Poglavlje 1

Euklidske konstrukcije

1.1 Aksiomi konstruktivne geometrije

A1 Svaka zadana figura je konstruirana.

A2 Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda je konstruirana i njihova unija.

A3 Ako su konstruirane dvije figure, onda se može ustanoviti je li njihova razlika prazan skup ili nije. U slučaju da ta razlika nije prazan skup, ta je razlika konstruirana.

A4 Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda se može ustanoviti je li njihov presjek prazan skup ili nije. U slučaju da taj presjek nije prazan skup, onda je taj presjek konstruirana.

A5 Ako je dana neka neprazna figura, onda je moguće konstruirati točku koja pripada toj figuri.

Aksiomi instrumenata obuhvaćaju sljedeće aksiome

Aksiom ravnala Ravnalom se mogu izvršiti sljedeće konstrukcije:

1. konstrukcija dužine ako su dani krajevi te dužine
2. konstrukcija polupravca s danom početnom točkom koji prolazi kroz drugu danu točku
3. konstruirati pravac kroz dvije dane točke

Aksiom šestara Šestarom se mogu izvršiti sljedeće konstrukcije:

1. konstrukcija kružnice ako je dano središte i njen polumjer
2. konstrukcija bilo kojeg od dva luka kružnice određenih s dvije točke kružnice ako je dano središte kružnice i krajnje točke toga luka

Navedeni aksiomi omogućavaju da se izvedu tzv. **fundamentalne konstrukcije**.

1.2 Konstruktivna zadaća

Kod **konstruktivne zadaće** treba konstruirati neku figuru s danim instrumentima ako je dana druga figura i opisani odnosi između elemenata dane i tražene figure.

Rješenje konstruktivne zadaće je svaka figura koja zadovoljava tražene uvjete, a opisuje se nizom fundamentalnih konstrukcija. Konstruktivna zadaća može biti:

- određena - konačno mnogo rješenja
- neodređena - beskonačno mnogo rješenja
- nemoguća - nema rješenja (npr. upisati kružnicu danom pravokutniku)
- preodređena - ima rješenja, ali pri konstrukciji nije korišten neki od danih uvjeta

Konstruktivna zadaća je *elementarno rješiva* ako je rješiva našim fundamentalnim konstrukcijama tj. ravnalom i šestarom. Rješenje konstruktivne zadaće treba se sadržavati sljedeće:

Analiza zadaće - traženje načina za rješavanje zadaće, ispituju se veze između dane i tražene figure.

Konstrukcija - na temelju analize konstruira se rješenje

Dokaz - pokazuje se da dobivena figura zadovoljava sve uvjete zadaće i da je svaki korak u konstrukciji moguć

Diskusija - ispituju se **svi** međusobni položaji danih elemenata koji mogu doći u obzir

Postoje tri metode za rješavanje konstruktivnih zadaća. To su algebarska metoda, metoda presjeka (ili metoda geometrijskih mjesta) i metoda transformacije. Mi ćemo se baviti prvim dvjema metodama. No, prije toga promotrimo zadaće koje smatramo elementarnima i ponovimo osnovne konstrukcije trokuta.

1.2.1 Elementarne zadaće

Prijenos dužina. Zadana je jedna dužina $\overline{AB}$ i jedan polupravac CX. Nanesite na polupravac CX od početne točke C, dužinu CD koja je jednaka dužini $\overline{AB}$.

Prijenos kuteva. Dan je kut $\measuredangle XOY$ i polupravac $O'X'$. S jedne određene strane zrake $O'X'$ treba konstruirati kut $\measuredangle X'O'Y'$ tako da bude jednak danom kutu $\measuredangle XOY$.

Konstrukcija simetrale i polovišta. Dana je dužina $\overline{AB}$. Treba konstruirati simetralu (os) te dužine te njeno polovište.

Konstrukcija simetrale kuta i polovišta kuta. Za dani kut $\measuredangle XOY$ treba konstruirati njegovu simetralu.

Konstrukcija paralele s danim pravcem kroz danu točku. Za dani pravac a i točku P koja ne leži na pravcu a treba konstruirati jednoznačno određeni pravac p koji prolazi točkom P i paralelan je s danim pravcem.

Konstrukcija okomice iz dane točke na dani pravac. Neka je dana točka P i pravac a. Treba konstruirati pravac n koji prolazi točkom P, a okomit je na pravac a.

1. Dana točka P leži na danom pravcu a.

2. Dana točka P ne leži na danom pravcu a.

Dijeljenje dužine na jednake dijelove. Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i prirodni broj n. Treba podijeliti dužinu na n jednakih dijelova.

Dijeljenje dužine u danom omjeru. Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i omjer prirodnih brojeva $m : n$. Treba podijeliti dužinu u omjeru $m : n$.

1. Dijelimo $\overline{AB}$ u danom omjeru izvana.

2. Dijelimo $\overline{AB}$ u danom omjeru iznutra.

Konstrukcija točaka iz kojih se dana dužina vidi pod danim kutom. Neka je dana je dužina $\overline{AB}$ i kut $\measuredangle XSY$. Treba konstruirati kružni luk tako da je $\measuredangle XSY$ obodni kut tetive $\overline{AB}$.

1.2.2 Osnovne konstrukcije trokuta

SSS Dane su duljine triju dužina. Tri dužine a, b, c mogu biti stranice nekog trokuta ako zadovoljavaju nejednakosti trokuta:

$$a < b + c, \quad b < a + c\ , \quad c < a + b$$

SKS Dane su duljine dviju stranica i kut među njima.

KSK Dana je duljina jedna stranice i dva priležeća kuta. Dva dana kuta α i β moraju zadovoljavati uvjet $\alpha + \beta < 180°$.

Pravokutni trokut Zadane su duljine hipotenuze i katete. Rješenje daje dva trokuta $\triangle\ ABC$ i $\triangle\ A'B'C'$ ali su oni sukladni pa zadaća ima jedno rješenje.

SSK Dana je duljina dviju stranica a i c i kut nasuprot veće ϕ. Ovdje je potrebna nešto detaljnija diskusija.

