8 Projektivna preslikavanja

Napomena: U pojedinim zadacima su linkovi koji vode na .ggb datoteke pa imajte na umu da ih otvarate s odgovarajućim programom - Geogebra.

8.1 Perspektivna kolineacija i perspektivna afinost

Osnovne definicije

Djelišni omjer i dvoomjer

Za kolinearne točke A, B, C **djelišni omjer** (ABC) definiramo kao omjer usmjerenih duljina AC i BC. Dakle, $(ABC) = \frac{AC}{BC}$.

Svakom pravcu ćemo dodati po jednu točku koju zovemo **beskonačno daleka točka** tog pravca. Uvođenjem beskonačno dalekih točaka postižemo da se svaka dva pravca sijeku u jednoj točki. Paralelni pravci imaju istu beskonačno daleku točku.

Za dane točke A i B pridruživanje $C \mapsto (ABC)$ je bijekcija između skupa svih točaka pravca (uključujući i njegovu beskonačno daleku točku) i skupa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

- Ako točka C pripada dužini $\overline{AB}$, onda su AC i BC suprotne orijentacije pa je $(ABC) < 0$. Posebno, ako je C polovište dužine $\overline{AB}$ onda je $(ABC) = -1$.
- Ako je točka C izvan dužine $\overline{AB}$, onda su AC i BC iste orijentacije pa je $(ABC) > 0$.
- Ako je $C = B$, onda je $(ABC) = \infty$.
- Ako je C beskonačno daleka točka, onda je $(ABC) = 1$.

Računske operacije na $\mathbb{R}$ možemo proširiti do računskih operacija na $\overline{\mathbb{R}}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
a + \infty = \infty + a =& \infty, && a \neq \infty \\
a - \infty = \infty - a =& \infty, && a \neq \infty \\
a/\infty = a \cdot 0 = 0 \cdot a =& 0, && a \neq \infty \\
a/0 = a \cdot \infty = \infty \cdot a =& \infty, && a \neq 0 \\
\infty/a =& \infty, && a \neq \infty \\
0/a =& 0, && a \neq 0.
\end{aligned}$$

Za četiri kolinearne točke A, B, C, D, **dvoomjer**, u oznaci $(ABCD)$, je omjer djelišnih omjera (ABC) i (ABD). Dakle,

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

Perspektivna kolineacija

Smatramo da je ravnina nadopunjena beskonačno dalekim točkama koje sve pripadaju jednom beskonačno dalekom pravcu. **Kolineacija ravnine** je preslikavanje skupa točaka ravnine na sebe koje čuva kolinearnost, tj. preslikava pravce u pravce.

Mi ćemo promatrati kolineaciju koja ima sljedeća svojstva:

- parovi pridruženih točaka kolinearni su sa čvrstom točkom O,

- parovi pridruženih pravaca sijeku se na čvrstom pravcu o.

Takva kolineacija zove se **perspektivna kolineacija s centrom O i osi o** i označava se s (O, o). Perspektivna kolineacija određena je svojim centrom, svojom osi i jednim parom pridruženih točaka. Opišimo kako se konstruiraju slike pojedinih točaka i pravaca. Neka je zadan centar kolineacije O, os o i neka je točki A pridružena točka A'. Konstruirajmo sliku proizvoljne točke B. Kako točke O, B i B' moraju biti kolinearne, znamo da B' leži na pravcu OB. Nadalje, budući da se parovi pridruženih pravaca sijeku na o, konstruiramo pravac AB i njegovo sjecište označimo s M. Sada se B' nalazi na presjeku pravaca $A'M$ i OB. Detaljnije proučite tu konstrukciju u sljedećem dokumentu: Konstrukcija slike točke B. Konstrukciju slike pravca možete proučiti u sljedećem dokumentu: Konstrukcija slike pravca p.
Napomenimo ako je pravac p paralelan s osi o, onda oni imaju zajedničku beskonačno daleku točku kroz koju prolazi i slika p', tj. i pravac p' je paralelan s osi o.
Može se pokazati da su jedine fiksne točke perspektivne kolineacije centar O te točke osi o. Pravci kroz O se preslikavaju u same sebe (ali nisu fiksni po točkama).

