11 Krivulje drugog stupnja kao perspektivno kolinearne slike kružnice

Napomena: U pojedinim zadacima su linkovi koji vode na .ggb datoteke pa imajte na umu da ih otvarate s odgovarajućim programom - GeoGebra.

Uvod

Neka su dane kružnica k i perspektivna kolineacija κ ravnine. Za krivulju $k' = \kappa(k)$ može se dokazati da je krivulja drugog stupnja čiji će tip ovisiti o njenom broju zajedničkih točaka s beskonačno dalekim pravcem (elipa ima 0, parabola 1, a hiperbola 2). Slijedi:

- k' će biti **elipsa** ako kružnica k nema zajedničkih točaka s izbježnim pravcem (praslikom beskonačnog pravca).
- k' će biti **parabola** ako kružnica k ima jednu zajedničku točku s praslikom beskonačnog pravca.
- k' će biti **hiperbola** ako kružnica k ima dvije zajedničke točke s praslikom beskonačnog pravca.

Očito κ preslikava tangentu od k u točki A u tangentu od k' u točki $\kappa(A)$. U slučaju da kružnica k siječe prasliku beskonačnog pravca u dvije točke, tangente na k u tim točkama preslikavaju se u pravce koje s hiperbolom imaju zajedničku točku u beskonačnosti, a to su asimptote hiperbole.

Kod perspektivne afinosti slike beskonačno dalekih točaka i samo njih su opet beskonačno daleke točke. Zato je perspektivno afina slika kružnice elipsa. Svi promjeri kružnica sijeku se u središtu koje im je polovište, a kako perspektivna afinost čuva djelišne omjere, to i njihove slike koje nazivamo **promjerima elipse** imaju zajedničko polovište u centru elipse. Slike okomitih promjera zovemo **konjugirani promjeri** elipse. Imaju svojstvo da svaki od njih raspolavlja tetive paralelne s drugim i paralelan je s tangentama u krajevima drugoga. Općenito nisu okomiti osim ako se radi o osima.

Osnovna je ideja u zadacima odabrati (što jednostavnije) perpektivnu afinost i kružnicu čija će slika biti elipsa. Za os afinosti obično se uzima neka od osi elipse ako su poznate ili jedan od konjugiranih promjera ukoliko su zadani. Onda zadaću riješimo za kružnicu te preslikamo rješenje.

-Detaljnije pročitajte u skripti za predavanja, str. 78-81

Zadatci

11.1. Zadana je perspektivna kolineacija κ s centrom O, osi o i parom pridruženih točaka $T \mapsto T'$. Odaberite neku kružnicu k tako da je $\kappa(k) = k'$ hiperbola te konstruirajte asimptote i jednu točku te hiperbole.

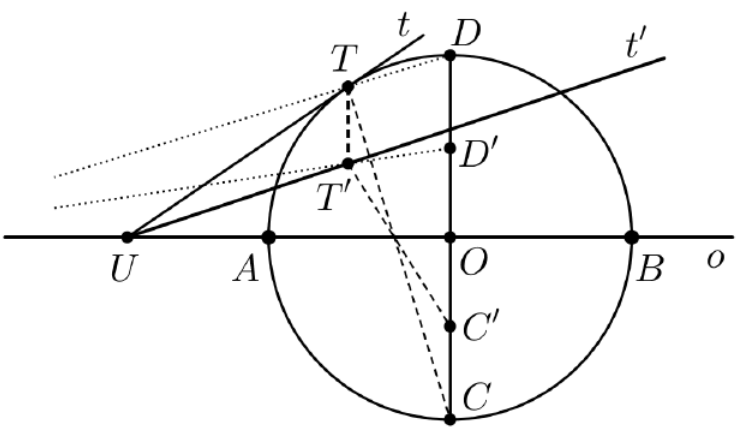
Rješenje: Da bi k' bila hiperbola, odaberemo neku kružnicu k koja s praslikom beskonačnog pravca ima dvije zajedničke točke. Budući da se tangente na k u tim točkama preslikavaju u asimptote hiperbole, konstruirat ćemo tangente a i b u tim točkama, a zatim konstruirati njihove slike a' i b' pri danoj perspektivnoj kolineaciji. Jednu točku hiperbole konstruiramo kao sliku proizvoljne točke kružnice k. Koraci konstrukcije prikazani su u sljedećem GeoGebra dokumentu Zadatak 11.1.

