^m\cdot b^n$	(a)	b nije korijen karakteristične jednadžbe; $a_n^P = p_1(n)\cdot b^n$, stupanj od $p_1 = m$
	(b)	b je korijen karakteristične jednadžbe kratnosti k; $a_n^P = n^k\cdot p_1(n)\cdot b^n$

ovdje nam C, b i A predstavljaju neke konstante.

Primjer 6.4. Riješite rekurziju

$$a_{n+1} - 5a_n = 4n^2 + 2n + 6; \quad a_1 = 1.$$

Rješenje. Rješavanjem karakteristične jednadžbe pripadne homogene rekurzije dobivamo $a_n^H = A\cdot 5^n$. Dalje, vidimo da partikularno rješenje moramo tražiti u obliku $a_n^P = Bn^2 + Cn + D$, uvrštavanjem u danu rekurziju dobivamo

$$B(n+1)^2 + C(n+1) + D - 5Bn^2 - 5Cn - 5D = 4n^2 + 2n + 6$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-4Bn^2 + (2B-4C)\,n + (B+C-4D) = 4n^2 + 2n + 6.$$

Izjednačavajući koeficijente s lijeve i desne strane (kao u jednakosti polinoma) nalazimo $B=-1$, $C=-1$, $D=-2$. Konačno, uvrštavanjem $a_n = a_n^H + a_n^P$ u početni uvjet

$$1 = a_1 = 5A - 1 - 1 - 2 = 5A - 4,$$

nalazimo da je $A = 1$. Rješenje dane rekurzije je $a_n = 5^n - n^2 - n - 2$. ✓

Primjer 6.5. Riješite rekurziju

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n \cdot 3^n \quad a_0 = 2,\, a_1 = 3.$$

Rješenje. Karakteristična jednadžba pripadne homogene rekurzije dana je s $x^2 - 6x + 9 = 0$, te ima rješenja $x_1 = x_2 = 3$. Dakle, $a_n^H = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n$. Sada vidimo u kakvom obliku moramo tražiti partikularno rješenje, odnosno $a_n^P = n^2 \cdot (an + b) \cdot 3^n$. Uvrštavanjem u danu rekurziju imamo

$$n^2 \cdot (an+b) \cdot 3^n = 6 \cdot (n-1)^2 \cdot [a(n-1)+b] \cdot 3^{n-1} - 9 \cdot (n-2)^2 \cdot [a(n-2)+b] \cdot 3^{n-2} + n \cdot 3^n \;/:3^n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n^2 \cdot (an+b) = 2 \cdot \left(n^2 - 2n + 1\right)(an - a + b) - \left(n^2 - 4n + 4\right)(an - 2a + b) + n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(1 - 6a)\, n + (6a - 2b) = 0.$$

Dakle, $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$. Sada, uvrštavanjem $a_n = a_n^H + a_n^P$ u početne uvjete dobivamo $A = 2$, $B = \frac{-5}{3}$. Konačno rješenje je $a_n = \frac{3^{n-1}}{2} \cdot \left(n^3 + 3n^2 - 10n + 12\right)$. ✓

Zadatak 6.6. Riješite rekurziju

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n; \quad a_0 = 3,\, a_1 = 8.$$

[Rj. $a_n = (2n+1) \cdot 2^n + 2$]

Primjer 6.7. Riješite sustav rekurzija

$$\left.\begin{array}{rcl} a_n & = & -2a_{n-1} + 4b_{n-1}, \\ b_n & = & -5a_{n-1} + 7b_{n-1}; \end{array}\right\} \quad a_1 = 4,\, b_1 = 1.$$

Rješenje. Iz prve rekurzije dobivamo $b_{n-1} = \frac{a_n + 2a_{n-1}}{4}$, odnosno $b_n = \frac{a_{n+1} + 2a_n}{4}$. Uvrštavajući dobiveno u drugu rekurziju dobivamo da je potrebno rješiti rekurziju

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0; \quad a_1 = 4,\, a_2 = -2a_1 + 4b_1 = -4.$$

Rješenje dobivene rekurzije je $a_n = 2^{n+3} - 4 \cdot 3^n$, a sada lako nalazimo i da je $b_n = 2^{n+3} - 5 \cdot 3^n$. ✓

6.3 Rekurzivno rješavanje zadataka

Primjer 6.8. Na koliko načina možemo ploču $1 \times n$ popločati pločicama dimenzija 1×1 i 1×2?

Rješenje. Neka je J_n broj načina iz zadatka. Promotrimo prvu pločicu. Ukoliko je ona dimenzija 1×1 ostatak ploče možemo popločati na J_{n-1} načina, a ukoliko je ona dimenzija 1×2 onda ostatak možemo popločati na J_{n-2} načina. Dakle, vrijedi rekurzija

$$J_n = J_{n-1} + J_{n-2}.$$

Početni uvjeti su $J_1 = 1$, $J_2 = 2$. Preostaje nam samo za primjetiti da je $J_n = F_{n+1}$, gdje je $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Fibonaccijev niz. ✓

Napomena 6.4. Fibonaccijev niz je definiran s $F_1 = F_2 = 1$, te $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Zatvorena formula za Fibonaccijeve brojeve dana je s

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Primjer 6.9.

(a) Odredite broj podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji nemaju susjednih elemenata.

(b) Koliko ima binarnih nizova duljine n koji nemaju susjednih jedinica?

Rješenje. Kao u dokazu **Teorema 1.4.** konstruiramo bijekciju između skupova opisanih pod (a) i binarnih nizova opisanih pod (b) (dakle, odmah vidimo da je pod (a) i pod (b) jednak odgovor). Pretpostavimo da znamo odgovor za svaki prirodan broj manji od n. Označimo s a_n traženi broj. Na zadnje mjesto u nizu možemo staviti ili 0 ili 1 (ili ćemo uzeti n–ti element ili nećemo). Ukoliko je 0, onda očito imamo a_{n-1} načina, a ukoliko je to 1, onda na $(n-1)$–vom mjestu ne smije biti 1, pa imamo a_{n-2} načina. Dakle, dobili smo rekurziju

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

s početnim uvjetima $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, konačno $a_n = F_{n+2}$. ✓

Zadatak 6.10. Odredite rekurzivnu relaciju za broj ternarnih nizova duljine n, a_n, koji ne sadrže podniz 012.

Uputa. Rastavite zadatak na disjunktne slučajeve ovisno koji se broj nalazi na prvom mjestu, s posebnim oprezom kad je to 0. Rješnje je dano s

$$\begin{array}{l} a_n = 3a_{n-1} - a_{n-3} \\ a_1 = 3\,,\ a_2 = 9\,,\ a_3 = 26 \end{array}.$$

Zadatak 6.11. Na koliko načina možemo ploču $2 \times n$ popločati pločicama dimenzija 1×1 i 1×2? (rotiranje pločica je dozvoljeno)

Uputa. Označimo s a_n traženi broj, a s b_n broj načina na koji možemo popločati „krnju" ploču $2 \times n$ (ploči $2 \times n$ maknemo jedno krajnje polje 1×1). Analizom mogućih pločica koje mogu doći na jedno fiksno krajnje polje (ili na „istureno" polje u slučaju krnje ploče) dobivamo sustav rekurzija

$$\begin{array}{ll} a_n & = a_{n-1} + a_{n-2} + b_n + b_{n-1} \\ b_n & = a_{n-1} + b_{n-1} \end{array},$$

Iz druge relacije teleskopiranjem dobijemo $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + b_1 + a_1 = b_1 + S_{n-1}$, gdje je $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, pa je $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + S_{n-1} + S_{n-2} + 2$. Iskoristimo tu relaciju za izračunati

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} + S_{n-1} + S_{n-2} + 2 - (a_{n-2} + a_{n-3} + S_{n-2} + S_{n-3} + 2) = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}.$$

iz čega slijedi $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$. Još je preostalo odrediti početne uvjete a_1, a_2, a_3 i onda je a_n jedinstveno određen.

Zadatak 6.12. Neka je J_n kao u Primjeru 6.8. Dokažite tvrdnje koristeći kombinatorne argumente, tj. metodom dvostrukog prebrojavanja.

1. $J_{m+n} = J_m J_n + J_{m-1} J_{n-1}$
   Broj prekrivanja ploče duljine $m+n$ jednak je J_{m+n}. Promotrimo ploču na mjestima m i $m+1$. Ako se na njima nalazi domino, onda preostali dio ploče možemo prekriti na $J_{m-1}J_{n-1}$ načina, ako je ploča slomljiva na tom mjestu onda je možemo prekriti na $J_m J_n$ načina.

2. $3J_n = J_{n+2} + J_{n-2}$
   Promatramo $(n+3)$-ploču slomljivu iza mjesta 3. Prva tri mjesta moći ćemo popuniti na tri načina ($J_3 = 3$), a ostatak ploče na J_n pa ukupno takvu ploču možemo prekriti na $3J_n$ načina.

   Naći interpretaciju desne strane je nešto teže. Ako kvadratić nije ni druga ni treća pločica u prekrivanju onda raspored prvih pločica mora biti KDD (da bi ploča bila slomljiva iza mjesta 3), a ostatak možemo prekriti na J_{n-2} načina. S druge strane, ako se kvadratić nalazi na drugom ili trećem mjestu rasporedi prvih pločica su oblika $DK\ldots$ ili $KDK\ldots$ ili $KKK\ldots$. Uklonimo li kvadratić (koji je drugi ili treći u prekrivanju) dobivamo rasporede oblika $D\ldots$, $KK\ldots$ ili $KD\ldots$, tj. sve moguće rasporede prekrivanja ploče duljine $n+2$ kakvih ima J_{n+2}.

3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}J_{n-i} = J_{n+p}$.
Desna strana označava broj popločavanja ploče duljine $n+p$. Za interpretaciju lijeve strane razlikujemo disjunktne slučajeve: ako se među prvih p pločica u prekrivanju nalazi točno i domina, možemo ih rasporediti na $\binom{p}{i}$ načina, a preostalih $n+p-2i-(p-i) = n-i$ mjesta možemo prekriti na J_{n-i} načina. Budući da i može biti bilo koji broj od 0 do p, prema pravilu sume slijedi tražena tvrdnja.

4. $J_n^2 = J_{2n-1} + J_{n-2}^2$
Promatrajmo ploču duljine $2n$ slomljivu iza mjesta n. Razlikujemo dva disjunktna slučaja. Ako su mjesta $n-1, n, n+1$ i $n+2$ pokrivena dominama $(\ldots DD\ldots)$, ostatak ploče možemo prekriti na $J_{n-2}\cdot J_{n-2}$ načina. S druge strane, ako su spomenuta mjesta pokrivena rasporedima $\ldots KD\ldots$ ili $\ldots KK\ldots$ ili $\ldots DK\ldots$, izbacimo kvadratić s mjesta n ili $n+1$ i dobivamo prekrivanja ploče duljine $2n-1$ kojih ima J_{2n-1}.

Primjer 6.13. Na koliko maksimalno područja n pravaca dijeli ravninu?

Rješenje. Zanima nas maksimalni broj, stoga možemo pretpostaviti da nikoja dva pravca nisu paralelna i da se nikoja tri ne sijeku u istoj točki. Označimo s a_n traženi broj. Kada na $n-1$ pravac dodamo još jedan, dobivamo n dijelova ravnine više no što smo imali. Očito je $a_1 = 2$, dakle, trebamo rješiti

$$a_n = a_{n-1} + n; \quad a_1 = 2.$$

Tipični način rješavanja dobivene rekurzije znamo, pokažimo sada tzv. **teleskopiranje**.