Perspektivna afinost

Kolineaciju koja preslikava beskonačno daleki pravac ravnine sam u sebe zovemo **afinost**.

Za perspektivnu kolineaciju kojoj je centar O beskonačno daleka točka pokaže se da preslikava proizvoljnu beskonačno daleku u beskonačno daleku točku pa je to afinost. Zovemo je **perspektivna afinost s osi o i centrom O**. Pravci kroz O na kojima leže parovi pridruženih točaka su paralelni (npr. AA' i BB' su paralelni) i zovemo ih **zrakama afinosti**.

Može se pokazati da perspektivna afinost čuva paralelne pravce (ako su p i q paralelni, onda su im i slike p' i q' paralelni) i čuva djelišne omjere.

Zadatci

8.1. Neka su A, B i C tri kolinearne točke. Ako je djelišni omjer $(ABC) = t$, odredite (BAC), (ACB) i (CBA).

Rješenje: Neka je $t = (ABC) = \dfrac{AC}{BC}$. Tada je $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{BC}$.

$$(BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{t}$$
$$(ACB) = \frac{AB}{CB} = \frac{AC + CB}{CB} = 1 + \frac{AC}{CB} = 1 - \frac{AC}{BC} = 1 - t$$
$$(CBA) = \frac{CA}{BA} = \frac{CA}{BC + CA} = \left(\frac{BC + CA}{CA}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{BC}{CA}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1} = \frac{t}{t-1}$$

Primijetimo da uz definirane operacije na $\overline{\mathbb{R}}$, gornje jednakosti vrijede i za $t = 0, 1, \infty$, tj. kad je $C = A$, C beskonačno daleka točka i $C = B$ (redom).
Naime:

- za $C = A$ je $t = 0$ i $(BAC) = (BAA) = \infty (= \frac{1}{0})$, $(ACB) = (AAB) = \frac{AB}{AB} = 1$, $(CBA) = (CBC) = \frac{CC}{BC} = 0$.

- za C beskonačno daleku točku je $t = 1$ i $(BAC) = \frac{BC}{AC} = 1$, $(ACB) = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{\infty} = 0$, $(CBA) = \frac{CA}{BA} = \infty (= \frac{1}{0})$.
- za $C = B$ je $t = \infty$ i $(BAC) = \frac{BB}{AB} = 0 (= \frac{1}{\infty})$, $(ACB) = (ABB) = \infty (= 1 - \infty)$, $(CBA) = \frac{BA}{BA} = 1$.