11.2. Zadane su asimptote OU' i OV' (U' i V' su točke u beskonačnosti), točka T hiperbole k' i pravac p'. Konstruirati sjecište hiperbole k' i pravca p'.

Rješenje: Odabrat ćemo (što jednostavnije moguće) kružnicu k i perspektivnu kolineaciju κ koja preslikava tu kružnicu u hiperbolu. Označimo sa p prasliku danog pravca p' pri tom preslikavanju. Ideja je da odredimo sjecište odabrane kružnice k i pravca p jer će slika tog sjecišta biti traženo sjecište hiperbole i pravca p'.
Za centar perspektivne kolineacije odaberimo točku O. Tada praslike U i V točaka U' i V' leže na danim asimptotama OU' i OV' redom. Odaberimo kružnicu k takvu da prolazi točkom T i da su joj pravci OU' i OV' tangente (Postoje dvije takve, odaberemo jednu. Trebali biste je znati sami konstruirati - poglavlje homotetija, zad 5.2.), a točke dirališta neka su U i V. Jasno je da je pravac UV praslika beskonačno dalekog pravca pa os odgovarajuće perspektivne kolineacije mora biti praralelna s UV. Kako točka T pripada i kružnici i hiperboli, mora ležati na osi pa je os pravac kroz T paralelan s UV. Time smo odredili perspektivnu kolineaciju. Sada konstruiramo prasliku p pravca p', sjecište p i k te ga zatim preslikamo. Dobivena točka je traženo rješenje. Ako se pravac p i kružnica k sijeku u dvije točke, dobivamo i dva sjecišta pravca p' i hiperbole. Koraci konstrukcije prikazani su u sljedećem GeoGebra dokumentu Zadatak 11.2.

11.3. Zadana je dužina $\overline{AB}$ i pravac t' koji ju ne siječe. Konstruirajte elipsu kojoj je $\overline{AB}$ jedna os, a t' tangenta. Odredite diralište tangente.

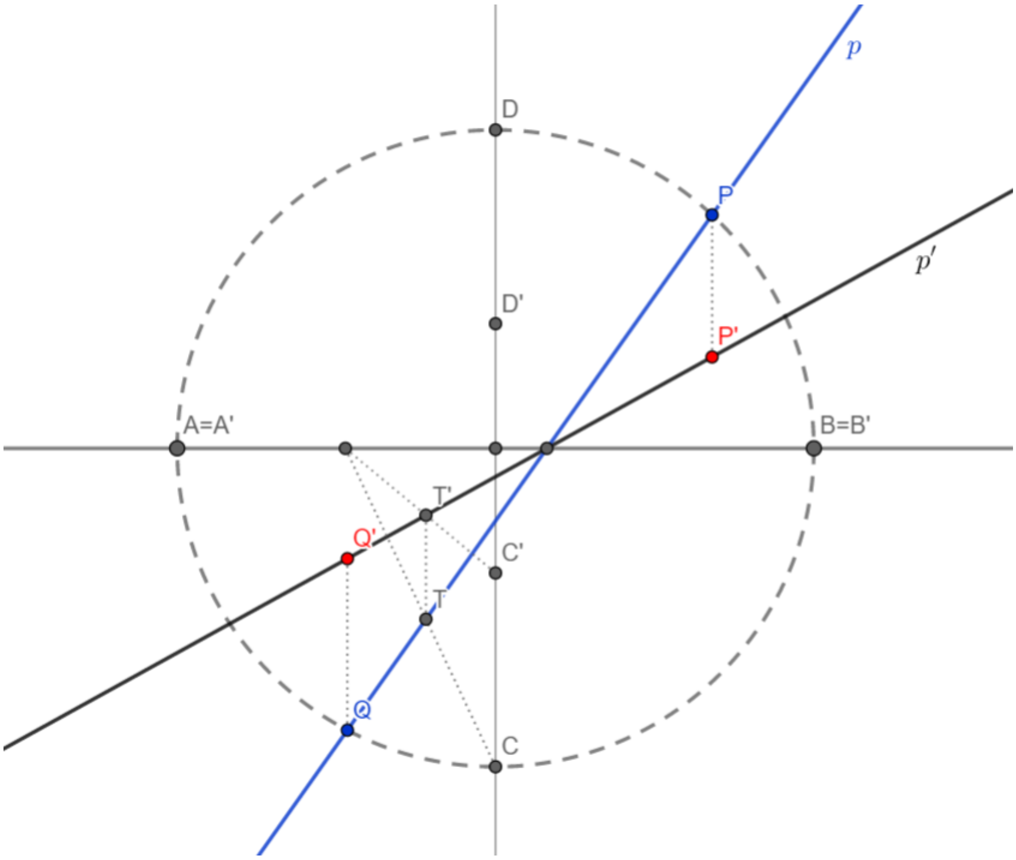
Rješenje: Ideja je (slično kao u prethodnom zadataku) da nađemo perspektivnu afinost i kružnicu čija će slika biti tražena elipsa. Neka je AB os afinosti i k kružnica čiji je promjer $\overline{AB}$. Još nam treba par pridruženih točaka. Neka su zrake afinosti okomite na os. Neka je U sjecište pravaca t' i AB te neka je t tangenta iz točke U na k (ako je U beskonačno daleka točka, tj. ako su pravci t' i AB paralelni, tada je i $t \parallel t'$). Označimo sa T točku dirališta. Kako perspektivna afinost preslikava tangente kružnice u tangente elipse u odgovarajućim točkama, to je t' zapravo slika od t, a diralište T' tangente t' i elipse je slika od T. Kako smo odabrali da su zrake afinosti okomite na os, slijedi da T' možemo konstruirati kao presjek pravaca t' i okomice iz T na AB. Time je određen par pridruženih točaka T, T' pa možemo preslikati svaku točku kružnice, tj. konstruirati pojedine točke elipse. Zadatak očito nema rješenja ako je $t' \perp AB$.