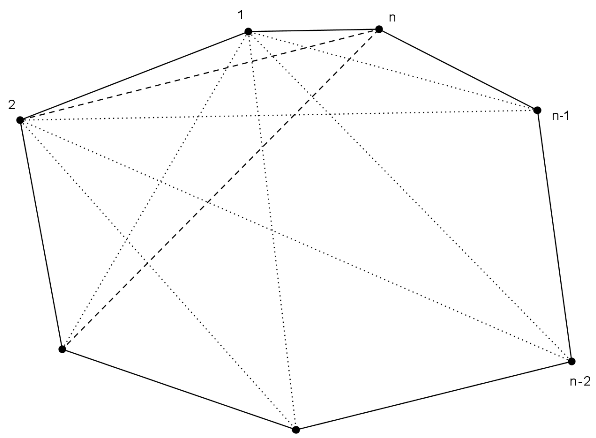
$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n = [a_{n-2} + (n-1)] + n = \ldots \\ &= 2 + 2 + 3 + \ldots + n = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

✓

Zadatak 6.14. Neka je r_n broj djelova na koje dijagonale konveksnog n–terokuta djele njegovu unutrašnjost. Pretpostavimo da se nikoje 3 dijagonale ne sijeku u istoj točki. Nađite rekurziju i zatvorenu formulu za r_n.

$$\left[\text{Rj. } r_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24}{24}\right]$$

Uputa. Dodamo n–tu točku i prebrojimo koliko novih djelova dobijemo. To radimo na taj način da tu novu točku spajamo s preostalima i to jednu po jednu i gledamo koliko smo novih djelova dobili u svakom koraku.



Tražena rekurzija je

$$r_n = r_{n-1} + \binom{n-1}{3} + n - 2 = r_{n-1} + \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 18}{6}, \ \forall n \geq 4, \ r_3 = 1,$$

koju lako rješavamo teleskopiranjem.

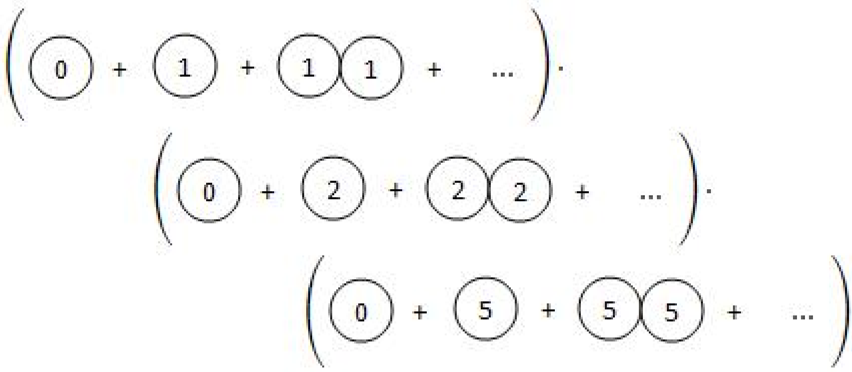
7 Funkcije izvodnice

Do sada smo pod rješenjem kombinatornih problema uglavnom podrazumijevali zatvorenu formulu, npr. $n!$ za broj permutacija ili $\binom{n}{k}$ za broj k-kombinacija skupa od n elemenata. No, nemaju svi kombinatorni problemi rješenje u obliku zatvorene formule pa smo npr. sa $S(n,k)$ označili broj k-particija skupa od n elemenata, a B_n za broj particija skupa od n elemenata. Neke probleme poput određivanja broja k-kombinacija konačnog multiskupa (vidi **Primjer 4.9.** na stranici 16), određivanje broja permutacija s ponavljanjem konačnog multiskupa (vidi **Primjer 4.3.** i **Primjer 4.5.** na stranici 14) trebalo je rastaviti na slučajeve i onda riješiti svaki slučaj posebno. Kod takvih problema od velike pomoći su nam *funkcije izvodnice* koje ne samo da možemo shvatiti kao rješenje danog problema, već su i moćan tehnički alat za rješavanje kombinatornih problema.

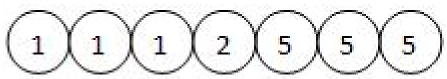
7.1 Obične funkcije izvodnice

Primjer 7.1. Na koliko načina možemo "usitniti" novčanicu od 20 kn ako na raspolaganju imamo kovanice od 1, 2 i 5 kn?

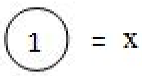
Rješenje. Označimo sa x, y i z broj kovanica od jedne, dvije i pet kuna. Tada problem glasi:
Koliko ima rješenja jednadžbe $x + 2y + 5z = 20,\ x, y, z \geq 0,\ x, y, z \in \mathbb{Z}$?
Problem možemo riješiti rastavljanjem na slučajeve po npr. varijabli z. No dobili bismo previše slučajeva, a i želimo naći metodu koja rješava sve slične probeme.
Promotrimo izraz:



Raspišemo li ovaj produkt dobivamo sumu u kojoj svaki pribrojnik odgovara nekom iznosu isplaćenom u kovanicama po 1, 2 ili 5 kn. Jedan takav pribrojnik je



Rješenje je broj pribrojnika za koje se dobije da im je suma 20.
Uz supstituciju



slijedi:

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) \cdot \left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right) \cdot \left(1 + x^5 + x^{10} + \cdots\right)$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Treba odrediti koeficijent a_{20} (oznaka $\langle x^{20} \rangle$). Grubom silom dobivamo:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20} x^{20} + \cdots$$

[Rj. $a_{20} = 29$]

Došli smo do funkcije izvodnice za niz (a_n). U osnovi smo problem riješili rastavljanjem (točnije, popisivanjem) svih mogućih slučajeva, no zbog kompaktnije notacije rješenje je ipak bilo jednostavnije za odrediti. ✓

Definicija 7.1. Za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pridružena *funkcija izvodnica* (skraćeno FI) je formalni red potencija $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Red nazivamo formalnim jer ne razmatramo pitanje konvergencije kao kod Taylorovih redova. Nas ne zanima vrijednost u određenoj točki x već isključivo koeficijenti. Osnovne operacije s formalnim redovima identične su kao i kod Taylorovih redova.

Definicija 7.2. Neka su $f_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $f_2(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ funkcije izvodnice. Tada definiramo:

$$(f_1 + f_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \tag{3}$$

$$(f_1 f_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx} f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{5}$$

$$\int f_1(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \tag{6}$$

Pročitajte poglavlje predavanja iz funkcija izvodnica i provjerite možete li izvesti osnovne operacije: iz danog niza odredite mu pripadnu funkciju izvodnicu i iz dane funkcije izvodnice odredite pripadni niz.

Prilikom određivanja koeficijenata koristimo svojstva Taylorovih redova:

Geometrijski red (konvergira za $|x| < 1$)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Prisjetimo se još nekih tvrdnji koje vrijede za Taylorove redove :

Binomni poučak

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

.

Definicija 7.3. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada se opći binomni koeficijent $\binom{\alpha}{n}$ definira kao

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Opći binomni poučak

$$(1 \pm x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\pm x)^k$$

.

Napomena 7.4. Uočite da je Opći binomni poučak poopćenje Binomnog poučka, tj. da se formule podudaraju za $\alpha \in \mathbb{N}$ (problem je što u općem binomnom poučku imamo red, a ne konačnu sumu).

Pomoću funckija izvodnica možemo opravdati metodu za rješavanje linearnih rekurzija s konstantnim koeficijentima. Ovdje će nas više zanimati modeliranje kombinatornih problema (kombinacije konačnog mutiskupa, permutacije s ponavljanjem).

Interpretacija binomnog poučka pomoću funkcija izvodnica

$\binom{n}{k}$ = broj k-kombinacija n-članog skupa

Neka je $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ n-člani skup, te $A = \{S_{i_1}, S_{i_2}, \cdots, S_{i_k}\} \subseteq S$ k-člani podskup od S.
Na koliko načina možemo odabrati A?

Prvi element možemo uzeti 0 puta ili jednom, drugi element možemo uzeti 0 puta ili jednom, ... i n-ti element možemo uzeti 0 puta ili jednom, odnosno:

$$(1+x) \cdot (1+x) \cdot \cdots \cdot (1+x) = (1+x)^n$$

Dakle $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ je funkcija izvodnica za broj kombinacija n-članog skupa.

Što je s kombinacijama s ponavljanjem n-članog skupa?
Svaki element možemo uzeti proizvoljno mnogo puta!

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+x+x^2+\cdots\right) \cdot \left(1+x+x^2+\cdots\right) \cdots \left(1+x+x^2+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-x} \\ &= \left(\frac{1}{1-x}\right)^n \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Dobiveni red nazivamo funkcijom izvodnicom za kombinacije multiskupa $\{S_1^\infty, S_2^\infty, \cdots, S_n^\infty\}$.

Pravilo inverzije

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k (n+k-1)(n+k-2)\cdots(n)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

Vratimo se sad primjeru k-kombinacija multiskupa $\{S_1^\infty, S_2^\infty, \cdots, S_n^\infty\}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x)} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)^n \\ &= (1-x)^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-1)^k x^k \\ &\boldsymbol{= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k} \end{aligned}$$

Zadatak 7.2. Odredite funkciju izvodnicu za broj kombinacija multiskupa $\{a^2, b, c^2, d\}$ te odredite koliko ima 4-kombinacija.

Rješenje. Elemente a i c možemo uzeti 0,1 ili 2 puta, dok elemente b i c možemo uzeti ili ne uzeti:

$$f(x) = \left(1 + x + x^2\right)(1 + x)\left(1 + x + x^2\right)(1 + x)$$

Sada je lako to izmnožiti te potom očitati $\left\langle x^4 \right\rangle$

$$f(x) = 1 + 4x + 8x^2 + 10x^3 + 8x^4 + 4x^5 + x^6$$

$$\Longrightarrow \left\langle x^4 \right\rangle = 8$$

✓

Zadatak 7.3. Odredite funkciju izvodnicu za broj kombinacija multiskupa $\left\{a^{10}, b^7, c^{12}\right\}$ te odredite koliko ima 15-kombinacija.

Rješenje. Element a možemo uzeti proizvoljan broj puta, od 0 do 10, b od 0 do 7 puta i c od 0 do 12 puta:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \cdots + x^{10}\right)\left(1 + x + \cdots + x^7\right)\left(1 + x + \cdots + x^{12}\right) \\ &= \frac{1 - x^{11}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^8}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{13}}{1 - x} \\ &= \left(1 - x^{11}\right) \cdot \left(1 - x^8\right) \cdot \left(1 - x^{13}\right) \cdot (1 - x)^{-3} \\ &= \left\{(1 - x)^{-3} = \sum_k \binom{-3}{k}(-x)^k = \sum_k \binom{k+2}{k} x^k\right\} = \\ &= \left(1 - x^8 - x^{11} - x^{13} + x^{19} + \cdots\right) \cdot \sum_k \binom{k+2}{k} x^k \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\langle x^{15} \right\rangle = \binom{15+2}{15} - \binom{7+2}{7} - \binom{4+2}{4} - \binom{2+2}{2} = 79$$

✓

Zadatak 7.4. Na koliko načina se 24 jednaka bombona može raspodijeliti među 4 djece tako da svako dijete dobije barem 3, ali ne više od 8 bombona?

Rješenje. Svakom od njih četvero možemo dati 3, 4, ... ili 8 bombona.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^3 + x^4 + \cdots + x^8\right)^4 \\ &= x^{12} \cdot \left(1 + x + \cdots + x^5\right)^4 \\ &= x^{12} \cdot \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4 \\ &= x^{12} \cdot \left(1 - x^6\right)^4 (1 - x)^{-4} \\ &= x^{12} \cdot \left(1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k}(-x)^k \\ &= \left(x^{12} - 4x^{18} + 6x^{24} - 4x^{30} + x^{36}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k \end{aligned}$$

$$\left\langle x^{24} \right\rangle = \binom{12+3}{12} - 4 \cdot \binom{6+3}{6} + 6 \cdot \binom{3}{0}$$

✓

Napomena 7.5. Uočite da smo u prethodna tri zadatka prezentirali drugi način rješavanja **Primjera 4.9.** na stranici 16 (probajte ga riješiti s ovom metodom), s tim da s funkcijama izvodnicama možemo raditi s proizvoljno mnogo ograničenja. Također bismo lako riješili problem da neka varijabla mora biti djeljiva s 2 i sl. (samo uzimamo parne potencije...).

