Metoda presjeka (2021.) – dodatni materijali

Zadaci

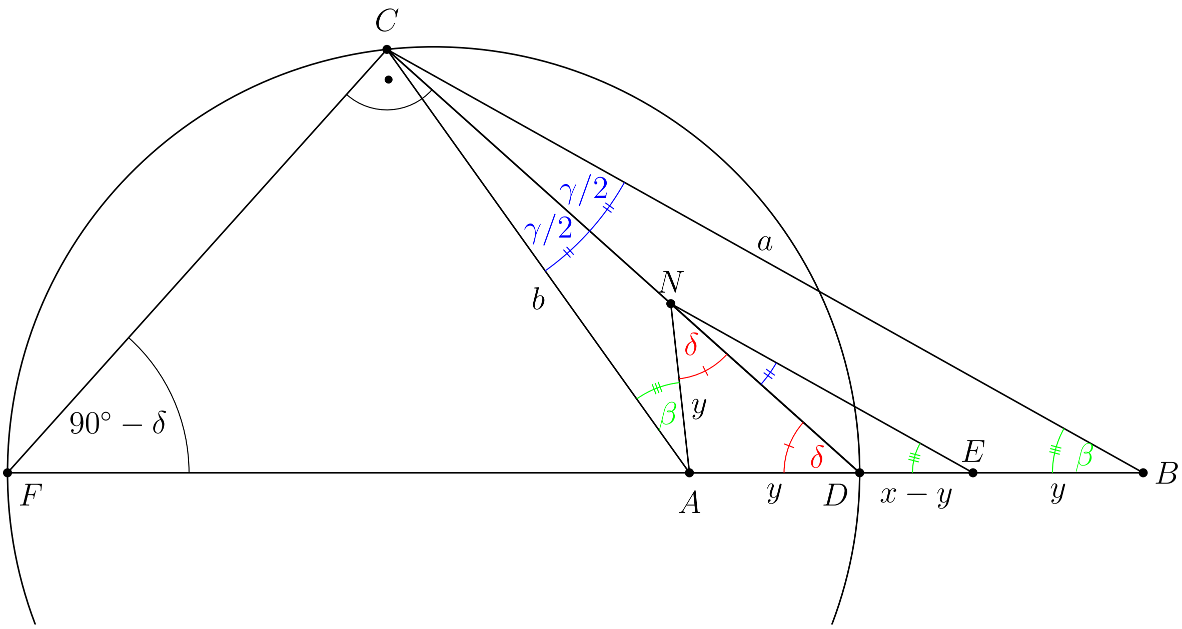
Zadatak. Zadan je kut $0° < \delta < 90°$ i tri kolinearne točke A, B, D, pri čemu se D nalazi između A i B tako da vrijedi $|AD| < |DB|$. Konstruirajte točku C tako da je pravac CD simetrala kuta $\measuredangle ACB$ i da je zadovoljeno $\measuredangle ADC = \delta$. Dokažite da varirajući kut δ pripadajuće točke C leže na istoj kružnici. Koliki je polumjer te kružnice?

Analiza. Pretpostavimo da imamo već konstruiranu točku C (pa onda i trokuta ABC) tako da je CD simetrala kuta uz C. Označimo $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|CA| = b$, te neka su α, β i γ kutovi trokuta ABC redom uz vrhove A, B i C. Nadalje, označimo $x := |DB|$ i $y := |AD|$ – tada je $x > y$ i $x + y = c$. Kako je CD simetrala kuta, onda ona dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $b : a$, tj. $x : y = a : b$.

Ideja je sada naći trokute kojima je $x : y$ koeficijent sličnosti. Označimo s N točku na CD tako da je $|AN| = |AD|(= y)$. Tada je trokut ADN jednakokračan i ima kut uz točke N i D jednake δ. Iz toga se lako pokaže koristeći činjenicu $\measuredangle ACD = \measuredangle DCB = \gamma/2$ da je $\measuredangle NAC = \beta$ i da stoga vrijedi $\triangle NAC \sim \triangle DBC$. Ta sličnost povlači da je $|CN| : |CD| = y : x$.

No to nam sada daje ideju da definiramo točku E na dužini $\overline{DB}$ tako da je $|EB| = y$. Naime, tada je $|CN| : |CD| = y : x = |EB| : |DB|$, pa je po SKS poučku $\triangle NED \sim \triangle CBD$ s koeficijentom sličnosti $(x - y) : x$ te su pravci EN i BC paralelni. Ovo je sada dovoljno informacija da možemo konstruirati točku C.

Prije nego što nastavimo s konstrukcijom dokažimo da varirajući δ točke C leže na jednoj te istoj kružnici (što također daje alternativni način konstrukcije točke C). Neka je F sjecište pravca AB i okomice kroz C na CD. Tada smo dobili pravokutni trokut FCD s pravim kutom u C, pa je po Talesovom poučku $\overline{FD}$ promjer kružnice koja prolazi kroz C. Dovoljno je stoga dokazati da položaj točke F ne ovisi o kutu δ, ili ekvivalentno da $|FD|$ ne ovisi o δ.



Označimo $d = |CD|$ i primijetimo da je $|FD| \cos\delta = d$. S druge strane je $|ND| = 2|AD|\cos\delta = 2y\cos\delta$ i prisjetimo se da smo iz sličnost dobili $|CN| = dy/x$. Kako je $d = |CD| = |CN| + |ND|$

dobivamo $|ND| = d(x-y)/x$. Stoga je $2y\cos\delta = d(x-y)/x$. Konačno, dobivamo onda da je

$$|FD|\frac{d(x-y)}{2xy} = d,$$

tj. $|FD| = 2xy/(x-y)$, pa je posebno polumjer $xy/(x-y)$.

Konstrukcija.

(1) Konstruiramo prvo pravac p kroz D tako da je $\measuredangle(p, DA) = \delta$.

(2) Konstruiramo točku N na p tako da je $|AN| = |AD|$.

(3) Konstruiramo točku E na $\overline{DB}$ tako da je $|EB| = y$.

(4) Povučemo paralelu q od EN kroz B.

(5) Točka C je presjek p i q.

Dokaz. Po konstrukciji je $\measuredangle ADC = \delta$ pa preostaje dokazati da je CD simetrala kuta uz vrh C trokuta $\triangle ABC$. Po konstrukciji je $|AN| = |AD| = y$, $|DE| = x-y$, $|EB| = y$, i $EN \parallel BC$. Posebno je onda $\measuredangle ANC = \measuredangle BDC = 180^\circ - \delta$. Iz sličnosti $\triangle DBC \sim \triangle DEN$ slijedi $|CN| : |CD| = x : y$, a očito je i $|AN| : |DB| = y : x$. Po SKS slijedi da je $\triangle ANC \sim \triangle BDC$, pa su im pripadni kutovi isti. Posebno je $\measuredangle ACN = \measuredangle BCD$, što je i trebalo pokazati.

Rasprava. Rješenje uvijek postoji i jedinstveno je (do na osnu simetriju u odnosu na pravac AB).

Lj. Palle