Napomena: Na gornjoj slici možemo vidjeti i drugu os $\overline{C'D'}$ elipse. Objasnimo kako bismo je konstruirali. Neka je $\overline{CD}$ promjer kružnice k okomit na AB. On se preslikava u tetivu $\overline{C'D'}$ elipse, no kako su zrake afinosti okomite na os, to je $C'D' \perp AB$ pa su $\overline{AB}$ i $\overline{C'D'}$ osi elipse.

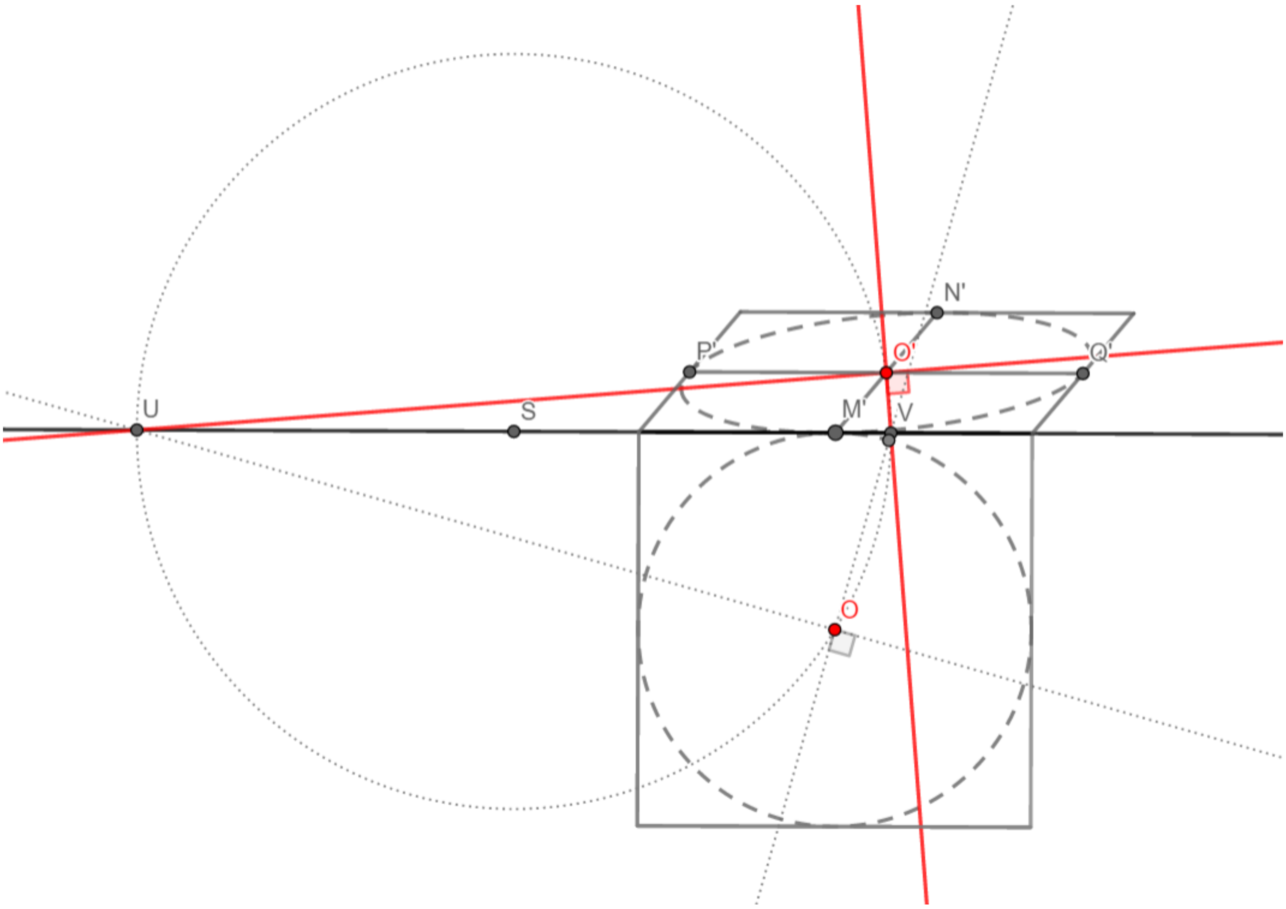
11.4. Dane su osi $\overline{A'B'}$ i $\overline{C'D'}$ elipse k' te pravac p' koji je siječe. Konstruirajte sjecište pravca p' i elipse k'.

Rješenje: Neka je k kružnica promjera $\overline{A'B'}$, a C i D njena sjecišta s pravcem $C'D'$. Promotrimo perspektivnu afinost s osi $A'B'$ i parom pridruženih točaka C, C' (primijetimo da ta afinost preslikava i D u D'). Neka je p praslika pravca p' (sad biste već trebali znati sami ga konstruirati). Zatim konstruiramo sjecišta P i Q pravca p i kružnice k. Tražena sjecišta pravca p' i elipse k' su točke P' i Q' (slike od P i Q).



11.5. Zadan je par konjugiranih promjera $\overline{M'N'}$, $\overline{P'Q'}$ elipse. Konstruirajte osi te elipse.