Zadatak 7.5. Petero dječaka dijeli n jednakih slatkiša na način da drugi dječak uzme najviše 5 slatkiša, četvrti dječak uzme koliko prvi, drugi i treći zajedno, a peti dječak uzme za jedan više od drugog. Napišite funkciju izvodnicu za (a_n), gdje je a_n broj načina na koji dječaci mogu rasporediti slatkiše. Nadalje, koristeći dobivenu funkciju izvodnicu, izračunajte a_{24} i a_{23}.

Rješenje. Označimo s x_i, $i \in \{1, \dots, 5\}$, broj slatkiša koje je dobio i-ti dječak pa imamo $x_1 + \dots + x_5 = n$, $x_i \geq 0$, $i \in \{1, \dots, 5\}$. Također iz uvjeta raspodjele zaključujemo $x_2 \leq 5$, $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$ i $x_5 = x_2 + 1$ pa konačno tražimo rješenje problema

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = n - 1\,, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0\,, \quad x_2 \leq 5\,.$$

Funkcija izvodnica je dana s

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^2 + x^4 + \dots)^2 (1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15}) \\ &= (1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15}) \sum_{k \geq 0} (k+1) x^{2k}\,, \end{aligned}$$

s tim da je $a_n = \langle x^{n-1} \rangle$. Konačno je $a_{23} = \langle x^{22} \rangle = 12 + 9 + 6 = 27$, dok je $a_{24} = \langle x^{23} \rangle = 11 + 8 + 5 = 24$. ✓

Zadatak 7.6. Broj particija $p_1(n)$ od n u različite sumande jednak je broju particija $p_2(n)$ od n u neparne sumande. Dokažite!

Rješenje. Naći ćemo funkcije izvodnice za oba problema, i pokazati da su jednake! Same brojeve takvih particija ne znamo izračunati, pa nam funkcije izvodnice uvelike pomažu u ovom slučaju.
Pogledajmo particije od $n = 6$ u različite i u neparne sumande:

$$\begin{array}{lll} 6 & =1+2+3 & =1+1+1+1+1+1 \\ & =1+5 & =1+1+1+3 \\ & =2+4 & =1+5 \\ & =6 & =3+3 \end{array}$$

Funkciju izvodnicu f_1 za računanje $p_1(n)$ nije teško odrediti, svaki od sumanda možemo uzeti 0 ili 1 put, dakle:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (1 + x) \cdot \left(1 + x^2\right) \cdots (1 + x^n) \cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + x^k\right) \end{aligned}$$

Analogno odredimo i f_2, smijemo uzimati samo neparne sumande, ali ih možemo uzeti proizvoljno mnogo puta:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \cdot \left(1 + x^3 + x^6 + \cdots\right) \cdot \left(1 + x^5 + x^{10} + \cdots\right) \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots \end{aligned}$$

Preostaje pokazati da su te dvije funkcije jednake:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + x^k\right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{2k}}{1 - x^k}\right) \\ &= \frac{1 - x^2}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x^6}{1 - x^3} \cdot \frac{1 - x^8}{1 - x^4} \cdots \\ &= f_2(x) \end{aligned}$$

Jer se svi faktori oblika $1 - x^{2k}$ pokrate. ✓

Napomena 7.6. Pogrešno bi bilo funkciju izvodnicu za broj particija u različite sumande iz prethodnog zadatka definirati kao $f(x) = \underbrace{(1 + x) \cdot (1 + x) \cdots (1 + x)}_{n \text{ puta}}$. Do tog rezultata dolazimo razmišljajući na sljedeći način; u rastavu broja n na različite sumande, jedinicu ćemo uzeti ili ne uzeti, analogno, dvojku ćemo uzeti ili ne uzeti itd. To razmišljanje je definitivno točno, ali nam ovdje **svaki od odabira nije "jednako vrijedan"**, kao kod npr. odabira k-članog podskupa n-članog skupa! Primjetimo da bismo u tom slučaju koeficijent $\langle x^n \rangle$ koji odgovara broju rastava broja n na različite sumande dobili na jedan jedini način; iz svake zagrade odaberemo x (dakle ni iz jedne ne odaberemo 1) i sve ih pomnožimo. Vidjeli smo da za $n = 6$ takav prikaz nije jedinstven (zapravo, za svaki $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ takav prikaz nije jedinstven). Uočimo da svaki od navedenih rastava u primjeru za $n = 6$ odgovara jednom od načina na koji možemo dobiti x^n iz funkcije f_1 i obratno:

$$1 + 2 + 3 \longleftrightarrow x^1 \cdot x^2 \cdot x^3$$

$$1 + 5 \longleftrightarrow x^1 \cdot x^5$$

$$2 + 4 \longleftrightarrow x^2 \cdot x^4$$

$$6 \longleftrightarrow x^6$$

Jasno je da isto vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Rješavanje raznih kombinatornih problema pomoću funkcija izvodnica naizgled zaobilazi "problem" zbrajanja, stvar se svodi na množenje, zapravo je u pozadini

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Upravo bi iz tih razloga bilo jednako krivo definirati dotičnu funkciju kao $f(x) = (1+x) \cdot (1+2x) \cdots (1+nx)$.

7.2 Eksponencijalne funkcije izvodnice

Veza permutacija i kombinacija n-članog skupa:

$$a_k = P_k^n = \binom{n}{k} \cdot k! \Longrightarrow \binom{n}{k} = \frac{a_k}{k!}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Dakle $e(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k$ je eksponencijalna funkcija izvodnica za permutacije n-članog skupa.

Definicija 7.7. Za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pridružena *eksponencijalna funkcija izvodnica* (skraćeno EFI) je formalni red potencija $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Definicija 7.8. Neka su $e_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ i $e_2(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ eksponencijalne funkcije izvodnice. Tada definiramo:

$$(e_1 + e_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n!} x^n \tag{7}$$

$$(e_1 e_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k b_{n-k}}{n!} x^n \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx} e_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} \tag{9}$$

$$\int e_1(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{10}$$

Primjer 7.7. Neka je $S = \{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_k^{n_k}\}$ multiskup. Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za permutacije multiskupa.

Rješenje. Element a_i možemo uzeti od 0 do n_i puta, i tako $\forall i = 1, 2, \cdots, k$:

$$\boldsymbol{e(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\right)}$$

✓

Primjer 7.8. Koliko ima riječi duljine 4 sastavljenih od slova B,A,N,A,N i A?

Rješenje. Traže se 4-permutacije multiskupa $S = \left\{A^3, B, N^2\right\}$. Slovo A možemo uzeti od 0 do 3 puta, B uzeti ili ne, a C možemo uzeti 0, 1 ili 2 puta:

$$\begin{aligned} e(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \cdot (1+x) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) \\ &= 1 + 3x + 4x^2 + \frac{19}{6}x^3 + \frac{19}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{12}x^6 \end{aligned}$$

$$\frac{a_4}{4!} = \left\langle x^4 \right\rangle = \frac{19}{12} \Longrightarrow a_4 = 38$$

✓

Zadatak 7.9. Koliko ima ternarnih nizova duljine n, tako da imamo paran broj nula, neparan broj jedinica i proizvoljno dvojki?

Rješenje. Za nule uzimamo samo parne potencije, za jedinice neparne, a za dvojke sve:

$$\begin{aligned} e(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot e^x \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) \cdot e^x \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(e^{3x} - e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\ &= (7) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{3^k - (-1)^k}{k!} x^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle x^n \right\rangle &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3^n - (-1)^n}{n!} \\ \Longrightarrow a_n &= \frac{3^n - (-1)^n}{4} \end{aligned}$$

✓

Napomena 7.9. Tokom rješavanja koristili smo rezultate koje dobijemo zbrajanjem, odnosno oduzimanjem sljedećih jednadžbi:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

Napomena 7.10. U Primjeru 7.7 smo vidjeli drugi (općenitiji) način rješavanja **Primjera 4.5.** na stranici 15 (probajte ga riješiti s ovom metodom).

Definicija 7.11. Deranžman je permutacija bez fiksnih točaka.

Zadatak 7.10. Odredite EFI za deranžmane!

Rješenje. Označimo broj deranžmana n-članog skupa sa d_n, EFI za broj deranžmana sa $d(x)$. Sada je $d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

Skup svih permutacija S_n skupa od n elemenata, možemo razdvojiti na disjunktnu uniju $\bigcup_{k=0}^{n} S_n^{(k)}$ gdje je $S_n^{(k)}$ skup svih permutacija n-članog skupa koje imaju k fiksnih točaka, i to za svaki $k = 0, 1, \cdots, n$. Dobivamo

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

Pomnožimo dobiveni rezultat sa $\frac{x^n}{n!}$, imamo

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!} x^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!} x^n \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!} x^n \\
&= (8) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \right) \\
&= e^x \cdot d(x)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow d(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x}$$

Preostaje razviti dobivenu funkciju:

$$\begin{aligned}
d(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n
\end{aligned}$$

Sada lako vidimo koliki je broj deranžmana n-članog skupa, naime $\langle x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ pa je

$$d_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

✓

8 Formula uključivanja i isključivanja

Za dva disjunktna skupa, A i B, znamo da je broj elemenata njihove unije jednak zbroju elemenata u svakom od njih. Općenito vrijedi $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$ (pri zbrajanju kardinalnih brojeva skupova dvaput su brojani elementi presjeka). Vrijedi

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Teorem 8.1. Formula uključivanja i isključivanja
Neka je S konačan skup i $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$. Tada je broj elemenata njihove unije

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Odatle slijedi:

$$\left|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Napomena 8.2. Često u zadacima imamo $|A_i| = b_1$, $|A_i \cap A_j| = b_2, \ldots$ (kardinalni broj presjeka svaka dva skupa je jednak...) pa se gornja formula pojednostavljuje u

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} b_i\,.$$

Provjerite!

Zadatak 8.1. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, 10^6\}$. Koliko je brojeva iz S koji nisu djeljivi ni s dva, ni s tri niti sa četiri?

Rješenje. Označimo: $A_i = \{x \in S : i | x\}$. Vrijedi $|A_i| = \left\lfloor \frac{10^6}{i} \right\rfloor$. Nas zanima $\left|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right|$, a on je, prema drugoj tvrdnji prethodnog teorema, jednak

$$\begin{aligned}\left|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right| &= |S| - |A_2| - |A_3| - |A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 333333.\end{aligned}$$

✓

Zadatak 8.2. Koliko brojeva dijeli barem jedan od brojeva 10^{60}, 20^{50}, 30^{40}?