1. $a > c$
2. $c > a$
   (a) Za $\phi < 90°$ i $a > |BK|$ postoje dva rješenja, $\triangle\ ABC$ i $\triangle\ ABC'$.
   (b) Za $\phi < 90°$ i $a = |BK|$ postoji samo jedno rješenje - pravokutan trokut ABK
   (c) Za $a < |BK|$ nema rješenja
3. $c = a$ Za $\phi < 90°$ i $a > |BK|$ postoji samo jedno rješenje - jednakokračan trokut.

Drugim riječima:

Neka je $\phi < 90°$. Za $a \geq c$ i $c > a \geq |BK|$ postoji rješenje.

Neka je $\phi > 90°$. Za $a > c$ postoji točno jedno rješenje.

Prve četiri osnovne konstrukcije trokuta smatramo elementarnim zadaćama i smijemo ih koristiti u opisima konstrukcija konstruktivnih zadaća.

1.3 Algebarska metoda

Kod ove metode tražena se veličina najprije izračuna, a potom konstruira. Pri konstrukciji smijemo koristiti sljedeće konstrukcije algebarskih izraza.

- $x = a + b$

- $x = a - b$

- $x = n \cdot a$ za $n \in N$

- $x = \frac{a}{n}$ za $n \in N$ dijeljenje dužine na n jednakih dijelova (opisano među elementarnim konstrukcijama)
- $x = \frac{m}{n} \cdot a$ za $m, n \in N$ dužinu podijelimo na n j ednakih dijelova i to što dobijemo nanesemo n puta na dani pravac
- $x = \frac{ab}{c}$ *konstrukcija četvrte proporcionale*

- $x = \frac{a^2}{c}$ prethodni slučaj, samo uzmemo $b = a$
- $x = \sqrt{ab}$ geometrijska sredina

- $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ za $a > b$

Zadaci.

1. Dane su dužine a i b. Konstruirajte dužinu duljine $\sqrt[4]{a^4 - b^4}$.

2. Dana je dužina a. Konstruirajte dužinu $x = a\sqrt{35}$ cm i $x = a\sqrt{29}$ cm.

3. Dani su paralelni pravci a, b, i c. konstruirajte jednakostranični trokut ABC takav da je $A \in a$,$B \in b$ i $C \in c$.

4. U dani kut upišite kružnicu koja prolazi danom točkom i dira krakove kuta.

5. Dane su dvije koncentrične kružnice. Konstruirajte krug čija je površina jednaka površini prstena određenog dvjema danim kružnicama.

6. Dan je trokut. Konstruirajte kvadrat iste površine.

7. Dan je trokut. Konstruirajte paralelu s osnovicom trokuta tako da ona dijeli trokut na dva dijela jednake površine.

8. Dan je trokut ABC. Oko njegovih vrhova treba opisati kružnice koje se u parovima dodiruju izvana.

9. **"Malfattijev problem"** U dani trokut upišite tri kružnice od kojih svaka dira dvije stranice trokuta i preostale dvije kružnice.

1.4 Metoda geometrijskih mjesta (metoda presjeka)

Definicija. *Geometrijsko mjesto točaka je skup svih točaka (ravnine) koje zadovoljavaju neki uvjet.*

1. Geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od dvije dane točke A i B.

2. Geometrijsko mjesto točaka udaljenih za konstantnu duljinu d od dane točke 0.

3. Geometrijsko mjesto točaka udaljenih za d od danog pravca.

4. Geometrijsko mjesto točaka udaljenih za d od dane kružnice k.

5. Geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od dvaju danih pravaca

6. Geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dana dužina vidi pod pravim kutem.

7. Geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dana dužina vidi pod kutem α.

8. Geometrijsko mjesto točaka iz kojih se kružnica vidi pod kutem α.

9. Geometrijsko mjesto točaka za koje razlika kvadrata udaljenosti od točaka A i B iznosi q.

10. Geometrijsko mjesto točaka za koje je omjer udaljenosti od točaka A i B jednak $p : q$.

Napomena. Uvjet da se dvije kružnice $k(O_1, r_1)$ i $k(O_2, r_2)$ sijeku je

$$|r_1 - r_2| \leq |O_1O_2| \leq r_1 + r_2.$$

Dvije kružnice se dodiruju ako vrijede jednakosti.

Zadaci.

1. Konstruirajte trokut ABC ako je zadano $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{CD}| = t_c$ pri čemu je D polovište dužine $\overline{AB}$ i $\gamma = \measuredangle ACB$ $(\gamma < 90°)$.

2. Konstruirajte trokut ABC ako je dana duljina c stranice $\overline{AB}$, duljina t_c pripadne težišnice i omjer $p : q$ $(p > q)$ stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.

3. Konstruirajte kružnicu $k(O, r)$ kojoj je zadan polumjer r te koja dira danu kružnicu $k_1(O_1, s_1)$, a na danoj kružnici $k_2(O_2, s_2)$ odsijeca tetivu duljine d.

4. Dana je točka A na pravcu a i točka P izvan pravca a. Konstruirajte kružnicu koja prolazi točkom P i dira a u A.

5. Konstruirajte paralelogram $ABCD$ ako je zadan $\alpha = \measuredangle DAB$, $d = |AB| + |BC|$ te visina v na $\overline{AB}$.

Poglavlje 2

Izometrije euklidske ravnine

2.1 Osna i centralna simetrija

Definicija Izometrija euklidske ravnine je svaka bijekcija $f : E^2 \to E^2$ ravnine na sebe tako da za svake dvije točke A i B vrijedi

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B)$$

gdje je $d(T_1, T_2)$ udaljenost točaka T_1 i T_2.
Definicija Kažemo da je izometrija f involutorna ako je $f \circ f = \mathrm{id}$, ali je $f \neq \mathrm{id}$.
Definicija Involutornu izometriju kod koje su sve točke pravca a fiksne zovemo osna simetrija s osi a ili simetrija s obzirom na pravac a. Označavamo ju sa s_a.
Definicija Involutornu izometriju kod koje su svi pravci kroz točku A fiksni zovemo centralna simetrija s centrom A ili simetrija s obzirom na točku A. Označavamo ju sa s_A.

Zadaci.

1. Dan je pravac a i točke B i C s iste strane toga pravca. Konstruirajte točku A na pravcu a tako da polupravci AB i AC tvore jednake kuteve s pravcem a.