8.2. Neka su A, B, C i D četiri kolinearne točke. Ako je dvoomjer $(ABCD) = t$, odredite $(BACD)$, $(CDAB)$ i $(ACBD)$.

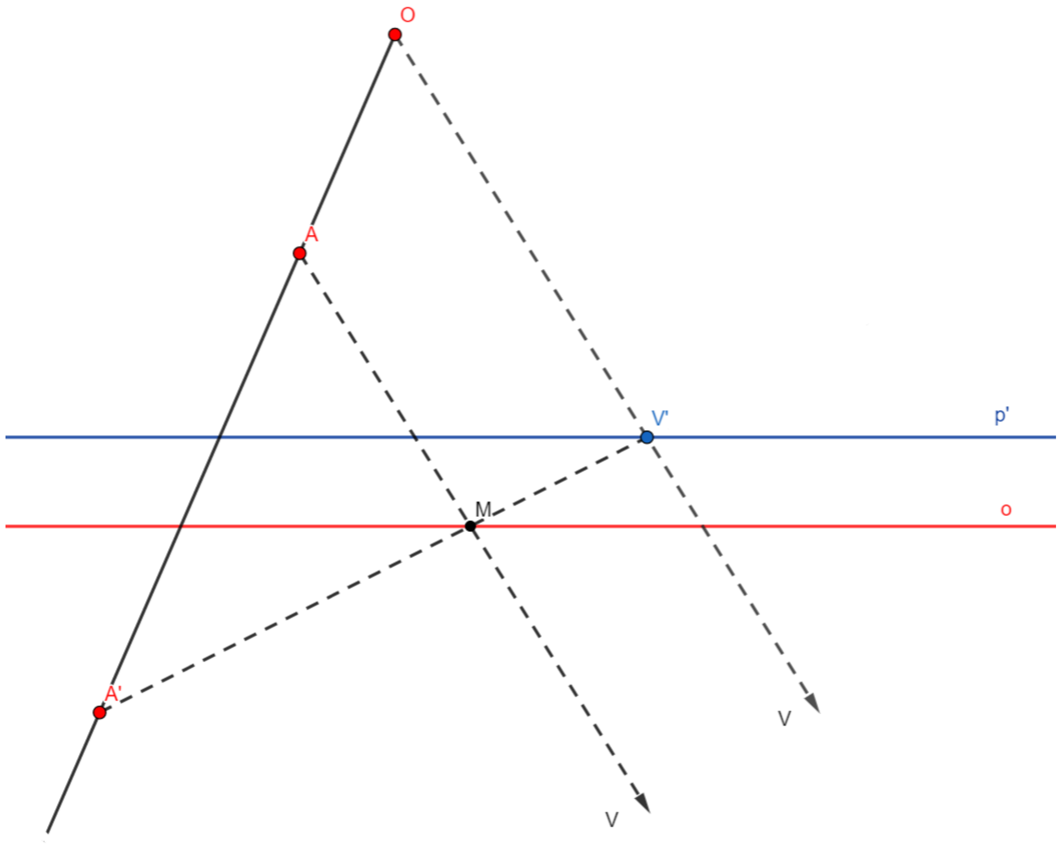
Rješenje: Neka je $t = (ABCD) = \dfrac{(ABC)}{(ABD)} = \dfrac{AC}{BC} : \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$. Tada je:

$$\begin{aligned}
(BACD) &= \frac{(BAC)}{(BAD)} = \frac{BC}{AC} : \frac{BD}{AD} = \frac{BC \cdot AD}{AC \cdot BD} = \frac{1}{t} \\
(CDAB) &= \frac{(CDA)}{(CDB)} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{DA \cdot CB} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = t \\
(ACBD) &= \frac{(ACB)}{(ACD)} = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{AC + CB}{CB} : \frac{AD}{CB + BD} = \\
&= \left(1 + \frac{AC}{CB}\right) \cdot \frac{CB + BD}{AD} = \left(1 - \frac{AC}{BC}\right)\left(\frac{BD}{AD} - \frac{BC}{AD}\right) = \\
&= \frac{BD}{AD} - \frac{BC}{AD} - \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} + \frac{AC}{AD} = \frac{BD + CB + AC}{AD} - t = 1 - t
\end{aligned}$$

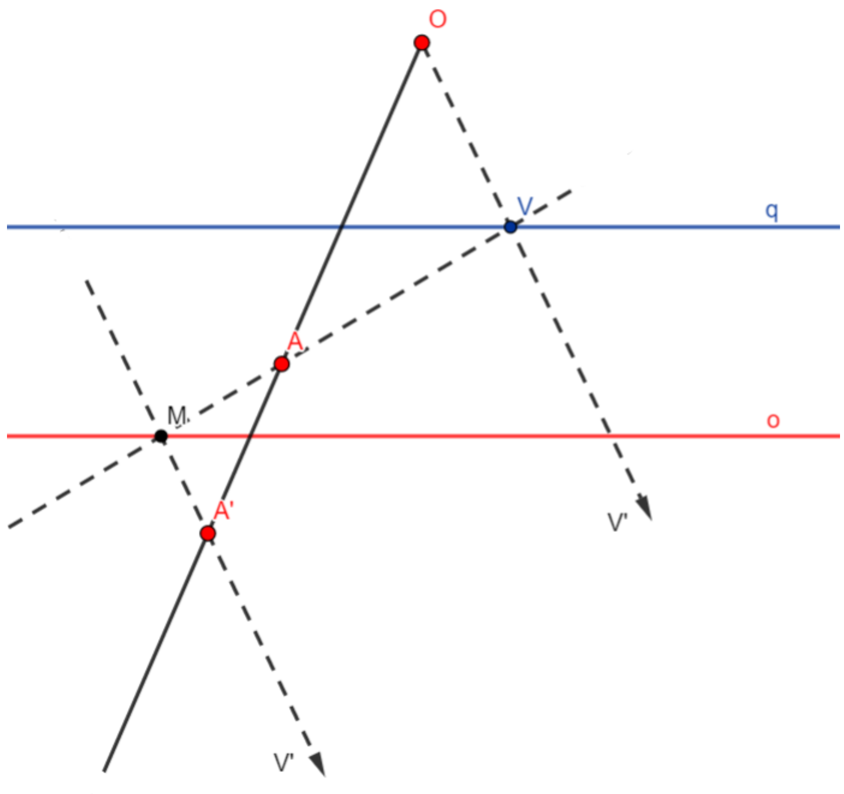
8.3. Konstruirajte sliku i prasliku beskonačno dalekog pravca pri perspektivnoj kolineaciji (O, o).