Rješenje. Označimo $A = \{d \in \mathbb{N} : d | 10^{60}\}$, $B = \{d \in \mathbb{N} : d | 20^{50}\}$, $C = \{d \in \mathbb{N} : d | 30^{40}\}$
Kako je $10^{60} = 2^{60} \cdot 5^{60}$ svi brojevi iz A su oblika $2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$, uz $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 60$. Zato je $|A| = 61^2$. Istim zaključivanjem nalazimo $|B| = 101 \cdot 51$ i $|C| = 41^3$ Zanima nas i koliko ima brojeva koji su istovremeno i *u A* i *u B*. Oni u svom rastavu na proste faktore smiju imati samo dvojke i petice, pri čemu dvojki smije biti najviše 60 (zbog oblika brojeva iz A), a petica najviše 50 (zbog oblika brojeva iz B). Zato je $|A \cap B| = 61 \cdot 51$.
Slično je i $|B \cap C| = 41^2, |A \cap C| = 41^2, |A \cap B \cap C| = 41^2$. Sada prema formuli uključivanja i isključivanja nalazimo $|A \cup B \cup C| = 73001$ ✓

Zadatak 8.3. Pustinjom putuje karavana od devet deva. Nakon odmora u oazi, potrebno je promijeniti redoslijed deva tako da niti jedna deva ne hoda iza one deve iza koje je hodala prije dolaska u oazu. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Rješenje. Ako je S skup svih redoslijeda deva, a A_i ={redoslijed u kojem i-ta deva hoda iza $(i-1)$. deve}, $i = 2, \ldots, 9$, želimo utvrditi koliko je $\left|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \ldots \cap \bar{A}_9\right|$. Znamo da je $|S| = 9!$ i $|A_k| = 8!$, za $2 \leq k \leq 9$ (dvije deve promatramo kao blok). Isto tako znamo da za sve i, j vrijedi $A_i \cap A_j = 7!$ (promatramo ili dva bloka od dvije deve i još 5 deva ili, u slučaju da su i i j uzastopni, jedan blok od tri deve i još 6 deva). Sličnim razmišljanjem dolazimo do $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 6!, \ldots, |A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_9| = 1$. Zato je traženi broj redoslijeda

$$\begin{aligned} \left|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \ldots \cap \bar{A}_9\right| &= |S| - \sum_{i=2}^{9} |A_i| + \sum_{1<i<j\leq 9} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^8 \cdot |A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_9| \\ &= 9! - 8 \cdot 8! + \binom{8}{2} \cdot 7! - \binom{8}{3} \cdot 6! + \ldots + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{8} (-1)^k \cdot \binom{8}{k} \cdot (9-k)! \end{aligned}$$

✓

Zadatak 8.4. Na početku nove sezone RK Zagreb potpisuje ugovore s pojačanjima. Na potpisivanje je došlo n rukometaša, svaki u pratnji agenta i liječnika. Na koliko načina možemo tu grupu od $3n$ ljudi rasporediti u tročlane grupe sastavljene od jednog rukometaša, jednog agenta i jednog liječnika, ali tako da nijedan rukometaš nije u grupi s oba svoja pratitelja?

Rješenje. Svih mogućih grupiranja u trojke ima $n!^2$ (rukometaš određuje grupu, a zatim agente i liječnike možemo rasporediti po grupama na $n!$ načina). Neka je A_i skup onih grupiranja u kojima je i-ti rukometaš u grupi sa svojim liječnikom i agentom. Tada je $|A_i| = (n-1)!^2$ (jedna je grupa zadana, brojimo načine na koliko se može sastaviti preostalih $n-1$ grupa), $|A_i \cap A_j| = (n-2)!^2, \ldots, |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = 1$. Na kraju je

$$\begin{aligned} \left|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n\right| &= n!^2 - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^n \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \\ &= n!^2 - n \cdot (n-1)!^2 + \binom{n}{2} \cdot (n-2)!^2 - \binom{n}{3} \cdot (n-3)!^2 + \ldots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} 0!^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!^2 \end{aligned}$$

✓

Zadatak 8.5. Odredi broj deranžmana n-članog skupa

Rješenje. Neka je S_n skup svih permutacija n-članog skupa. Nas zanima koliko je permutacija $\pi \in S_n$ takvih da je $\pi(i) \neq i, \forall i$. Uvedimo oznaku $A_i = \{\pi \in S_n \,:\, \pi(i) = i\}$

$$\begin{aligned} |S_n| &= n! \\ |A_i| &= (n-1)! \\ |A_i \cap A_j| &= (n-2)! \\ &\vdots \\ |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| &= 1 \end{aligned}$$

Sada, slično kao u prethodna dva zadatka, dolazimo do formule za broj deranžmana

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!$$

✓

Definicija 8.3. Eulerova funkcija broja n, $\varphi(n)$, je broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih od n koji s brojem n nemaju zajedničkih djelitelja

Zadatak 8.6. Pronađi izraz za Eulerovu funkciju

Rješenje. Broj n možemo prikazati kao umnožak njegovih prostih faktora, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$
Neka je A_i skup svih višekratnika broja p_i manjih ili jednakih od n, $1 \leq i \leq k$. Tada je

$$\varphi(n) = \left|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_k\right| = n - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|\,,$$

što računamo po formuli uključivanja i isključivanja. Uz

$$\begin{aligned}|A_i| &= \frac{n}{p_i}\\ |A_i \cap A_j| &= \frac{n}{p_i \cdot p_j}\\ &\vdots\\ |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| &= \frac{n}{p_1 \cdot p_2 \ldots p_k}\end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - (\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k} - \frac{n}{p_1 \cdot p_2} - \frac{n}{p_1 \cdot p_3} - \ldots - \frac{n}{p_{k-1} \cdot p_k} + \ldots + (-1)^k \cdot \frac{n}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k})\\ &= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_k})\end{aligned}$$

✓

Zadatak 8.7. Koliko je najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od ishodišta do točke $(7, 5)$ koji ne prolaze segmentima [(2,2),(3,2)] i [(4,2),(4,3)]?

$$\left[\text{Rj.} \binom{7+5}{7} - \binom{2+2}{2} \cdot \binom{4+3}{4} - \binom{4+2}{2} \cdot \binom{3+2}{2} + \binom{2+2}{2} \cdot 1 \cdot \binom{3+2}{2}\right]$$

Zadatak 8.8. Koristeći formulu uključivanja i isključivanja odredite koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$$

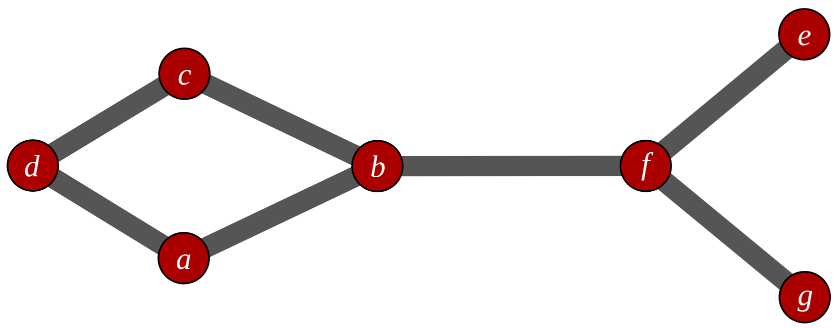
uz uvjete: x_1, x_4, $x_5 \geq 0$; $2 \leq x_3 \leq 7$; $2 \leq x_2 \leq 8$.

9 Teorija grafova

9.1 Uvod

Definicija 9.1. **Graf** je uređen par (V, E), pri čemu je V skup vrhova, a E skup bridova. Skup bridova E je podskup skupa svih dvočlanih podskupova od V. Za vrhove $A, B \in V$ kažemo da su susjedni ako je $\{A, B\} \in E$. Vrh A i brid e su incidentni ako je $A \in e$, tj. ako postoji $B \in V$ takav da $e = \{A, B\}$.

Primjer 9.1. Graf sa vrhovima $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ i bridovima
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, f\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{f, g\} \{f, e\}\}$



Definicija 9.2. **Multigraf** je graf čiji bridovi čine multiskup. **Petlja** je brid koji spaja vrh sa samim sobom. **Stupanj vrha** v (oznaka $d(v)$) je broj bridova koji su incidentni sa vrhom v. Petlja stupnju vrha s kojim je incidentna doprinosi sa $+2$.

Napomena 9.3. Kada želimo naglasiti da graf nema niti višestrukih bridova niti petlji (**definicije 9.2.**), onda graf nazivamo **jednostavnim grafom**.

Teorem 9.4. **(Lema o rukovanju)** U jednostavnom grafu $G = (V, E)$ zbroj stupnjeva svih vrhova je paran, tj. $\sum\limits_{v \in V} d(v)$ je paran.

Zadatak 9.2. Je li moguće da u grupi od sedam osoba svaka osoba ima točno tri poznanika.

Rješenje. Defnirajmo problem u terminima teorije grafova: neka su vrhovi osobe, a poznanstva bridovi (spojimo poznanike bridom). Kada bi svaka osoba imala točno tri poznanika tada bi stupanj svakog vrha bio tri, tj. $(\forall v \in V)\ d(v) = 3$, što je u kontradikciji s lemom o rukovanju. Bez korištenja leme o rukovanju iz relacije

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = 7 \cdot 3 = 21\,,$$

uočavamo da je na lijevoj strani jednakosti paran broj, dok je na desnoj strani neparan broj, pa takav graf ne postoji. ✓

Definicija 9.5. **Šetnja** u grafu $G = (V, E)$ je niz vrhova $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ pri čemu su v_i i v_{i+1} susjedni za $i = 1, 2, \cdots, k-1$. **Staza** je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti (ali moguća su ponavljanja vrhova), dok je **put** staza u kojoj su svi vrhovi različiti (osim eventualno prvog i zadnjog - takav put nazivamo **ciklusom**).

Definicija 9.6. Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je **podgraf** od $G = (V, E)$ ako je $V_1 \subseteq V$, a $E_1 \subseteq \{\{v_i, v_j\} \in E : v_i, v_j \in V_1\}$. Ako je $E_1 = \{\{v_i, v_j\} \in E : v_i, v_j \in V_1\}$ tada kažemo da je G_1 **inducirani podgraf**.

Definicija 9.7. Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su **izomorfni** ako postoje bijekcije $\theta : V_1 \longrightarrow V_2$ i $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ takve da je vrh v incidentan sa bridom e u G_1 ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan sa bridom $\varphi(e)$ u G_2.

Napomena 9.8. Funkciju φ iz prethodne definicije možemo definirati preko θ s $\varphi(\{a,b\}) := \{\theta(a), \theta(b)\}$.

Napomena 9.9. Ako su grafovi G_1 i G_2 izomorfni onda vrijedi

(1) $|V_1| = |V_2|$

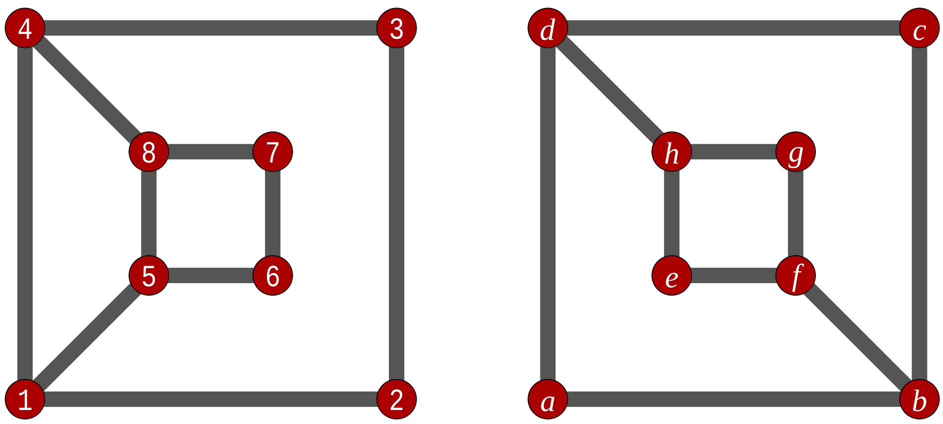
(2) $|E_1| = |E_2|$

(3) $d(v) = d(\theta(v)), \forall v \in V_1$

(4) Ako je $(v_0, v_1, \cdots, v_0)$ ciklus duljine n onda je $(\theta(v_0), \theta(v_1), \cdots, \theta(v_0))$ isto ciklus duljine n.

(5) Inducirani podgraf sa $V \subseteq V_1$ je izomorfan s induciram podgrafom $\theta(V) \subseteq V_2$.

Zadatak 9.3. Odredite jesu li sljedeći grafovi izomorfni.