2. Dan je pravac a i točke B i C s iste strane toga pravca. Konstruirajte točku A na pravcu a tako da $\sphericalangle(AB, a) = 2 \cdot \sphericalangle(AC, a)$.

3. Dani su pravci d, e, i f koji prolaze istom točkom. Konstruirajte trokut ABC tako da su mu dani pravci simetrale kutova.

4. Konstruirajte četverokut $ABCD$ kojemu dijagonala AC raspolavlja kut kod vrha A ako su mu dane duljine stranica $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ i $|DA| = d$.

5. Dana je kružnica k, točka A i pravac p. Konstruirajte pravac q koji prolazi kroz A, a siječe k i p u točkama B i C tako da je A polovište od $\overline{BC}$.

6. Dane su kružnice k_1 i k_2 sa zajedničkom točkom A. Kroz A konstruirajte pravac p kojemu tetive u kružnicama k_1 i k_2 imaju jednake duljine.

2.2 Translacije i rotacije

Napomena. Trokut je određen s tri podatka, a četverokut s pet podataka.

Zadaci.

1. Dane su kružnice k_1 i k_2, pravac p i dužina a. Konstruirajte pravac paralelan s p tako da za sjecišta A, B tog pravca s kružnicama k_1 i k_2 vrijedi $|AB| = a$.

2. Na raznim stranama rijeke stalne širine nalaze se naselja A i B. Kako treba sagraditi most na rijeci (okomit na rijeku) tako da put od naselja A do naselja B bude najkraći?

3. Dane su kružnice k_1 i k_2 te pravac p. Konstruirajte pravac paralelan s p tako da su tetive kružnica k_1 i k_2 određene tim pravcem jednake.

4. Dani su paralelni pravci a, b i c. Konstruirajte jednakostranični trokut ABC takav da je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$.

5. Dane su točke $B_1, B_2, \ldots, B_n$ i kutevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ manji od 180°. Treba konstruirati n-terokut $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tako da su trokuti $\triangle\ A_1A_2B_1, \triangle\ A_2A_3B_2, \ldots, \triangle\ A_nA_1B_n$ jednakokračni s kutevima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pri vrhovima $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

2.3 Klizna simetrija

Definicija. Izometriju koja se može predočiti u obliku $s_g \circ s_a \circ s_b$ gdje je $g \perp a, b$ zovemo kliznom simetrijom s osi g.

Zadaci.

1. Dan je pravac p, točke A i B s iste strane toga pravca i dužina a. Na pravcu p konstruirajte točke C i D tako da je $|CD| = a$ i da je suma duljina $|AC| + |CD| + |DB|$ minimalna.

Poglavlje 3

Homotetija i inverzija

3.1 Homotetija

Definicija. Dana je točka O i neki broj $k \neq 0$. Homotetija s centrom O i koeficijentom k je preslikavanje skupa točaka ravnine na sebe tako da

1. $O \mapsto O$
2. za svaku točku $T \neq O$ je $T \mapsto T'$ tako da su točke T, T' i O kolinearne, a za orijentirane dužine $\overrightarrow{OT}$ i $\overrightarrow{OT'}$ vrijedi
$$\frac{\overrightarrow{OT'}}{\overrightarrow{OT}} = k \ .$$
Za $|k| > 1$ homotetiju zovemo rastezanje, a za $|k| < 1$ stezanje.

Za $k = 1$ homotetija je identiteta, a za $k = -1$ radi se o centralnoj simetriji sa centrom O.
Svaka figura $\mathcal{F}$ i njena slika $\mathcal{F}'$ su slične.

$$\begin{array}{rcl} \text{Točka} & \mapsto & \text{Točka} \\ \text{Pravac} & \mapsto & \text{Paralelan pravac} \\ \text{Dužina} & \mapsto & \text{Dužina} \\ \text{Kružnica} & \mapsto & \text{Kružnica} \\ & \ldots & \end{array}$$

Zadaci.

1. U dani $\triangle ABC$ upišite $\triangle DEF$ tako da bude $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{CA}$ i $F \in \overline{AB}$ i da su stranice EF, FD i DE paralelne danim pravcima d, e i f.

2. Konstruirajte kružnicu koja prolazi danom točkom A i dira dva dana neparalelna pravca b i c.

Napomena.
Ako su pravci b i c iz prethodnog zadatka paralelni, konstruiramo kružnicu koja ih dodiruje (središte joj je na pravcu jednako udaljenom od pravaca b i c). Neka je O

središte te kružnice. Kroz danu točku A konstruiramo pravac paralelan sa b. Taj pravac konstruiranu kružnicu siječe u A_1 i A_2. Sada središte te kružnice translatiramo za A_1A (ili A_2A). Tražena kružnice je $k(O', \overline{O'A})$ pri čemu je $O' = t_{A_2A}(O)$. Za domaću zadaću, provedite ovako opisanu konstrukciju.
Zadaci.

3. U dani $\triangle ABC$ upišite kvadrat kojemu dva susjedna vrha leže na stranici $\overline{BC}$, a po jedan vrh na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

4. Konstruirajte trokut kojemu su dani kutevi i opseg.

5. Konstruirajte trokut $\triangle ABC$ kojemu su po znate duljine visina h_a,h_b i h_c.

3.2 Potencija točke obzirom na kružnicu. Potencijala dviju kružnica.

Definicija. Konstantni produkt

$$|TA| \cdot |TB| = |OT|^2 - r^2$$

zove se potencija točke T obzirom na kružnicu $k(O, r)$, u oznaci $p(k, T)$.
Ovisno o tome je točka T unutar kružnice, izvan nje ili na kružnici k, bit će $p(k, T)$ negativno, pozitivno ili jednako nuli.

Definicija. Dane su kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Skup svih točaka s jednakim potencijama s obzirom na kružnice k_1 i k_2 zovemo potencijalom ili radikalnom osi kružnica k_1 i k_2.
Zadatak.