Rješenje: Konstruirajmo paralelogram kojemu je upisana promatrana elipsa ε sa srednjicama $\overline{P'Q'}$ i $\overline{M'N'}$ (slika ispod). Neka je O' centar te elipse. Nad jednom stranicom paralelograma, npr. stranicom kojoj je M' polovište, konstruirajmo kvadrat i upišimo mu kružnicu k. Središte joj je u centru kvadrata O. Primijetimo da se kružnica i elipsa diraju u točki M'. Želimo odrediti perspektivnu afinost koja kružnicu k preslikava u elipsu ε. Za os ćemo uzeti pravac na kojem leži stranica zajednička paralelogramu i kvadratu, a za par pridruženih točaka O i O' (uočite da ova perspektivna afinost uistinu preslikava kružnicu k u elipsu ε). Sada tražimo dva okomita promjera kružnice k koja će se preslikati u osi elipse. Dakle, tražimo dva okomita pravca kroz O koja će se preslikati u dva okomita pravca kroz O'. Tu zadaću smo već riješili kad smo radili perspektivna preslikavanja u zadatku 8.8. Podsjetimo se, konstruiramo kružnicu kroz točke O i O' čije je središte na sjecištu simetrale dužine OO' i osi perspektivne afinosti. Sjecišta te kružnice s osi označimo U i V. Traženi pravci su OU i OV te $O'U$ i $O'V$.



N'
P'
O'
Q'
U
S
M'
V
O