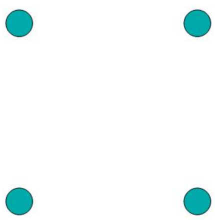


Rješenje. Odmah uočavamo da je broj vrhova i broj bridova isti u oba grafa. Također vidimo da u oba grafa postoje 4 vrha stupnja 2 i 4 vrha stupnja 3. Pokušajmo provjeriti svojstvo 5 iz gornje napomene. Promotrimo inducirani podgraf $G = (\{b, d, f, h\}, \{\{bf\}, \{dh\}\})$. Vrhovi tog podgrafa su stupnja 3 pa se moraju preslikavati u vrhove $\{1,\ 4,\ 5,\ 8\}$, ali kako god ih preslikali ta dva podgrafa neće biti izomorfna (ciklus se ne preslika u ciklus). Zaključujemo, grafovi nisu izomorfni. ✓

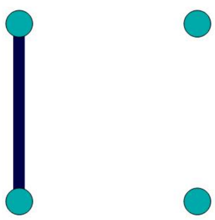
Zadatak 9.4. Ispišite sve izomorfne klase grafa koji ima 4 vrha.

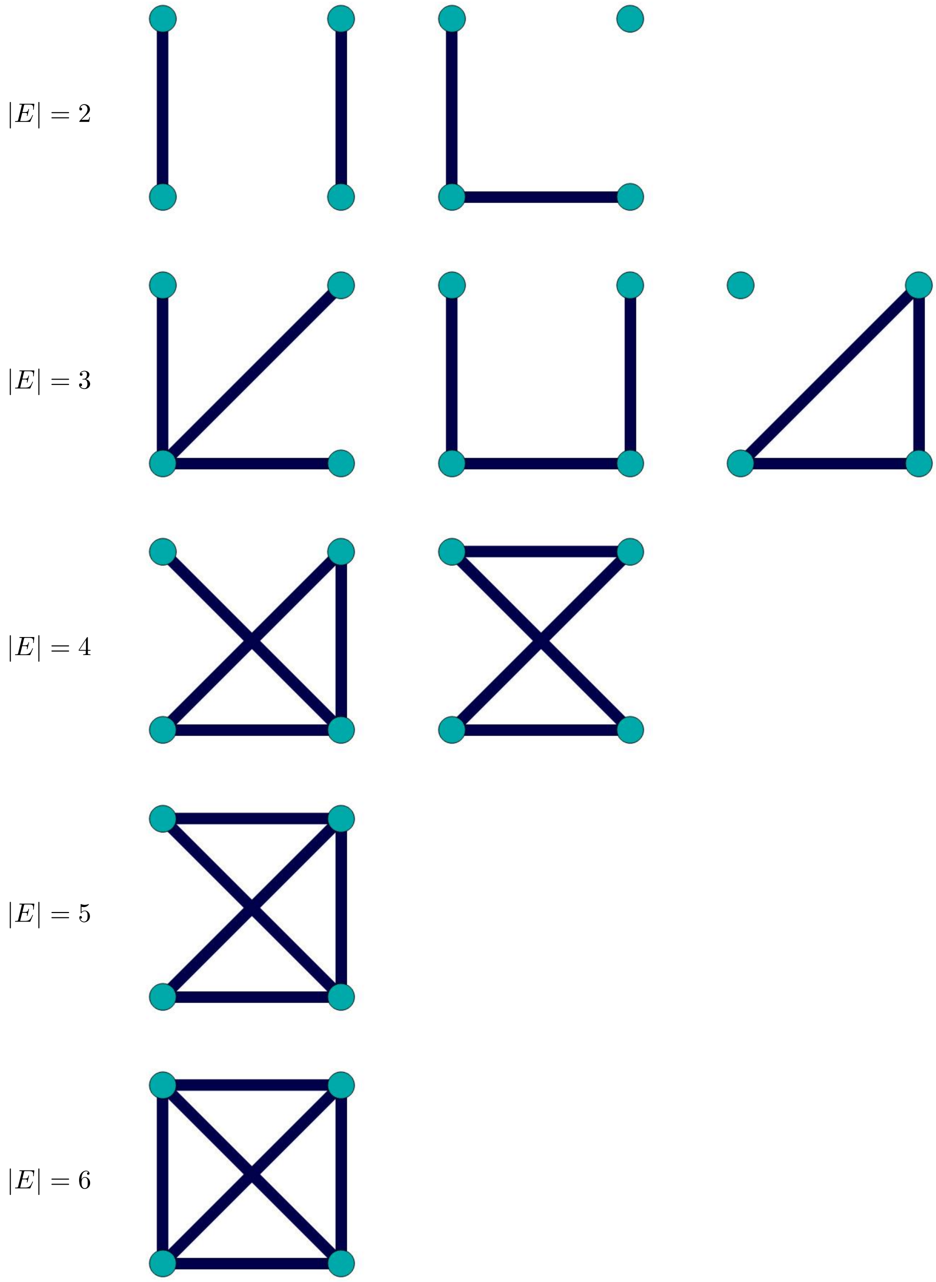
Rješenje.

$|E| = 0$



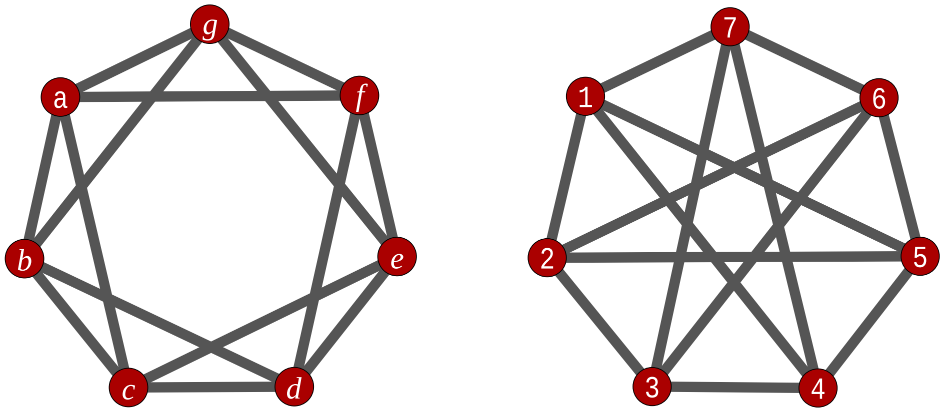
$|E| = 1$





Primjetite da slučaj $|E| = i$ ima isto klasa kao i slučaj $|E| = 6 - i$. To je zato što slučaj $|E| = 6 - i$ dobijemo tako da u slučaju $|E| = i$ sve bridove obrišemo, a sve točke koje nisu bile spojene bridom spojimo. ✓

Zadatak 9.5. Jesu li slijedeći grafovi izomorfni?



Rješenje. Uzmimo neka se a preslikava u 1 (ovu pretpostavku uzmimamo jer su grafovi simetrični tj. svi vrhovi su "ravnopravni"). Kada bi grafovi bili izomorfni moralo bi vrijediti $\{b, c, f, g\} \longrightarrow \{2, 4, 5, 7\}$ jer su to susjedni vrhovi vrhu a, odnosno vrhu 1. Promotrimo li inducirani podgraf s vrhovima $\{f, g, b, c\}$ i inducirani podgraf s vrhovima $\{7, 4, 5, 2\}$, uočavamo da bi moralo vrijediti $\{b, g\} \longrightarrow \{4, 5\}$ jer su to vrhovi stupnja dva u pripadnim induciranim podgrafovima. Uzmimo $b \mapsto 4$ pa je onda $g \mapsto 5$. Nadalje, b i c su susjedni pa mora biti $c \mapsto 7$, a onda i $f \mapsto 2$. Preostaje nekako pridružiti $\{d, e\} \longrightarrow \{3, 6\}$. Stavimo $d \mapsto 3$ jer d nije susjedan s g, a 3 nije susjedan s 5, te naposljetku $e \mapsto 6$. Sada lako provjerimo da su grafovi zaista izomorfni. ✓

Zadatak 9.6. Odredite broj označenih multigrafova koji imaju n vrhova i m bridova.

Rješenje. Neka je $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ skup vrhova. Bridovi su ili petlje ili oblika $e = \{v_i, v_j\}, i \neq j$. Zanima nas koliko ih ima različitih. Različitih petlji ima n (za svaki vrh jedna petlja), a bridova oblika $e = \{v_i, v_j\}, i \neq j$ ima $\binom{n}{2}$. Još preostaje odabrati koliko puta se koji brid pojavljuje u grafu, pa je rješenje $\binom{n + \binom{n}{2} + m - 1}{m}$ ✓

9.2 Povezanost grafova

Zadatak 9.7. Ako u grafu $\mathcal{G} = (V, E)$ postoji šetnja od u do v, onda postoji i put od u do v. Dokažite!

Rješenje. Neka je $(u, e_1, v_1, \ldots, e_n, v)$ šetnja od u do v, ako je to put nema se šta dokazivati, ako nije, onda postoje indeksi $i, j,\ i < j$ takvdi da je $v_i = v_j$, tada je $(u, e_1, \ldots, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \ldots, v)$ također šetnja od u do v, ako je to i put smo gotovi, u protivnom ponovimo postupak, jer je šetnja konačna algoritam će u nekom trenutku stati. ✓

Definicija 9.10. Kažemo da je graf $\mathcal{G} = (V, E)$ **povezan** ako između svaka dva vrha postoji put, u suprotnom graf je **nepovezan**.

Definicija 9.11. Komponenta povezanosti je maksimalan povezan neprazan podgraf, tj. povezan podgraf koji nije pravi podgraf ni u kojem drugom povezanom podgrafu.

Napomena 9.12. Komponente povezanosti smo mogli definirati kao klase ekvivalencije relacije $\sim$ na V definirane na sljedeći način:

$$u \sim v \iff \text{postoji put od } u \text{ do } v$$

Pokažimo da je to zaista relacija ekvivalencije:

(1) Refleksivnost:
Neka je $u \in V$ proizvoljan vrh iz V. Put od u do u je (u), dakle $u \sim u,\ \forall u \in V$

(2) Simetričnost:
Neka su $u, v \in V$ proizovoljni vrhovi iz V takvi da je $u \sim v$. Neka je $(u, e_1, v_1, \dots, e_n, v)$ put od u do v. Tada je
$$(v, e_n, \dots, v_1, e_1, u)$$
put od v do u pa je $v \sim u$.

(3) Tranzitivnost:
Neka su $u, v, z \in V$ proizovljni vrhovi iz V takvi da je $u \sim v$ i $v \sim z$. Neka je $(u, e_1, v_1, \dots, e_n, v)$ put od u do v i $(v, f_1, w_1, \dots, f_m, z)$ put od v do z.
Očito je $(u, e_1, v_1, \dots, e_n, v, f_1, w_1, \dots, f_m, z)$ šetnja od u do z po **zadatku 9.7.** postoji put od u do z, dakle $u \sim z$.