1. Dane su dvije kružnice k_1 i k_2 koje nemaju zajedničkih točaka. Konstruirajte njihovu potencijalu.

3.3 Inverzija

Definicija. Dana je točka O i realni broj p. Inverzija $i[O, p]$ je preslikavanje skupa točaka ravnine E^2 na sebe tako da za bilo koju točku A različitu od O stavljamo $i(A) = A'$ pri čemu je $A' \in OA$ takva da je

$$OA \cdot OA' = p\ .$$

Točka O je središte inverzije i, a broj p potencija inverzije i.
Definicija. Za $p > 0$ kažemo da je $i[O, p]$ hiperbolička inverzija, a za $p < 0$ kažemo da je $i[O, p]$ eliptička inverzija. Ako je $p > 0$ potencija inverzije i, onda broj $r = \sqrt{p}$ zovemo polumjer inverzije i.

Za $p = 0$ inverzija i nije bijekcija pa se tim slučajem nećemo baviti.

Definicija. Par točaka A, A' koje su jedna drugoj slika pri inverziji i zovemo inverznim točkama obzirom na inverziju i.
Zadatak.

1. Dana je kružnica $k(O, r)$ i točka A. Konstruirajte točku A' koja je inverzna točki A obzirom na kružnicu k. (Uputa: za inverziju i je središte O, a radijus r.)

Teorem. Neka su A, A' i B, B' dva para pridruženih točaka inverzije s centrom O. Tada je $AA'BB'$ tetivni četverokut i vrijedi

$$\measuredangle OAB = \measuredangle OB'A' , \quad \measuredangle OBA = \measuredangle OA'B' .$$

Zadatak.

2. Dan je centar O i par točaka A, A' pridruženih inverziji i. Konstruirajte sliku B' dane točke B po toj inverziji.

Napomena:

i Neka je $i[O, r^2]$ inverzija obzirom na kružnicu $k(O, r)$. Uočimo da su točke koje pripadaju kružnici k fiksne za inverziju i. Slika kvadrata upisanog kružnici $k(O, r)$ jest:

ii Slika pravca koji ne prolazi središtem inverzije je kružnica koja prolazi središtem inverzije.

iii Slika kružnice koja ne prolazi središtem inverzije je kružnica.

Zadaci.

3. Dane su dvije kružnice k_1 i k_2 koje se ne sijeku. Nađite inverziju koja te dvije kružnice preslikava u dvije koncentrične kružnice.

Analiza
Neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dane kružnice i p njihova potencijala. Nadalje, neka su M i N dvije točke na p s raznih strana spojnice O_1O_2. Označimo sa P presjek potencijale i spojnice.

Povucimo tangente MS i MT na k_1 tako da su S i T dirališta tih tangenata s k_1 i da MS i MT sijeku O_1O_2.
Jer p ne siječe k_1 vrijedi da je $|O_1P| > r_1$ pa je

$$|MS|^2 = |MO_1|^2 - r_1^2 > |MO_1^2| - |O_1P|^2 = |MP|^2 \ .$$

Dakle, $|MS| > |MP|$ pa je točka P unutar kružnice $k(M, |MS|)$.
Promatrajući k_2 i njen radijus r_2 možemo analogno zaključiti da je P unutar kružnice $k(N, |NT|)$.
Odavde slijedi da se kružnice $k(M, |MS|)$ i $k(N, |NT|)$ sijeku u dvije točke. Neka su O i $\tilde{O}$ te dvije točke.

Promatramo inverziju $i[O, p]$ sa središtem u O (nije bitna potencija). Ta inverzija preslikava kružnice $k(M, |MS|)$ i $k(N, |NT|)$ u dva pravca q_1 i q_2. Označimo li $i(\tilde{O}) = O_3$, vidimo da se pravci q_1 i q_2 sijeku u točki O_3.

Označimo još $i(k_1) = k_1'$ te $i(k_2) = k_2'$. Kako je $\measuredangle MSO_1 = 90°$, kružnice k_1 i k_2 su **ortogonalne** na $k(M, |MS|)$ i $k(N, |NT|)$ pa će i slike k_1' i k_2' biti ortogonalne na q_1 i q_2. k_1' i k_2', dakle, imaju sjecišta s ta dva pravca i središte im je sjecište O_3 tih dvaju pravaca.

4. Dane su dvije kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku. Konstruirajte skup dirališta dviju kružnica koje se diraju pri čemu svaka od tih dviju kružnica dira dane kružnice.

5. Konstruirajte kružnicu x koja prolazi danom točkom O, dira danu kružnicu k_1 i ortogonalna je na drugu danu kružnicu k_2.

6. U danu kružnicu k upišite četverokut $PQRS$ čije stranice PQ, QR, RS i SP prolaze redom kroz četiri dane točke A, B, C, D.

3.4 Apolonijev problem

Dane su tri kružnice k_1, k_2 i k_3. Apolonijev (Apolonije iz Perge, 3. stoljeće prije Krista) problem se sastoji u nalaženju kružnica koje dodiruju sve tri dane kružnice. Rješenje ovisi o međusobnim položajima danih kružnica.
Neka su dane kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takve da vrijedi $r_3 \leq r_1$ i $r_3 \leq r_2$ tj. r_3 je najmanji polumjer. Problem možemo pojednostaviti promatranjem kružnica $\widetilde{k}_1(O_1, r_1 - r_3)$, $\widetilde{k}_2(O_2, r_2 - r_3)$ i $\widetilde{k}_3(O_3, r_3 - r_3)$. Uočimo da je $\widetilde{k}_3$ zapravo točka O_3. Na ovaj način smo problem pronalaska kružnice koja dodiruje tri dane kružnice sveli na problem pronalaska kružnice koja dodiruje dvije dane kružnice i prolazi danom točkom. Pri tome moramo pripaziti da ako je kružnica $\widetilde{k}(O, r)$ rješenje pojednostavljenoga problema, onda je $k(O, r - r_3)$ rješenje orginalnoga problema.

Kako riješiti pojednostavljeni problem? Definiramo inverziju $i[O_3, p]$ proizvoljne potencije p sa centrom u O_3. Označimo $\widetilde{k_1}' = i(\widetilde{k_1})$ i $\widetilde{k_2}' = i(\widetilde{k_2})$. Razlikujemo nekoliko slučajeva:

1. Niti jedna od kružnica $\widetilde{k_1}$ i $\widetilde{k_2}$ ne prolazi središtem inverzije O_3.
2. Jedna od kružnica $\widetilde{k_1}$ i $\widetilde{k_2}$ prolazi središtem inverzije O_3.
3. I kružnica $\widetilde{k_1}$ i kružnica $\widetilde{k_2}$ prolaze središtem inverzije O_3.