Rješenje: Konstruirajmo prvo slikua beskonačno dalekog pravca. (Nazivamo je i **nedogledni** ili **ubježni** pravac). Neka je p beskonačno daleki pravac. On sadrži sve beskonačno daleke točke, pa i beskonačno daleku točku osi o što znači da je paralelan s o. Zato će i njegova slika p' biti pravac paralelan s o. Dakle, dovoljno nam je odrediti sliku V' proizvoljne točke V s beskonačno dalekog pravca i onda će p' biti paralela sa o kroz V' (slika ispod).

Neka je V bilo koja točka pravca p. Neka je $M \in AV \cap o$. Tada je $V' \in A'M \cap OV$, pri čemu je pravac OV pravac kroz O paralelan s AV (imaju istu točku u beskonačnosti V).

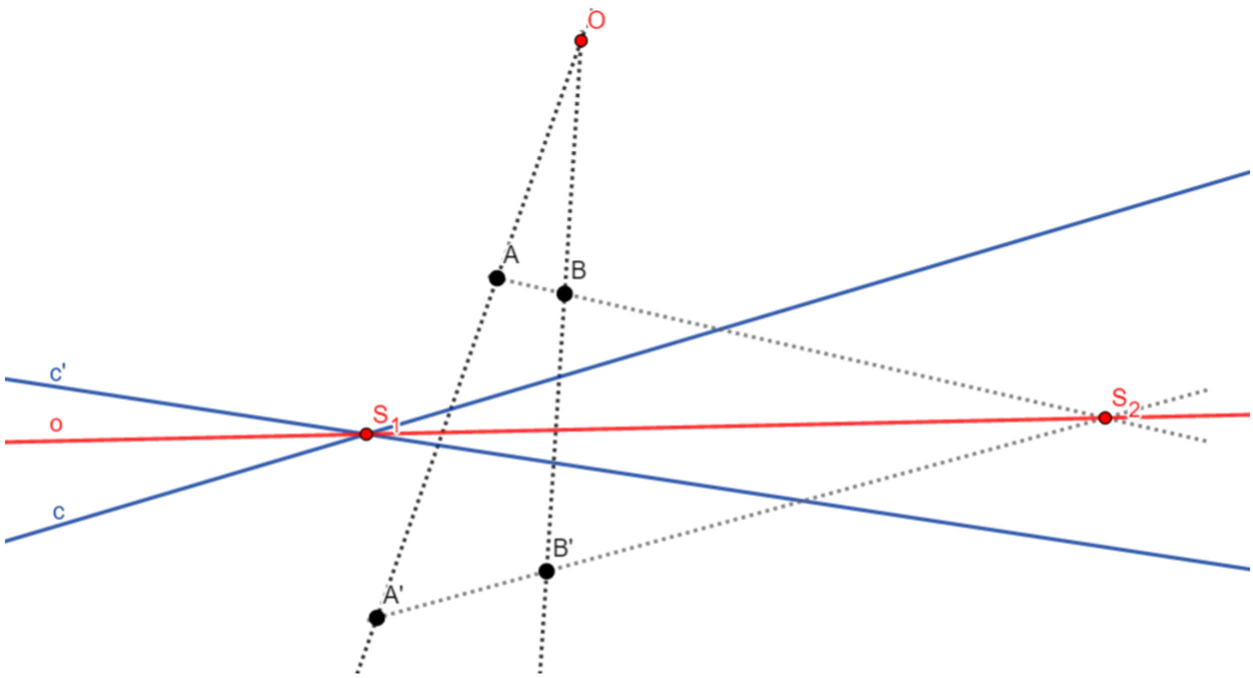


Konstruirajmo sada prasliku beskonačno dalekog pravca. (Nazivamo je i **izbježni** pravac). Neka je p beskonačno daleki pravac. Tražimo pravac q koji se preslika u p, tj. $q' = p$. Kako p sadrži beskonačno daleku točku osi o, a točke s osi o su fiksne, slijedi da je to beskonačna točka i od q. Dakle, pravac q je paralelan s osi o. Zato je dovoljno odrediti prasliku V proizvoljne točke $V' \in p$ (slika ispod).
Neka je $V' \in p$ proizvoljna i $M \in A'V' \cap o$. Tada je $V \in OV' \cap AM$, pri čemu je OV' pravac kroz O paralelan s $A'V'$.



8.4. Perspektivna kolineacija određena je s dva para pridruženih točaka, $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, te parom pridruženih pravaca $c \mapsto c'$. Konstruirajte centar i os.

Rješenje: Centar O nalazi se na sjecištu pravaca AA' i BB'. Znamo da se pravci AB i $A'B'$ te pravci c i c' sijeku na osi o pa je ona određena kao pravac kroz ta sjecišta (slika ispod).



Ako je $AA' \parallel BB'$, točka O je točka u beskonačnosti pa se radi o perspektivnoj afinosti. Ako je $AB \parallel A'B'$, os o je pravac kroz sjecište pravaca c i c' paralelan pravcima AB i $A'B'$.