✓

Zadatak 9.8. Dokažite da je jednostavan graf s n vrhova i strogo više od $\binom{n-1}{2}$ bridova povezan.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, neka je $\mathcal{G}$ nepovezan graf s više od $\binom{n-1}{2}$ bridova i n vrhova. Označimo komponente povezanosti s $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m$, te definirajmo $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_1^C = \bigcup_{i=2}^{m} \mathcal{G}_i$.
$\mathcal{G}_1$ ima najviše bridova ako je potpun graf. Neka $\mathcal{G}_1$ ima x vrhova, tada je $|E(\mathcal{G}_1)| \leq |E(\mathcal{K}_x)|$, također, $|E(\mathcal{G}_1^C)| \leq |E(\mathcal{K}_{n-x})|$.
Tada je $|E| \leq \binom{x}{2} + \binom{n-x}{2} = x^2 - nx + \frac{n^2-n}{2} =: f(x)$. Jer je $x \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, i koeficijent uz x^2 strogo pozitivan, $f(x)$ postiže maksimum na rubovima segmenta, no

$$\begin{aligned} f(1) &= \binom{1}{2} + \binom{n-1}{2} &= \binom{n-1}{2} \\ f(n-1) &= \binom{n-1}{2} + \binom{1}{2} &= \binom{n-1}{2} \end{aligned}$$
$$\implies \max_{x \in [1, n-1]} f(x) = \binom{n-1}{2} \implies |E| \leq \binom{n-1}{2} \Rightarrow\Leftarrow$$

✓

Napomena 9.13. Prethodni zadatak daje *optimalni* rezultat, tj. postoji nepovezan graf s $\binom{n-1}{2}$ bridova (lako pokažete na primjeru s 4 vrha i $\binom{4-1}{2} = 3$ brida).

Definicija 9.14. Stablo je povezan graf koji nema ciklus. **List** je vrh stupnja 1.

Teorem 9.15. Povezan graf $\mathcal{G} = (V, E)$ sa n vrhova je stablo akko $|E| = n - 1$.

Zadatak 9.9. Dokažite da stablo koje ima vrh stupnja d ima barem d listova.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, da postoji stablo $G = (V, E)$ koje sadrži vrh $v \in V$ stupnja d i koje ima manje od d listova. Po **teoremu 9.15.** znamo da je $|E| = n - 1$. S druge strane, kako je $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$ i stablo nema više od $n - 1$ lista, vrijedi ocjena:

$$2(n-1) = \sum_{v \in V} d(v) \geq \underbrace{d}_{1} + \underbrace{(d-1) \cdot 1}_{2} + \underbrace{(n-d) \cdot 2}_{3} = 2n - 1 \Rightarrow\Leftarrow$$

(1) vrh v

(2) listovi

(3) preostali vrhovi, za koje pretpostavljamo da niti jedan nije list, dakle, svi su stupnja barem 2 i ima ih $n - d$

✓

Definicija 9.16. **Razapinjujući podgraf** $\mathcal{H}$ grafa $\mathcal{G}$ je podgraf od $\mathcal{G}$ takav da je $V(\mathcal{H}) = V(\mathcal{G})$. **Razapinjujuće stablo** $\mathcal{H}$ nekog grafa $\mathcal{G}$ je razapinjujući podgraf od $\mathcal{G}$ koji je i stablo.

Napomena 9.17. Svaki povezan graf ima razapinjujuće stablo.

Teorem 9.18. Potpun graf $\mathcal{K}_n$ ima n^{n-2} razapinjujućih stabala.

Napomena 9.19. Dokaz ide preko FUI, no može se dokazati i koristeći Prüferov kod, koji uspostavlja bijekciju između niza duljine $n-2$ i potpunog grafa sa n vrhova, taj je dokaz znatno kompliciraniji, ali se spomenuta bijekcija može pokazati korisnom.

Definicija 9.20. Kažemo da je graf $\mathcal{G} = (V, E)$ **bipartitan** ako postoje $A, B \neq \emptyset$ takvi da je $A \cup B = V$ i $A \cap B = \emptyset$ te da $\forall e \in E, e = \{a, b\}$ vrijedi $a \in A, b \in B$.

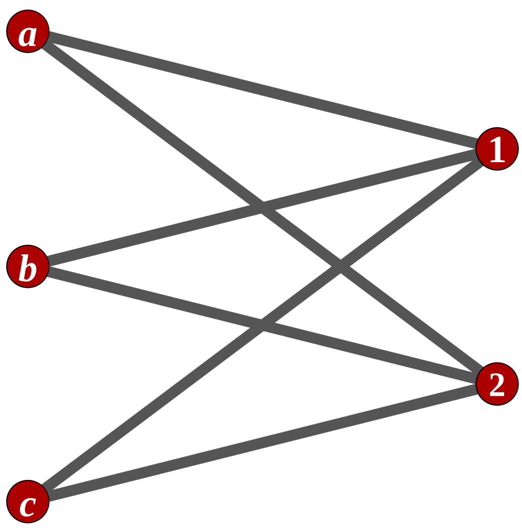
Teorem 9.21. Graf je bipartitan akko nema neparan ciklus.

Dokaz. Neka je graf bipartitan, odnosno postoje A i B iz definicije. Pretpostavimo da postoji neparan ciklus $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, gdje je $k \in 2\mathbb{N} - 1$. BSO možemo pretpostaviti da je $v_0 \in A$, sad je, redom, $v_1 \in B, v_2 \in A, v_3 \in B, \ldots, v_k \in B$, no $v_0 = v_k \Rightarrow\Leftarrow$
Obratno. Neka graf nema neparnih ciklusa. BSO možemo pretpostaviti da je graf povezan (u suprotnom se dokaz provodi za svaku komponentu povezanosti zasebno). Konstruirat ćemo skupove A i B.

Uzmimo neki $v \in V$, stavimo $A = \{v\}, B = \emptyset$
SVE DOK $A \cup B \neq V$ PONAVLJAJ
$\triangleright$ $\forall a \in A, \forall e = \{a, b\} \in E$
$B = B \cup \{b\}$
$\triangleright$ $\forall b \in B, \forall e = \{b, a\} \in E$
$A = A \cup \{a\}$

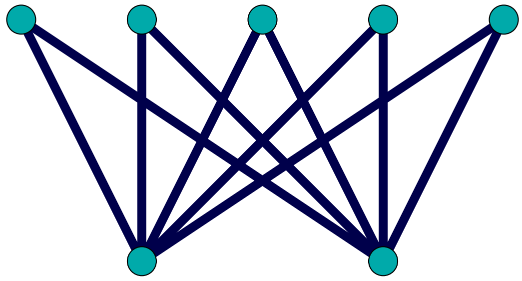
Jer je graf povezan i konačan, algoritam će u nekom trenutku stati. Pretpostavimo da postoji $w \in V$ takav da je $w \in A$ i $w \in B$. To znači da imamo šetnju neparne duljine (nije nužno put) koja počinje i završava u w, odnosno, da smo krenuvši od v nakon "prelaska" preko parno mnogo bridova došli do w, i stavili w u A, ali i da smo do w došli nakon neparno mnogo koraka, te stavili w u B. Slično kao kod **zadatka 9.7.** vidimo da je ta šetnja ili ciklus ili suma ciklusa, pa neki od tih ciklusa mora biti neparne duljine. $\Rightarrow\Leftarrow$ ∎

Primjer 9.10. Potpun bipartitan graf $\mathcal{K}_{n,m}, |A| = n, |B| = m$, svaki vrh iz A je spojen sa vrhom iz B, za $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ imamo $\mathcal{K}_{3,2}$

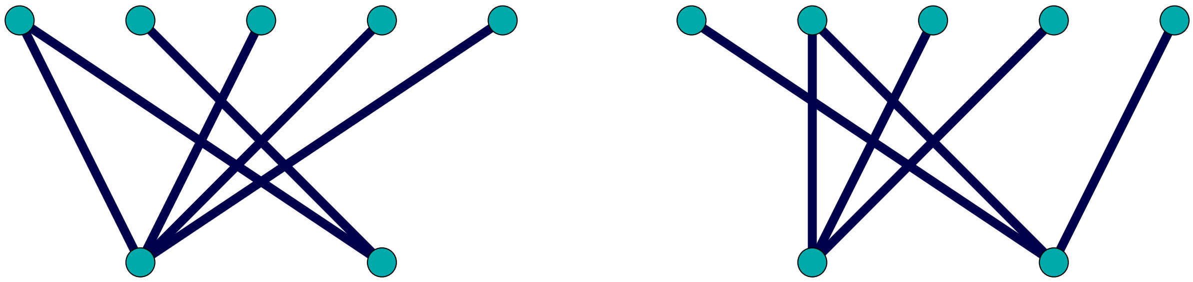


Zadatak 9.11. Odredite broj razapinjujućih stabala grafa $\mathcal{K}_{2,m}$.

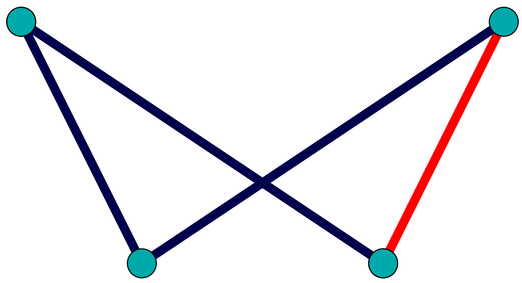
Rješenje. Graf $\mathcal{K}_{2,5}$ prikazan je na sljedećoj slici:



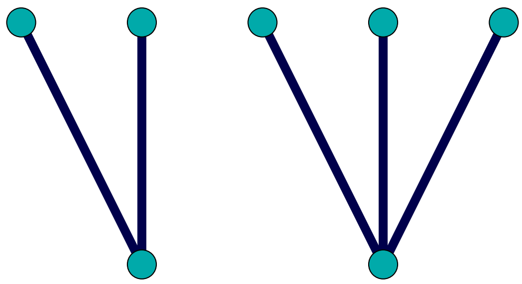
Neki od mogućih razapinjujućih stabala su



Kako je $|V| = |A| + |B| = 2 + m$ to razapinjujuće stablo ima $m + 1$ brid. Tvrdimo da je točno jedan vrh u B razapinjujućeg stabla stupnja 2, a ostali su listovi. Naime, nemoguća je situacija



jer bi imali ciklus, također kad bi svi vrhovi u B bili listovi, onda podgraf ne bi bio povezan



Vrh stupnja 2 biramo na m načina, za preostalih $m - 1$ vrhova iz B biramo jedan od 2 vrha u A s kojim je spojen, shodno tome:

$$\# = m \cdot 2^{m-1}$$

✓

Napomena 9.22. Zadatak je moguće riješiti i na način da primijetite da je proizvoljno mnogo od 1 do $m-1$ vrhova iz B spojeno sa jednim vrhom u A, i jedan od tih sa sa drugim u A, kao i ostali iz B, dakle:

$$\# = \sum_{k=1}^{m-1} k\binom{m}{k} = \sum_{k=1}^{m-1} k\frac{m}{k}\binom{m-1}{k-1} = m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k} = m \cdot 2^{m-1}$$

9.3 Težinski grafovi

Definicija 9.23. **Težinski graf** je par $(\mathcal{G}, \omega)$ gdje je $\mathcal{G} = (V, E)$ graf, a $\omega : E \to \mathbb{R}_0^+$ neka funkcija koju nazivamo **težinska funkcija**. Broj $\sum_{e\in E} \omega(e)$ nazivamo **težinom grafa**.

Prirodno se postavlja pitanje pronalaska minimalnog (u smislu težine) razapinjujućeg stabla.

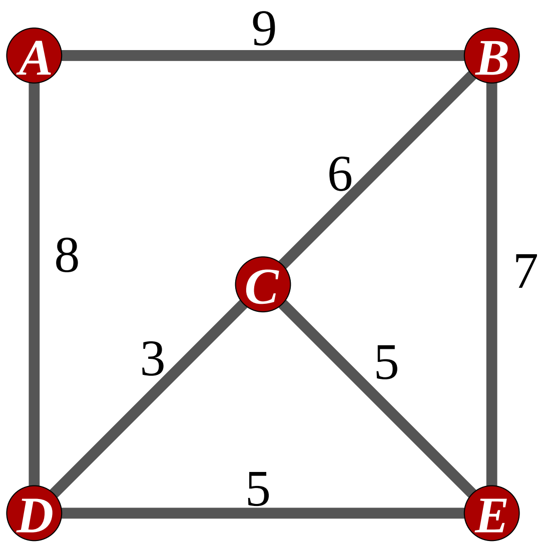
Kruskalov algoritam
Neka je $\mathcal{G} = (V, E)$ povezan graf ω nenegativna težinska funkcija na E.