Mi ćemo se pozabaviti prvim slučajem. Naime, ukoliko niti jedna kružnica ne prolazi središtem inverzije, njihove će slike pri inverziji i opet biti kružnice. Kružnica $\widetilde{k}$ koja predstavlja rješenje pojednostavljenoga problema, prolazi središtem inverzije pa se ona preslikava u pravac koji dodiruje $\widetilde{k_1}'$ i $\widetilde{k_2}'$.
Sada je pojednostavljeni problem sveden na pronalazak zajedničkih tangenti kružnica $\widetilde{k_1}'$ i $\widetilde{k_2}'$ (razmislite kako biste konstruirali zajedničke tangente tih kružnica). Dvije međusobno različite kružnice, ovisno o međusobnom položaju, mogu imati 4, 3, 2, 1 i 0 zajedničkih tangenata. Neka su $\widetilde{t_i}'$ za $i = 1, \ldots, 4$ zajedničke tangente kružnica $\widetilde{k_1}'$ i $\widetilde{k_2}'$. Tada su kružnice $\widetilde{t_i} = i(\widetilde{t_i}')$ za $i = 1, \ldots, 4$ rješenja pojednostavljenoga problema. Ranije

smo već opisali kako njih pretvoriti u rješenja polaznoga, Apolonijevog problema.

Međutim, to nisu sva moguća rješenja Apolonijevog problema. Ostala rješenja možemo pronaći promatranjem kružnica $\hat{k_1}(O_1, r_1 + r_3)$, $\hat{k_2}(O_2, r_2 + r_3)$ i $\hat{k_3}(O_3, r_3 - r_3)$. Ako će rješenje pojednostavljenoga problema biti $\hat{k}(S, R)$, onda je $k(S, R + r_3)$ rješenje polaznoga problema. Ovako pojednostavljeni problem rješava se analogno gore opisanom načinu.

Apolonijev problem ima najviše osam rješenja. Ukoliko su kružnice tako postavljene da se na gore opisana dva načina mogu naći samo 4 rješenja, preostaje nam problemu pristupiti na još dva načina. Prvi traži da se k_1 poveća i k_2 smanji, a drugi da se k_2 poveća i k_1 smanji.

Promotrimo poseban slučaj Apolonijevog problema. To je slučaj kada sve tri kružnice prolaze istom točkom T.

Nameće se zaključak da je potrebno definirati proizvoljnu inverziju $i[T, p]$. Ona dane kružnice preslikava u pravce, a traženu kružnicu u kružnicu koja dira sva tri pravca. Taj slučaj može imati 4 rješenja (upisana kružnica i 3 trokutu pripisane kružnice). Središte pripisane kružnice se nalazi na simetrali jednog unutrašnjeg kuta i na simetralama ostala dva vanjska kuta trokuta. Ukoliko se sve tri dane kružnice dodiruju iznutra u jednoj točki, onda problem ima beskonačno mnogo rješenja.

Za tri kružnice koje se nalaze jedna izvan druge već smo promotrili jedan način - jednoj od kružnice smanjiti polumjer na nulu i problem svesti na KKT. Drugi je način da kružnicama poveća radijus tako da se dvije kružnice dodirnu u točki. Tu smo i dalje na KKK problemu, ali znamo da se dvije kružnice dodiruju u točki. Sada tu točku uzmemo za središte inverzije i imamo problem KPP tj. traži se kružnica koja dodiruje dva paralelna pravca i kružnicu. Kako riješiti taj problem?
Radijus dane kružnice smanjimo ili povećamo za polovinu udaljenosti paralelnih pravaca. Možemo dobiti od 0 do 4 rješenja.

Problemi srodni Apolonijevom problemu traže kružnicu koja dodiruje dane:

1. kružnicu, točku i pravac

   Odabere se proizvoljna inverzija u odnosu na točku T. Ona će danu kružnicu k preslikati u kružnicu k', a dani pravac p u kružnicu p' koja prolazi kroz T. Rješenje je zajednička tangenta t' tih dviju kružnica k' i p'. Preostaje tu tangentu po inverziji preslikati u traženu kružnicu t.

2. tri kružnice - to smo upravo objasnili
3. dvije kružnice i pravac

   Neka je r radijus manje kružnice. Pravac odmaknem za r od tih kružnica u njemu paralelan pravac. Dobili smo slučaj KTp. Radijus tako dobivene kružnice smanjimo za r.

4. dvije kružnice i točku - to smo upravo objasnili
5. kružnicu i dva pravca

   Neka je r radijus dane kružnice i O njeno središte, a p_1 i p_2 dani pravci. Sa $\tilde{p_1}$ i $\tilde{p_2}$ označimo pravce redom paralelne s p_1 i p_2 i od njih udaljene za r. Tražimo kružnicu koja prolazi kroz O i dodiruje pravce $\tilde{p_1}$ i $\tilde{p_2}$ (slučaj Tpp). Radijus tako dobivene kružnice umanjimo za r.

6. kružnicu i dvije točke

   Neka su T_1 i T_2 dane točke i k dana kružnica. Odaberemo proizvoljnu inverziju sa središtem u točki T_1. Ta inverzija će danu kružnicu preslikati u kružnicu k', točku T_2 u točku T_2', a rješenje će biti tangenta na k' kroz T_2'. (Zašto?)

7. pravac i dvije točke

   Neka su T_1 i T_2 dane točke i p dani pravac. Algebarski način je da se nađe sjecište S pravaca T_1T_2 i p i odredi D takva da je $|SD|^2 = |ST_1| \cdot |ST_2|$. Drugi način je da se definira proizvoljna inverzija sa središtem u T_1. Ona točku T_2 preslika u T_2', a pravac p u kružnicu p'. Traži se tangenta iz T_2' na p'. Postoje najviše dva rješenja.

8. dva pravca i točku - homotetija (poglavlje 3.1 zadatak 2)
9. tri pravca - upisana i 3 pripisane kružnice
10. tri točke - kružnica opisana trokutu

Poglavlje 4

Projektivna preslikavanja

4.1 Dvoomjeri

Definicija. Za tri kolinearne točke A, B, i C djelišni omjer, u oznaci (ABC) je kvocijent

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$$

orijentiranih dužina $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$.