Točke A,A',B,B' te pravci c i c' ne mogu biti bilo kako odabrani jer za proizvoljnu točku $T \in c$ mora vrijediti da se pravci AT i $A'T'$ sijeku u točki na osi o. Označimo tu točku sa M. Dakle točka T' leži na presjeku pravaca $A'M$ i OT i to sjecište mora pripadati i pravcu c'.

8.5. Dani su pravci a, b, c sa zajedničkom točkom O i točke K, L, M. Konstruirajte trokut ABC tako da je $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ i pravci BC, CA i AB prolaze redom točkama K, L i M.

Rješenje: Promatramo perspektivnu kolineaciju s centrom O i osi KL. Da bi ona bila jednoznačno određena, treba nam još par pridruženih točaka. Primijetimo da su točke K i L fiksne jer leže na osi kolineacije. Iz deficinije perspektivne kolineacije imamo $A' \in a$, $B' \in b$ i $C' \in c$. Odaberimo $C' \in c$ proizvoljnu. Kako su točke C, L i A kolinearne, to i njihove slike C', L i A' moraju biti kolinearne pa se A' nalazi na presjeku pravaca $C'L$ i a. Slično, B' nalazi se na presjeku pravaca $C'K$ i b. Odredimo gdje se nalazi točka M'. Znamo da se nalazi na pravcu OM. Nadalje, točke A, M i B su kolinearne pa su i njihove slike kolinearne, pa se M' nalazi i na pravcu $A'B'$. Dakle, M' se nalazi na presjeku pravaca OM i $A'B'$. Sada je jednoznačno određena perspektivna kolineacija $(O, KL; M, M')$, pa možemo odrediti točke A, B i C kao praslike od A', B' i C' redom. Kako se AM i $A'M'$ sijeku na osi te se BM i $B'M'$ sijeku na osi, neka je $X = A'M' \cap o (= B'M' \cap o$ jer su A', B' i M' kolinearne). Sada je $A \in XM \cap a$ i $B \in XM \cap b$. Točku C možemo odrediti kao presjek pravaca c i AL. Korake konstrukcije i samu konstrukciju pogledajte u dokumentu: Zadatak 8.5.