Stavimo $S = \emptyset$
SVE DOK (V, S) nije povezan PONAVLJAJ
 $\triangleright$ODABERI brid $e \in E \setminus S$ minimalne težine, takav da $S \cup \{e\}$ nema ciklus
 $S = S \cup \{e\}$

Napomena 9.24. Kruskalov algoritam je primjer pohlepnog algoritma. Lokalno nalazi najbolju mogućnost.

Teorem 9.25. Kruskalov algoritam nalazi optimalno rješenje.

Zadatak 9.12. Nađite minimalno razapinjujuće stablo za težinski graf sa slike



Rješenje.

(1) $S = \emptyset$

(2) uzimamo brid najmanje težine, $S = \{CD\}$

(3) možemo uzeti DE ili CE

1° biramo DE, $S = \{CD, DE\}$

2° biramo CE, $S = \{CD, CE\}$

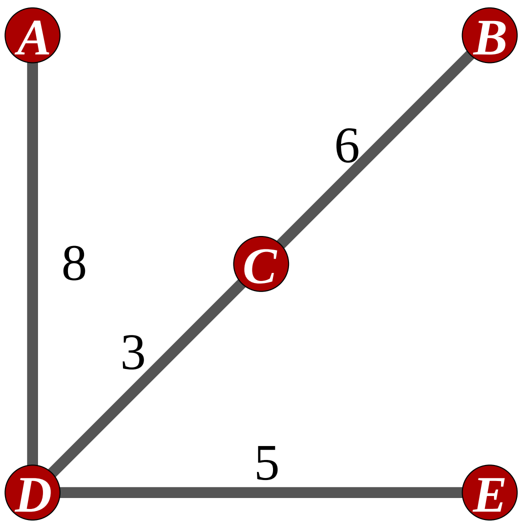
(4) 1° ne možemo uzeti CE pa uzimamo CB, $S = \{CD, DE, CB\}$

2° biramo CB, $S = \{CD, CE, CB\}$

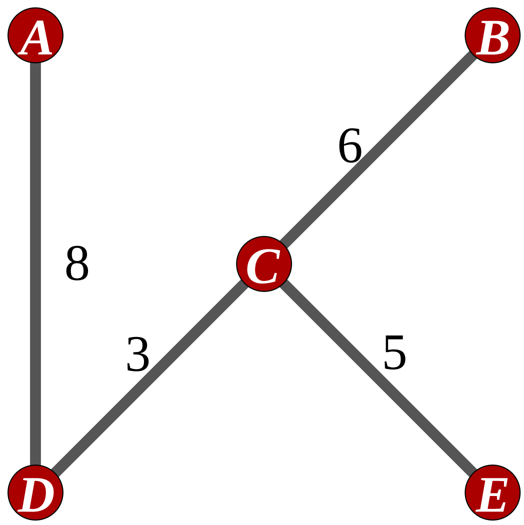
(5) 1° biramo AD, $S = \{CD, DE, CB, AD\}$

2° biramo AD, $S = \{CD, CE, CB, AD\}$

1. slučaj



2. slučaj



Kao što vidimo rješenje nije jedinstveno, i u oba slučaja imamo $\sum\limits_{v \in S} \omega(v) = 22$. ✓

Napomena 9.26. Ovaj algoritam ima veliku složenost, naime, teško je naći brid minimalne težine za koji nećemo dobiti ciklus. Poboljšana verzija je sljedeći algoritam.

Primov(-Jarníkov) algoritam
Neka je $\mathcal{G} = (V, E)$, $|V| = n$, povezan graf i ω nenegativna težinska funkcija ne E.

Odaberemo $v_0 \in V$ i definiramo $T = \{v_0\}, S = V \backslash \{v_0\}, F = \emptyset$
SVE DOK $|F| < n - 1$ PONAVLJAJ
$\triangleright$ODABERI brid $e = \{v, w\} \in E$ minimalne težine, takav da je $v \in T, w \in S$
$T = T \cup \{w\}, F = F \cup \{e\}, S = S \backslash \{w\}$

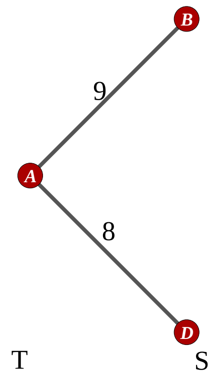
Zadatak 9.13. Riješite zadatak 9.12. na stranici 44 Primovim algoritmom polazeći od vrha A.

Rješenje.

(1)

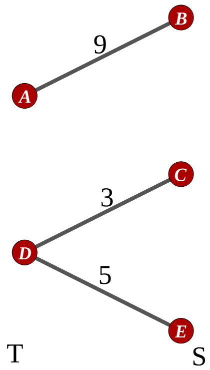
$$\begin{aligned} T &= \{A\} \\ F &= \emptyset \\ S &= \{B, C, D, E\} \end{aligned}$$

(2)



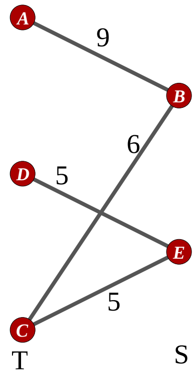
$$\begin{aligned} T &= \{A, D\} \\ F &= \{AD\} \\ S &= \{B, C, E\} \end{aligned}$$

(3)



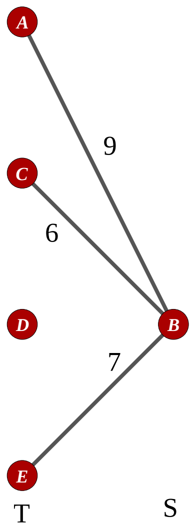
$$\begin{aligned} T &= \{A, C, D\} \\ F &= \{AD, DC\} \\ S &= \{B, E\} \end{aligned}$$

(4)



$$\begin{aligned} T &= \{A, C, D, E\} \\ F &= \{AD, DC, CE\} \\ S &= \{B\} \end{aligned}$$

(5)



$$\begin{aligned} T &= \{A, B, C, D, E\} \\ F &= \{AD, DC, CE, CB\} \\ S &= \emptyset \end{aligned}$$

U ovom smo slučaju dobili isto razapinjujuće stablo kao u 2. slučaju (na stranici 45) kod Kruskalovog algoritma. ✓

9.4 Planarnost grafa

Definicija 9.27. Graf je **planaran** ako se može nacrtati u ravnini $\mathbb{R}^2$ (*uložiti u ravninu* - svakom vrhu pridružiti točku, a svakom bridu neorijentiranu krivulju u $\mathbb{R}^2$) tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.

Teorem 9.28. Eulerova formula
Svako ulaganje povezanog planarnog grafa $\mathcal{G}$ s p vrhova i q bridova dijeli ravninu u r područja (koja nazivamo stranama) i vrijedi

$$p - q + r = 2$$

Definicija 9.29. *Stupanj područja* f je broj bridova koji ga omeđuju. Za stupanj područja koristimo oznaku $d(f)$.

Teorem 9.30. U povezanom planarnom grafu zbroj stupnjeva svih područja jednak je dvostrukom broju bridova, tj.

$$\sum_{f \in F} d(f) = 2 \cdot |E|$$

Zadatak 9.14. Dokaži da jednostavan, povezan, planaran graf s n vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova.

Rješenje. Iz toga što je graf jednostavan, zaključujemo da vrijedi $d(f) \geq 3, \forall f \in F$.

$$2 \cdot |E| = \sum_{f \in F} d(f) \geq 3 \cdot |F| \Rightarrow |F| \leq \frac{2}{3}|E|$$

Uvrstivši to u Eulerovu formulu, dobivamo

$$2 + |E| = |V| + |F| \leq n + \frac{2}{3}|E|$$

$$\frac{1}{3}|E| \leq n - 2 \Rightarrow |E| \leq 3n - 6$$

✓

Postavlja se pitanje: jesu li potpuni grafovi ($\mathcal{K}_n$) planarni?

Lako vidimo da su $\mathcal{K}_3$ i $\mathcal{K}_4$ planarni, ali za $\mathcal{K}_5$ se na prvi pogled ne vidi kako ga uložiti u ravninu. Pokušajmo zato dokazati da nije planaran. (Ako bismo to dokazali, slijedilo bi da $\mathcal{K}_n, n \geq 5$ nije planaran. Naime, svi potpuni grafovi s više od pet vrhova sadrže $\mathcal{K}_5$ kao podgraf.)

Zadatak 9.15. Dokaži da $\mathcal{K}_5$ nije planaran.

Rješenje.

$$|V| = 5, |E| = \binom{5}{2} = 10$$

Ako bi graf bio planaran, broj bridova $|E|$ bi, prema prethodnom zadatku, morao biti manji od $3 \cdot 5 - 6 = 9$. Kontradikcija. ✓

Pogledajmo možemo li nešto zaključiti o grafu $K_{3,3}$ koristeći tvrdnju zadatka 9.14. Znamo da $K_{3,3}$ ima 6 vrhova i $3 \cdot 3 = 9$ bridova pa je uvjet zadatka 9.14 ispunjen jer $9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$. Ipak, kako je uvjet zadatka 9.14 samo **nužan**, a ne i **dovoljan** uvjet, trenutno o grafu $K_{3,3}$ ne možemo ništa zaključiti. Međutim, možemo prilagoditi tvrdnju zadatka 9.14 za bipartitne grafove.

Zadatak 9.16. Dokaži da jednostavan, povezan, planaran i bipartitan graf s n vrhova ima najviše $2n - 4$ bridova.

Rješenje. Graf je bipartitan ako i samo ako nema ciklus neparne duljine pa je $d(f) \geq 4, \forall f \in F$. Dalje vrijedi

$$2 \cdot |E| = \sum_{f \in F} d(f) \geq 4 \cdot |F| \Rightarrow |F| \leq \frac{|E|}{2}$$

$$2 + |E| = |V| + |F| \leq n + \frac{|E|}{2} \Rightarrow |E| \leq 2n - 4$$

✓

Primjer 9.17. Vratimo se na graf $K_{3,3}$ i provjerimo uvjet iz prethodnog zadatka: $9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$. Uvjet nije ispunjen pa zaključujemo da graf $K_{3,3}$ nije planaran.

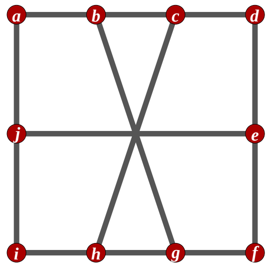
Zadatak 9.18. Svaka od tri novoizgrađene kuće mora se spojiti s priključnim mjestima za vodovod, plinovod i telefonsku mrežu. Svi kabeli moraju biti na istoj dubini i ne smiju se presijecati. Kako je to moguće učiniti?

Rješenje. Nikako. Promatrajmo kuće i priključna mjesta kao vrhove, a kabele kao bridove grafa. Šest je vrhova, a bridova bi moralo biti devet (iz svake *kuće* po tri). Ali, prema prethodnom zadatku, bridova je najviše $2 \cdot 6 - 4 = 8$. ✓

Definicija 9.31. **Subdivizija brida** $\{A, B\}$ je dodavanje u graf vrh C i zamjena brida $\{A, B\}$ bridovima $\{A, C\}$ i $\{C, B\}$. **Subdivizija grafa** $\mathcal{G}$ je graf $\mathcal{H}$ dobiven rekurzivnom subdivizijom bridova polaznog grafa.

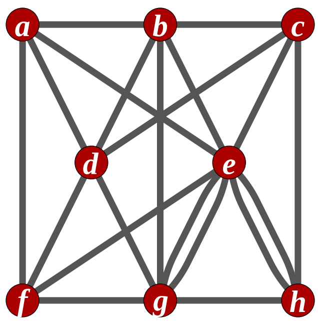
Teorem 9.32. (**Kuratowski**)
Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži subdiviziju od $\mathcal{K}_5$ ili subdiviziju od $\mathcal{K}_{3,3}$.