Ako je $C = A$, onda je očito $(ABC) = 0$. Za $C = B$ je $(ABC) = \infty$, a ako je C polovište dužine $\overrightarrow{AB}$, onda je $(ABC) = -1$.

Zadaci.

1. Ako je $(ABC) = \alpha$, koliko je (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA)?

Rješenje.
Znamo da je
$\alpha = (ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$ pa je $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$
\begin{aligned}
(ACB) &= \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} + 1 = -\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} + 1 = -\alpha + 1 = 1 - \alpha \\
(BAC) &= \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} = \alpha^{-1} \\
(BCA) &= \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA}} + 1 = 1 - \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} = 1 - \alpha^{-1} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \\
(CAB) &= \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}}} = \frac{1}{1-\alpha} \\
(CBA) &= \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{BA}} = \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{CA}}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

Definicija. Za četiri kolinearne točke A, B, C i D definira se dvoomjer $(ABCD)$ kao broj

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

tj. kao omjer djelišnih omjera (ABC) i (ABD).

2. Ako je $(ABCD) = t$, koliko je $(BACD)$ i $(CDAB)$?
Rješenje.
$t = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$

$$
\begin{aligned}
(BACD) &= \frac{(BAC)}{(BAD)} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} : \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} = \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}\right)^{-1} = t^{-1} = \frac{1}{t} \\
(CDAB) &= \frac{(CDA)}{(CDB)} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DA}} : \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = t
\end{aligned}
$$

4.2 Perspektivna kolineacija

Definicija. Kolineacija ravnine nadopunjena beskonačno dalekim točkama za koje smatramo da pripadaju jednom beskonačno dalekom pravcu je preslikavanje sa E^2 na E^2 koje čuva kolinearnost (tj. preslikava pravac na pravac).
Definicija. Kolineacija koja ima sljedeća svojstva:

(a) parovi pridruženih točaka su kolinearni s čvrstom točkom O

(b) parovi pridruženih pravaca sijeku se na čvrstom pravcu o

naziva se perspektivna kolineacija s centrom O i osi o, a označava se sa (O, o).

Perspektivna kolineacija je određena svojim centrom, svojom osi i jednim parom pridruženih točaka. Centar O može ležati na pravcu o, ali ćemo obično promatrati slučajeve kada O ne leži na pravcu o.

Slika točke A pri perspektivnoj kolineaciji (O,o):

Praslika točke B' pri perspektivnoj kolineaciji (O, o):

1. Konstruirajte sliku beskonačno dalekog pravca pri perspektivnoj kolineaciji (O, o).

2. Konstruirajte prasliku beskonačno dalekog pravca pri perspektivnoj kolineaciji (O, o).

3. Perspektivna kolineacija određena je s dva para pridruženih točaka A, A' i B, B' te parom pridruženih pravaca c, c'. Konstruirajte joj centar i os. Oprez, parove A, A'; B, B'; c, c' ne možemo bilo kako odabrati!

4. Dani su pravci a, b i c sa zajedničkom točkom O i točke K, L i M. Konstruirajte trokut ABC tako da je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$ i pravci BC, CA i AB redom prolaze kroz točke K, L i M.

4.3 Perspektivna afinost

Definicija. Kolineaciju koja preslikava beskonačno daleki pravac sam u sebe zovemo afinost.
Definicija. Perspektivna kolineacija s osi o kojoj je centar O u beskonačnosti zove se perspektivna afinost s osi o i centrom O. Pravci kroz O na kojima leže parovi pridruženih točaka međusobno su paralelni i zovemo ih zrakama afinosti.

Napomena:
Slika beskonačno daleke točke B je ponovno beskonačno daleka točka B' jer se radi o afinosti, a točka B leži na beskonačno dalekome pravcu.

Teorem: Perspektivna afinost preslikava paralelne pravce u paralelne pravce i čuva djelišne omjere. Za par pridruženih točaka A, A' i sjecište U pravca AA' s osi afinosti vrijedi

$$\frac{|UA'|}{|UA|} = \text{const.}$$

Zadatak.

1. Dana je perspektivna afinost s osi o i parom pridruženih točaka T, T'. Konstruirajte par okomitih pravaca a, b točkom T koji se opet preslikavaju u par okomitih pravaca.

4.4 Projektivitet

Definicija. Niz točaka je skup svih točaka jednog pravca nadopunjen jednom beskonačno dalekom točkom.
Definicija. Pramen pravaca, u oznaci (O) je skup svih pravaca ravnine koji prolaze jednom čvrstom točkom O. Točka O je vrh tog pramena.
Definicija. Niz točaka na pravcu o označavamo s (o). Pravac o je nosilac tog niza točaka.
Definicija. Za niz točaka (o) i pramen (O) kažemo da su perspektivni i pišemo $(o)\bar{\bar{\Lambda}}(O)$ ako postoji bijekcija između (o) i (O) takva da za par pridruženih elemenata A, a vrijedi $A \in a$.
Definicija. Za dva niza točaka (p) i (p') kažemo da su perspektivni s centrom perspektiviteta O i pišemo $(p)\overset{O}{\bar{\bar{\Lambda}}}(p')$ ako za pridružene točke A, A' tih nizova vrijedi $O \in AA'$ tj. ako je $(p)\bar{\bar{\Lambda}}(O)\bar{\bar{\Lambda}}(p')$.

Definicija. Za dva pramena (O) i (O') kažemo da su perspektivni s osi perspektiviteta o i pišemo

$$(O)\overset{o}{\bar{\bar{\Lambda}}}(O')$$

ako za pridružene pravce a, a' tih pramenova vrijedi $a \cap a' \in o$ tj. ako je $(O)\bar{\bar{\Lambda}}(o)\bar{\bar{\Lambda}}(O')$.

Definicija. Projektivitet je bijekcija dvaju nizova koja se može prikazati kao lanac perspektiviteta.

Zadatak

1. Dana su tri para pridruženih točaka u projektivitetu nizova (n_1) i (n_2). Za točku T_1 niza (n_1) treba konstruirati pridruženu točku T_2 niza (n_2).