8.6. Zadan je četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Postoji li pravac o koji prolazi točkom C i perspektivna kolineacija sa središtem A i osi o koja zadani četverokut preslikava u paralelogram?

Rješenje: Pokušajmo odrediti takvu perspektivnu kolineaciju. Ako postoji, točke A i C su fiksne, a točke A, D i D' te točke A, B i B' su kolinearne. Neka je točka E sjecište pravaca AD i BC. Tada se ona preslika u presjek pravaca AD' i $B'C$, a oni su paralelni pa je slika od E beskonačno daleka točka. Analogno, označimo s F sjecište pravaca AB i CD. Tada se ona preslika u presjek pravaca AB' i CD', a oni su paralelni pa je slika od F beskonačno daleka točka. Zaključujemo da točke E i F leže na praslici beskonačno dalekog pravca pa je os tražene kolineacije pravac o kroz C paralelan s pravcem EF.
U slučaju da u zadanom paralelogramu $ABCD$ imamo jedan par paralelnih stranica, primjerice $AB \parallel CD$, onda je točka F beskonačno daleka točka pa je tražena os o pravac kroz C paralelan s AB, tj. $o = CD$.
Nakon što smo odredili os kolineacije, preostaje još odrediti par pridruženih točaka. Kako moraju AD' i $B'C$ biti paralelne, a D' leži na pravcu AD, slijedi da je točka B' određena kao presjek pravca AB i pravca kroz C paralelnog s AD. Pogledajte dokument: Zadatak 8.6.

8.7. Pravilnom osmerokutu $ABCDEFGH$ konstruirajte perspektivno afinu sliku ako je pravac AC os afinosti, a točki F je pridružena točka H.

Rješenje: Kako su A i C na osi o, imamo $A' = A$ i $C' = C$. Nadalje, kako je $F' = H$, zrake afinosti su pravci paralelni s FH, pa znamo da slika svake točke leži na pravcu kroz tu točku paralelnom s pravcem FH.
<u>1. način:</u> Opišimo detaljnije primjerice konstrukciju točke B. Njena slika B' leži na pravcu kroz B paralelnom s FH, a to je pravac BD. Nadalje, pridruženi pravci sijeku se na osi AC, što znači da se pravci FB i HB' sijeku na osi AC. Ako sa M označimo presjek

pravca FB i osi o, slijedi da točka B' leži na pravcu HM. Time je određena točka B'. Analogno koristeći točke F i H odredimo slike točaka D, E i G. Za odrediti sliku točke H, koristimo par već pridruženih točaka, npr. B i B'.

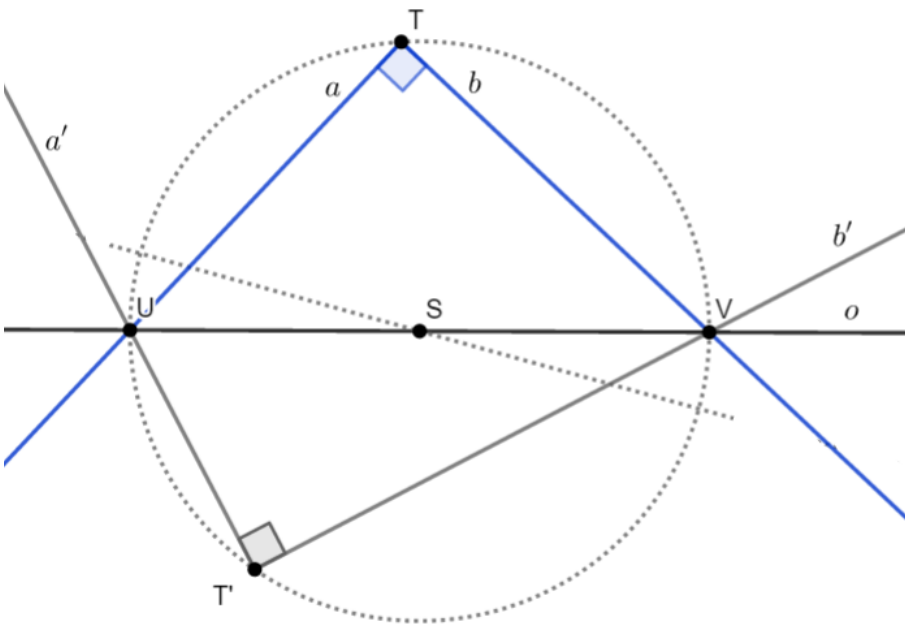
<u>2. način:</u> Možemo koristiti i svojstvo perspektivne afinosti da preslikava paralelne pravce u paralelne (oprez: ovo ne vrijedi za općenitu perspektivnu kolineaciju).