Zadatak 9.19. Odredite je li graf na slici planaran.



Rješenje. Promatramo možemo li brisanjem nekih vrhova stupnja dva doći do $\mathcal{K}_{3,3}$ ili $\mathcal{K}_5$ (tada se možemo pozvati na teorem Kuratowskog). Uklonimo li vrhove a, d, i i f dobivamo zaista $\mathcal{K}_{3,3}$ i zato je graf neplanaran. ✓

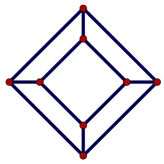
Zadatak 9.20. Odredite je li graf na slici planaran.



Rješenje. Nađite podgraf koja izomorfan sa $K_{3,3}$. ✓

9.5 Arhimedova tijela

Definicija 9.33. Tijelo nazivamo **Arhimedovim** ako je svaki vrh istog stupnja i istog tipa (tj. tijelo je jednako sa svih strana) te ako su strane tijela dvije vrste pravilnih mnogokuta (stupanj vrha je broj bridova koji iz njega *izlaze*).

Napomena 9.34. Svakom tijelu možemo pridružiti graf. Tijelo *spljoštimo* u ravninu tako da crtamo što vidimo gledajući kroz gornju plohu. Odatle i naziv *strane* za područja u grafu (vidi Tm. 9.25 na stranici 46). Na primjer, kocka predstavljena grafom izgleda ovako 

Zadatak 9.21. Odredi sva Arhimedova tijela čije su stranice pravilni peterokuti i šesterokuti.

Rješenje. Označimo s n broj peterokuta, a s m broj šesterokuta. Stupanj svakog vrha je tri (kad bi bio više od tri, najmanji moguć zbroj kuteva je $4 \cdot 108^o > 360^o$). Kako je tijelo simetrično, svi su vrhovi isti: u njima se sastaju ili dva peterokuta i šesterokut; ili dva šesterokuta i peterokut. Vrlo brzo se vidi da prvi slučaj otpada. Vrijedi, dakle, $|V| = 5 \cdot n = 6 \cdot \frac{m}{2}$. Nadalje, imamo

$$\sum_{v \in V} d(v) = 3|V| = 2|E| = \sum_{f \in F} d(f) = 5n + 6m\,,$$

te $|F| = n + m$. Iz Eulerove formule slijedi:

$$\begin{gathered} 2 + |E| = |F| + |V| \\ 2 + \frac{5n+6m}{2} = n + m + \frac{5n+6m}{3} \\ \Rightarrow n = 12, m = 20 \end{gathered}$$

Radi se zapravo o staromodnoj lopti ili o modelu molekule fulerena C_{60}. 

✓

9.6 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Definicija 9.35. *Eulerova staza* u grafu je staza koja uključuje svaki brid grafa. Ako je zatvorena, naziva se *Eulerovom turom*. Graf u kojem postoji Eulerova tura je **Eulerov graf**.

Teorem 9.36. Multigraf je Eulerov ako i samo ako je povezan i svaki vrh je parnog stupnja. Multigraf ima nezatvorenu Eulerovu stazu ako i samo ako je povezan i ima točno dva vrha neparnog stupnja.

Definicija 9.37. Hamiltonov put je put koji prolazi kroz sve vrhove grafa. Zatvoren Hamiltonov put nazivamo *Hmiltonovim ciklusom*, a graf u kojem postoji Hamiltonov ciklus **Hamiltonov graf**.

Lema 9.38. Ukoliko u Hamiltonovom grafu postoji vrh stupnja dva, tada oba brida s njim incidentna moraju biti dio Hamiltonovog ciklusa.

Dokaz. Predstavimo Hamiltonov ciklus kao (orijentiran, kružni) slijed vrhova $v_1, v_2, \cdots v_n, v_1$. Vrh v_i ima prethodnika i sljedbenika. Dakle, za svaki vrh,točno dva brida incidentna s njim dio su Hamiltonovog ciklusa. Ako je v_i stupnja dva, to su i jedina dva brida koja iz njega *izlaze*. ■

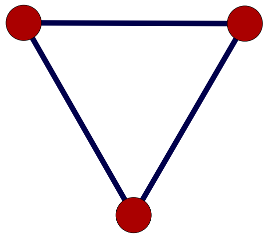
Teorem 9.39. (Ore)
Dan je graf $\mathcal{G}$ s $n \geq 3$ vrhova. Ukoliko za svaka dva nesusjedna vrha u $\mathcal{G}$ vrijedi da je suma njihovih stupnjeva veća ili jednaka n, graf je Hamiltonov.

Teorem 9.40. (Dirac)
Dan je graf $\mathcal{G}$ s $n \geq 3$ vrhova. Ukoliko je svaki vrh stupnja barem $\frac{n}{2}$, graf je Hamiltonov.

U sljedećim zadatcima provjeri postoje li:

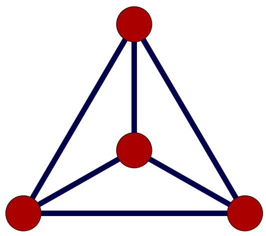
1. Eulerova tura
2. Eulerova staza
3. Hamiltonov ciklus

Zadatak 9.22.



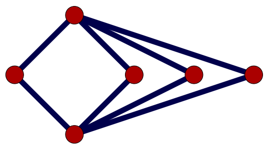
Rješenje. DA, DA, DA ✓

Zadatak 9.23.



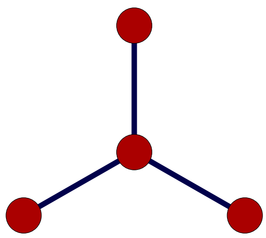
Rješenje. Stupanj svakog vrha je tri $\Rightarrow$ ne postoje Eulerova staza ni Eulerova tura. Hamiltonov ciklus postoji. ✓

Zadatak 9.24.



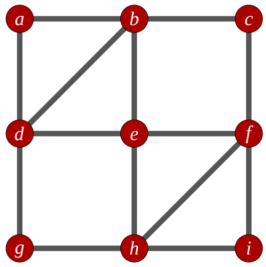
Rješenje. Stupanj svakog vrha je paran: graf jest Eulerov. Ipak, nije Hamiltonov.(**Lema 9.38.** povlači da bi svi bridovi trebali biti uključeni u ciklus H, ali tada imamo vrhove sa $d_H(v) = 4$.) ✓

Zadatak 9.25.



Rješenje. Graf nije ni Eulerov ni Hamiltonov ✓

Zadatak 9.26.

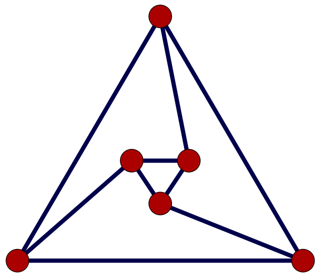


Rješenje. Eulerova tura ide po vrhovima:

$$a - b - c - f - i - h - g - d - e - f - h - e - b - d - a$$

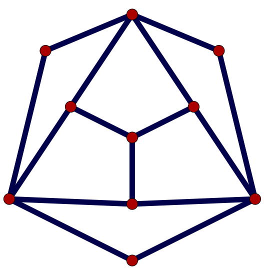
Tvrdimo da ne postoji Hamiltonov ciklus. Ako postoji vrh stupnja dva, tada se, prema **Lemi 9.38.** u Hamiltonovom ciklusu moraju pojaviti oba brida incidentna s tim vrhom. Promatramo vrh a. Bez smanjenja općenitosti, krenemo od a do b. Sada moramo u c (jer je stupnja dva) i zatim u f. Sada moramo u i pa u h. Nakon toga je jasno da ne možemo obići oba vrha g i e i vratiti se u a. ✓

Zadatak 9.27.

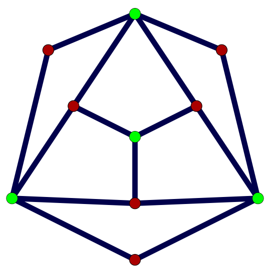


Rješenje. Graf nije Eulerov (više od dva vrha su neparnog stupnja), ali, prema Diracovom uvjetu, jest Hamiltonov. ✓

Zadatak 9.28.



Rješenje. Graf nije Eulerov (više od dva vrha su neparnog stupnja). Primjetimo da se radi o bipartitnom grafu i da je $|A| = 4, |B| = 6$ pa zato (kao što će biti dokazano u sljedećoj lemi) nije Hamiltonov.



✓

Lema 9.41. Za bipartitan i Hamiltonov graf, čiji je skup vrhova V particioniran u skupove A i B, vrijedi $|A| = |B|$.

Dokaz. Neka je $a_1, a_2 \cdots a_n, a_1$ Hamiltonov ciklus i neka je $a_i \in A$, i neparan te $a_i \in B$, za i paran. $\Rightarrow n$ je paran, a kako se vrhovi iz A i oni iz B redaju naizmjence, $|A| = |B|$. ■

Zadatak 9.29. Dokaži da je graf s n vrhova i barem $\binom{n-1}{2} + 2$ brida Hamiltonov.

Rješenje. Pokazat ćemo da su zadovoljeni uvjeti Oreovog teorema. Promatrajmo neka dva nesusjedna vrha A i B. Neka je $\mathcal{G}'$ dobiven od $\mathcal{G}$ izbacivanjem A i B i svih njihovih bridova.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{2} + 2 &\leq |E| \\ &= |E'| + d(a) + d(b) \\ &\leq |K_{n-2}| + d(a) + d(b) \\ &= \binom{n-2}{2} + d(a) + (b)\end{aligned}$$

$$d(a) + d(b) \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = n$$

✓

Zadatak 9.30. Miš gricka put kroz 3×3 kocku sira grickajući svih 27 1×1 kockica. Ako miš počne grickati u kutu i uvijek se pomiče za po jednu susjednu kockicu, može li na kraju doći u sredinu? (Susjedne su kockice one koje dijele jednu stranu.)

Rješenje. Opišimo problem pomoću grafa: 27 vrhova (svakoj gradivnoj kockici odgovara jedan), a bridovi postoje između onih koje predstavljaju susjedne kockice. Ako s v_1 označimo vrh koji odgovara kockici u kutu, a s v_k vrh koji odgovara onoj u sredini, sveli smo problem na traženje Hamiltonovog puta u grafu, s rubnim točkama v_1 i v_k. Obojimo vrhove crno-bijelo, tako da su susjedni vrhovi različite boje (to je moguće, u grafu nema neparnog ciklusa!) i pretpostavimo da Hamiltonov put postoji. On je se sastoji od 27 vrhova i 26 bridova, sastavljen naizmjence od crnih i bijelih vrhova. To znači da bi početni i krajnji vrh tog puta trebali biti iste boje, a nije tako. Kontradikcija. ✓

Zadatak 9.31. Na poslovnoj večeri našlo se dvanaest Sicilijanaca iz jedne obitelji. Svaki od njih ima barem šest prvih rođaka među preostalom jedanaestoricom. Dokaži da oni mogu sjesti za okrugli stol tako da se svaki nalazi između dva svoja prva rođaka.

Rješenje. Neka su vrhovi Sicilijanci, a bridovi povučeni između prvih rođaka. Želimo dokazati da u takvom grafu postoji Hamiltonov ciklus. $d(v) \geq 6, \forall v \in V$. To znači da su zadovoljeni uvjeti Diracovog teorema i da Hamiltonov ciklus postoji. ✓

Zadatak 9.32. Dokaži da se za svaki neparan n veći ili jednak tri bridovi potpunog grafa $\mathcal{K}_n$ mogu prekriti s $\frac{n-1}{2}$ Hamiltonovih ciklusa bez zajedničkih bridova.