2. Isto za dva pramena pravaca (V_1) i (V_2).

Poglavlje 5

Krivulje drugog stupnja

5.1 Elipsa

Definicija. Neka su dane točke F i F' i duljina $2a$ takva da je $|FF'| < 2a$. Skup svih točaka T takvih da je $|FT| + |F'T| = 2a$ zovemo elipsom sa žarištima (fokusima) F i F' i velikom poluosi a. Dužine $\overline{FT}$ i $\overline{F'T}$ su radius vektori točke T.

Teorem 5:
Dana je kružnica $k(F, 2a)$ i točka F' unutar nje. Ako je P varijabilna točka dane kružnice, onda simetrala dužine $\overline{F'P}$ omata jednu elipsu s fokusima F i F' i velikom osi $2a$.

Teorem 6:
Skup nožišta okomica iz fokusa elipse na njezinu tangentu je kružnica sa središtem u središtu elipse i polumjerom jednakim velikoj poluosi.

Definicija. Kružnica $k(O, a)$ iz prethodnog teorema zove se glavna kružnica elipse.

Zadaci.

1. Dana je elipsa s fokusima F i F' i velikom osi $2a$ i točka T. Konstruirajte tangentu elipse točkom T.

2. Dana je elipsa s fokusima F i F' i velikom osi $2a$ i pravac p. Konstruirajte tangente elipse paralelne s pravcem p.

3. Elipsa kao perspektivna afina slika kružnice (samo za one koji žele znati više).

5.2 Hiperbola

Definicija. Neka su dane točke F i F' i duljina $2a$ takva da je $|FF'| > 2a$. Skup svih točaka T takvih da je $||FT| - |F'T|| = 2a$ zovemo hiperbolom sa žarištima (fokusima) F i F' i velikom poluosi a. Dužine $\overline{FT}$ i $\overline{F'T}$ su radius vektori točke T.

Teorem 5:
Dana je kružnica $k(F, 2a)$ i točka F' izvan nje. Ako je P varijabilna točka dane kružnice, onda simetrala dužine $\overline{F'P}$ omata jednu hiperbolu s fokusima F i F' i velikom osi $2a$.

Zadaci.

1. Dana je hiperbola s fokusima F i F' i velikom osi $2a$ i točka T. Konstruirajte tangentu hiperbole točkom T.

2. Dana je hiperbola s fokusima F i F' i velikom osi $2a$ i pravac p. Konstruirajte tangente hiperbole paralelne s pravcem p.

3. Konstruirajte tangente hiperbole s fokusima F i F' i velikom osi $2a$ iz središta O te hiperbole (O je vanjska točka hiperbole). Konstruirajte dirališta tih tangenata.

Definicija. Pravci n_1 i n_2 iz prethodnog zadatka zovu se asimptote hiperbole.

Napomena:

1. Neka je N_1 polovište od S_1F.

Tada vrijedi $|ON_1| = \frac{1}{2}|F'S_1| = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$ i $|OF| = \frac{1}{2}|FF'| = e$ pa je

$$|FN_1| = \sqrt{e^2 - a^2} = b\ .$$

2. Neka je φ kut koji asimptota zatvara s glavnom osi. Tada je

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|FN_1|}{|ON_1|} = \frac{b}{a} \ .$$

Zato asimptote prolaze kroz točke C_1 i C_2 u kojima okomice na glavnu os u glavnim tjemenima sijeku kružnicu s promjerom $\overline{FF'}$.

5.3 Parabola

Definicija. Neka je dan pravac d i točka F izvan njega. Skup svih točaka T koje su jednako udaljene od točke F i pravca d zove se parabola s fokusom F i direktrisom (ravnalicom) d. Neka je N nožište okomice iz T na d. Dužine $\overline{FT}$ i $\overline{NT}$ zovu se radijvektori točke T.

Iz definicije slijedi da je parabola simetrična s obzirom na okomicu o iz F na d. Pravac o zovemo os parabole.

Definicija. Neka je D nožište okomice iz F na d. Polovište A dužine $\overline{FD}$ je na paraboli i naziva se tjeme parabole. Duljina $|DF| = p$ je parametar parabole.

Teorem 4:
Skup suprotišta fokusa parabole s obzirom na sve njezine tangente je ravnalica te parabole.

Teorem 6:
Dan je pravac d i točka F izvan njega. Ako je P varijabilna točka pravca d, onda simetrala dužine $\overline{FP}$ omata parabolu s fokusom F i direktrisom d.

Zadaci.

1. Dana je parabola s fokusom F i direktrisom d i točka T. Konstruirajte tangentu parabole točkom T.

2. Dana je parabola s fokusom F i direktrisom d i pravac p. Konstruirajte tangente parabole paralelne s pravcem p.

5.4 Pascalov i Brianchonov teorem

Pascalov teorem (teorem 4):
Parovi suprotnih stranica šesterokuta upisanog elipsi, paraboli ili hiperboli sijeku se u tri kolinearne točke.

Dualni "problem":
Brianchonov teorem (teorem 5):
Spojnice parova suprotnih vrhova šesterokuta opisanog elipsi, paraboli ili hiperboli imaju zajedničku točku.

Zadaci.

1. Dane su točke A, B, C, D, E od kojih nikoje tri nisu kolinearne i pravac t točkom A. Konstruirajte drugo sjecište F pravca t s krivuljom drugog stupnja koja prolazi kroz točke A, B, C, D i E.

Komentar:
Odavde se vidi zašto 5 točaka određuje krivulju drugog stupnja. Kako mijenjamo pravac t (koji rotira oko A), tako dobivamo različite točke na krivulji.

2. Dane su točke A, B, C, D, E od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Konstruirajte tangentu t u točki A krivulje drugog stupnja određene točkama A, B, C, D, E.

3. Dani su pravci a, b, c, d i e od kojih nikoja tri nemaju zajedničku točku i točka T na pravcu a. Konstruirajte drugu tangentu f iz točke T na krivulju drugog stupnja koja dira pravce a, b, c, d i e.

Komentar:
Kao i u prvom zadatku, odavde se vidi da je krivulja drugog stupnja određena s bilo kojih 5 svojih tangenti.

4. Dani su pravci a, c i d od kojih nikoja dva nisu paralelna. Konstruirajte dirašte T pravca a s hiperbolom kojoj su c i d asimptote, a pravac a tangenta.