- $CD \parallel AF \Rightarrow C'D' \parallel A'F' \Rightarrow CD' \parallel AH$, pa se točka D' nalazi na presjeku pravca BD i pravca kroz C paralelnim s AH.
- $HD \parallel AC \Rightarrow H'D' \parallel A'C' \Rightarrow H'D' \parallel AC$, pa se točka H' nalazi na presjeku pravca HF i pravca kroz D' paralelnim s AC.
- $GF \parallel AD \Rightarrow G'F' \parallel A'D' \Rightarrow G'H \parallel AD'$, pa se točka G' nalazi na presjeku pravca kroz G paralelnim s FH i pravca kroz H paralelnim s AD'.
- $BF \parallel AG \Rightarrow B'F' \parallel A'G' \Rightarrow B'H \parallel AG'$, pa se točka B' nalazi na presjeku pravca BD i pravca kroz H paralelnim s AG'.
- $ED \parallel AH \Rightarrow E'D' \parallel A'H' \Rightarrow E'D' \parallel AH'$, pa se točka E' nalazi na presjeku pravca AE i pravca kroz D' paralelnim s AH'.

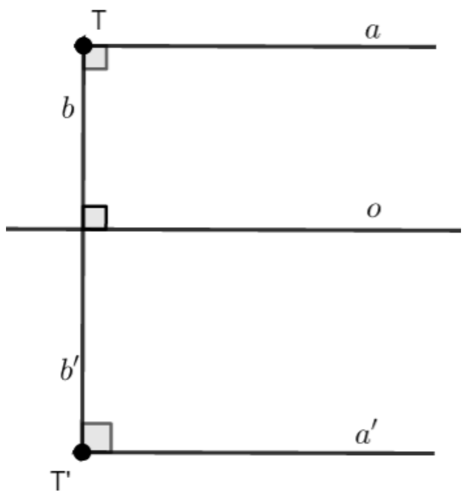
Oba načina konstrukcije prikazana su u sljedećem dokumentu: Konstrukcija zad 8.7.

8.8. Dana je perspektivna afinost s osi o i parom pridruženih točaka $T \mapsto T'$. Konstruirajte par okomitih pravaca a, b točkom T koji se preslikavaju u par okomitih pravaca.

Rješenje: Kako se pravac a preslika u pravac a', slijedi da njihovo sjecište U mora ležati na osi o. Slično, sjecište V pravaca b i b' mora također biti na o. Kako su kutovi u T, odnosno T' pravi, slijedi da točke T i T' leže na kružnici promjera $\overline{UV}$. Njeno središte nalazi se na sjecištu osi o i simetrale dužine $\overline{TT'}$ (slika ispod). Možete tu konstrukciju pogledati i na sljedećem linku: Konstrukcija zad 8.8.



Gornja kostrukcija je moguća uvijek osim kad je simetrala dužine $\overline{TT'}$ paralelna s osi o, tj. kad su zrake afinosti okomite na os. U tom slučaju je očito da jedan krak traženih kutova prolazi točkama T i T', a drugi je okomit na TT', tj. paralelan s osi o (slika ispod).


T
a
b
o
b′
a′
T'