Komentar:
Iz slike se vidi da je T sjecište dijagonala paralelograma sa suprotnim stranicama c, q i d,

p pa T raspolavlja odreske na tim dijagonalama a, r. Dakle, diralište tangente hiperbole je polovište odreska te tangente između asimptota hiperbole.

Poglavlje 6

Konstrukcije s ograničenim sredstvima

6.1 Konstrukcije samo s ravnalom

Konstruktivne mogućnosti ravnala dane su sljedećim teoremom.

Teorem 1:
Ravnalom se iz danih točaka mogu konstruirati one i samo one točke ravnine čije su koordinate racionalne funkcije koordinata danih točaka.

Zadatak.

1. Dane su točke A, B i C na jednom pravcu. Konstruirajte točku D na tom pravcu tako da je (ABCD)=-1. (Primijenite teorem 2 iz poglavlja 4.1.)

6.2 Konstrukcije u omeđenom dijelu ravnine samo ravnalom

Nedostupna točka U zadana je pomoću dijelova dvaju pravaca čija produženja prolaze tom točkom, a nalaze se unutar našeg područja. Nedostupni pravac u zadaje se pomoću dvije točke na njemu koje su nedostupne.
Konstrukcije s nedostupnim elementima temelje se na Desarguesovom teoremu.

Zadaci.

1. Spojite danu dostupnu točku C s nedostupnom točkom O koja je zadana kao sjecište dvaju dostupnih pravaca p i q.

2. Na nedostupnom pravcu o određenom pomoću nedostupnih točaka P i Q zadana je nedostupna točka R kao sjecište s dostupnim pravcem c. Spojite točku R s danom dostupnom točkom.

3. Dana su dva nedostupna pravca p i q (sa po dvije nedostupne točke A, A' i X, X'). Konstruirajte barem jedan (a onda se može i više) dostupni pravac kroz nedostupno sjecište O pravaca p i q.

6.3 Konstrukcije ravnalom i šestarom u omeđenom dijelu ravnine

Zadaci.

1. Spojite dvije nedostupne točke A i B zadane s po dva pravca p, q i r, s.

2. Nedostupnom točkom A zadanom parom pravaca p i q konstruirajte paralelu s pravcem r.

3. Konstruirajte simetralu kuta dvaju pravaca p i q čije je sjecište nedostupno.

6.4 Konstrukcije ravnalom ako je dana jedna pomoćna figura

Suprotne rubove papira ili ploče možemo shvatiti kao pomoćnu figuru - dane paralelne pravce p i q. Oni zapravo određuju beskonačno daleku točku O kao svoje sjecište. Nju pak možemo shvatiti kao nedostupnu točku zadanu pravcima p i q.

Zadaci.

1. Dani su paralelni pravci p i q i dužina $\overline{AB}$ na nekom pravcu paralelnom s p i q. Konstruirajte polovište D dužine $\overline{AB}$.

2. Dani su paralelni pravci p i q i dužina $\overline{AB}$ na nekom pravcu paralelnom s p i q. Na pravcu AB konstruirajte točku C takvu da je $|AB| = |BC|$.

Napomena: Višestukom primjenom prethodnog zadatka, dana se dužina na pravcu paralelnom s p i q može pomnožiti bilo kojim prirodnim brojem n.

3. Dani su paralelni pravci p i q i dužina $\overline{AB}$ na nekom pravcu paralelnom s p i q. Podijelite dužinu $\overline{AB}$ na n jednakih dijelova.

4. Ako je dan kvadrat $ABCD$, raspolovite dani pravi kut.

5. Ako je dan kvadrat $ABCD$, nad danom dužinom $\overline{PQ}$ konstruirajte kvadrat.

6.5 Konstrukcije ravnalom ako je dana jedna kružnica i njeno središte (Steinerove konstrukcije)

Kod Steinerovih konstrukcija rješavaju se zadaće kod kojih je dana kružnica $k(O,r)$ kao pomoćna figura.

Zadaci.

1. U kružnicu k upišite kvadrat.

6.6 Konstrukcije dvostranim ravnalom

Dvostrano ravnalo ima dva paralelna ruba s čvrstom udaljenošću d (širina dvostranog ravnala). Njima se mogu izvesti sljedeće konstrukcije:

1. Spojiti dvije točke
2. Povući paralelu s danim pravcem na udaljenosti d
3. Povući pravac za d udaljen od dane točke
4. Neka su dane dvije točke međusobno udaljene za $\geq d$. Povući par paralelnih pravaca međusobno udaljenih za d pri čemu svaki od njih prolazi kroz točno jednu od te dvije točke.

Zadaci.

1. Konstruirajte kvadrat.

2. Danom točkom A konstruirajte pravac paralelan danom pravcu a koji ne prolazi kroz A.

6.7 Konstrukcije ravnalom i prenosiocem jedinične dužine (Hilbert- Bachmanove konstrukcije)

Zadaci.

1. Točkom P koja ne leži na danom pravcu q konstruirajte paralelu s q.

2. Zadanu dužinu $\overline{UV}$ prenesite od točke P na polupravac q s početkom P.

Ravnalom i prenosiocem dužine može se riješiti Malfattijev problem, ali ne i Apolonijev problem.

6.8 Konstrukcije samo šestarom (Mohr - Masceronijeve konstrukcije)

Samo šestarom se mogu izvesti sve konstrukcije koje se mogu izvesti šestarom i ravnalom.

Zadaci.

1. Konstruirajte točku P' inverznu danoj točki P s obzirom da danu kružnicu $k(O, r)$.

2. Konstruirajte sliku pravca određenog točkama A i B koji ne prolazi točkom O, pri inverziji s obzirom na $k(O, r)$.

3. Konstruirajte sliku kružnice k koja prolazi točkom O pri inverziji s obzirom na kružnicu $k(O, r)$.

4. Konstruirajte sliku kružnice k koja ne prolazi točkom O pri inverziji s obzirom na kružnicu $k(O, r)$.

5. Dana je kružnica $k(O, r)$ i točke A i B. Konstruirajte sjecišta kružnice k i pravca AB ako se zna da on ne prolazi točkom O. (Oprez, pravac AB nije dan!)

6. Dana je kružnica $k(O, r)$ i točka A. Konstruirajte sjecišta kružnica k i pravca OA. (Oprez, pravac OA nije dan!)