Inverzija (2021.)

Zadaci

Zadatak 5. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku. Nađite inverziju koja ih preslikava u dvije koncentrične kružnice.

Rješenje. Označimo te dvije zadane kružnice s $k_1 = k(S_1, r_1)$ i $k_2 = k(S_2, r_2)$. Primijetimo da ako je $S_1 = S_2$ (tj. kružnice su već koncentrične) onda možemo uzeti bilo koju inverziju sa središtem $O = S_1 = S_2$.

Pretpostavimo stoga da je $S_1 \neq S_2$ i da postoji inverzija $i[O, r^2]$ koja preslikava k_1 i k_2 u koncentrične kružnice $k_1' = k(S', r_1')$ i $k_2' = k(S', r_2')$. Neka je p pravac S_1S_2, neka je q potencijala kružnica k_1 i k_2 te neka je $k = k(D, r)$ kružnica sa središtem u $D = q \cap p$ koja ja okomite na dane dvije kružnice k_1 i k_2 (vidi Sliku 1).

Primijetimo da vrijede ortognalne relacije: $q \perp p$, $q \perp k$, $k \perp k_1, k_2$ i $p \perp k_1, k_2$. Pogledajmo prvo što su $k' = i(k)$ i $p' = i(p)$ – k' (odnosno p') će biti pravac ako $O \in k$ (odnosno $O \in p$), a u suprotnom će biti kružnica. No kako inverzija čuva ortogonalnost krivulja, znamo da mora vrijediti $k', p' \perp k_1', k_2'$, tj. k' i p' su okomiti na dvije koncentrične kružnice, pa onda ni k' ni p' ne mogu biti kružnice (dokažite!). Dakle k' i p' su pravci, pa onda znamo da mora biti $O \in k, p$, tj. $O \in k \cap p$ Budući da je $p \perp k$, tj. p prolazi promjerom od k, onda je $k \cap p$ dvočlan skup $\{O_1, O_2\}$ te su k' i p' dva okomita pravca. Iz toga posebno slijedi zbog ortogonalnost $p', k' \perp k_1', k_2'$ da je $k' \cap p' = S'$ (tj. $k' \cap p'$ je središte koncentričnih kružnica k_1' i k_2'). Također slijedi da nužno mora biti $O \in \{O_1, O_2\}$. Primijetimo da ako uzmemo npr. $O = O_1$, onda će biti $k' \cap p' = O_2'$ (za slučaj kada uzmemo $O = O_1$ pogledajte Sliku 2).

Tvrdimo sada da obratno bilo koja inverzija sa središtem u O_1 ili O_2 zadovoljava traženi uvjet. No to je jasno iz gornjih razmatranja: za takve inverzije vrijedi da je $p' = p$ i k' je pravac jer $O_1, O_2 \in p \cap k$. Također kako $p \perp k$, onda je $p' = p \perp k'$ i slično zbog $p, k \perp k_1, k_2$ vrijedi da je $p' = p, k' \perp k_1', k_2'$, pa je $p \cap k'$ središte od obije kružnice k_1' i k_2'. (k_1' i k_2' su kružnice jer O_1, O_2 mogu ležati na k_1 ili k_2 ako i samo ako se k_1 i k_2 dodiruju).

Zadatak 6. Konstruirajte skup dirališta dviju kružnica koje se diraju pričemu svaka od tih dviju kružnica dira dane kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku.

Dat ćemo dva rješenja za ovaj zadatak. Prvo rješenje je dosta jednostavnije.

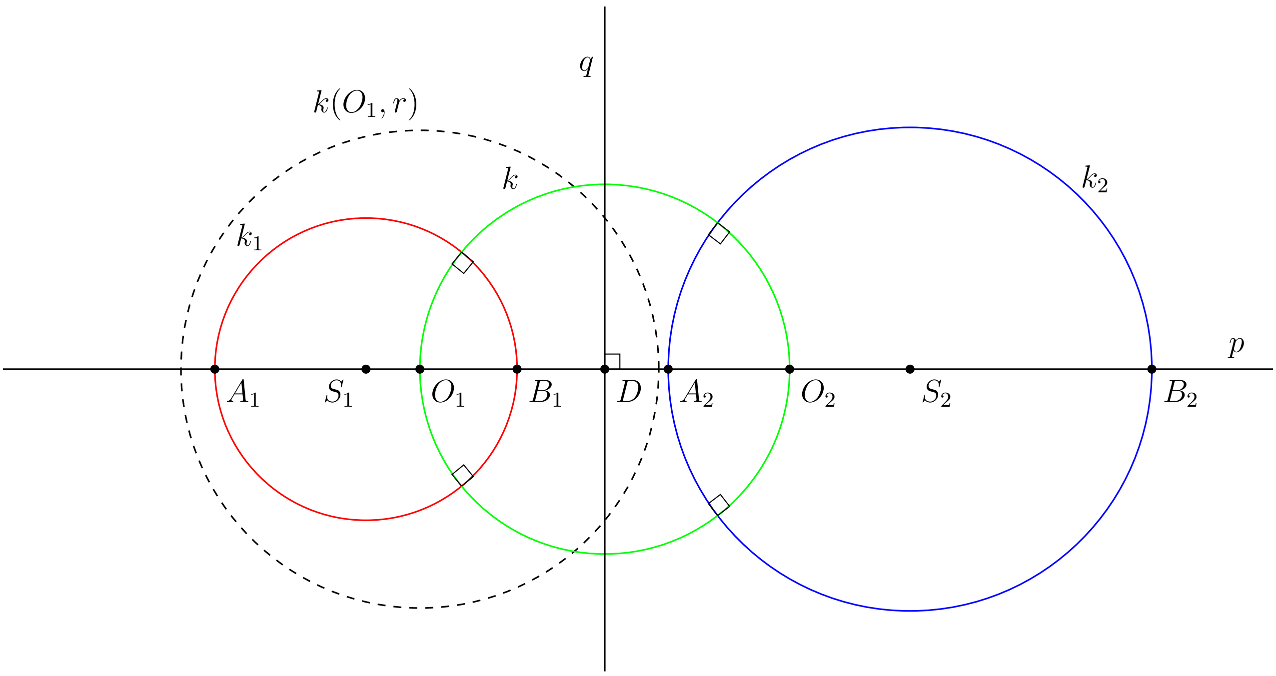
Prvo rješenje.

Analiza. Neka je $k_1 \cap k_2 = \{O_1, O_2\}$ i neka su c_1 i c_2 bilo koje kružnice koje se međusobno diraju u T i koje diraju k_1 i k_2. Traži se skup $\mathcal{D}$ svih takvih dirališta T.

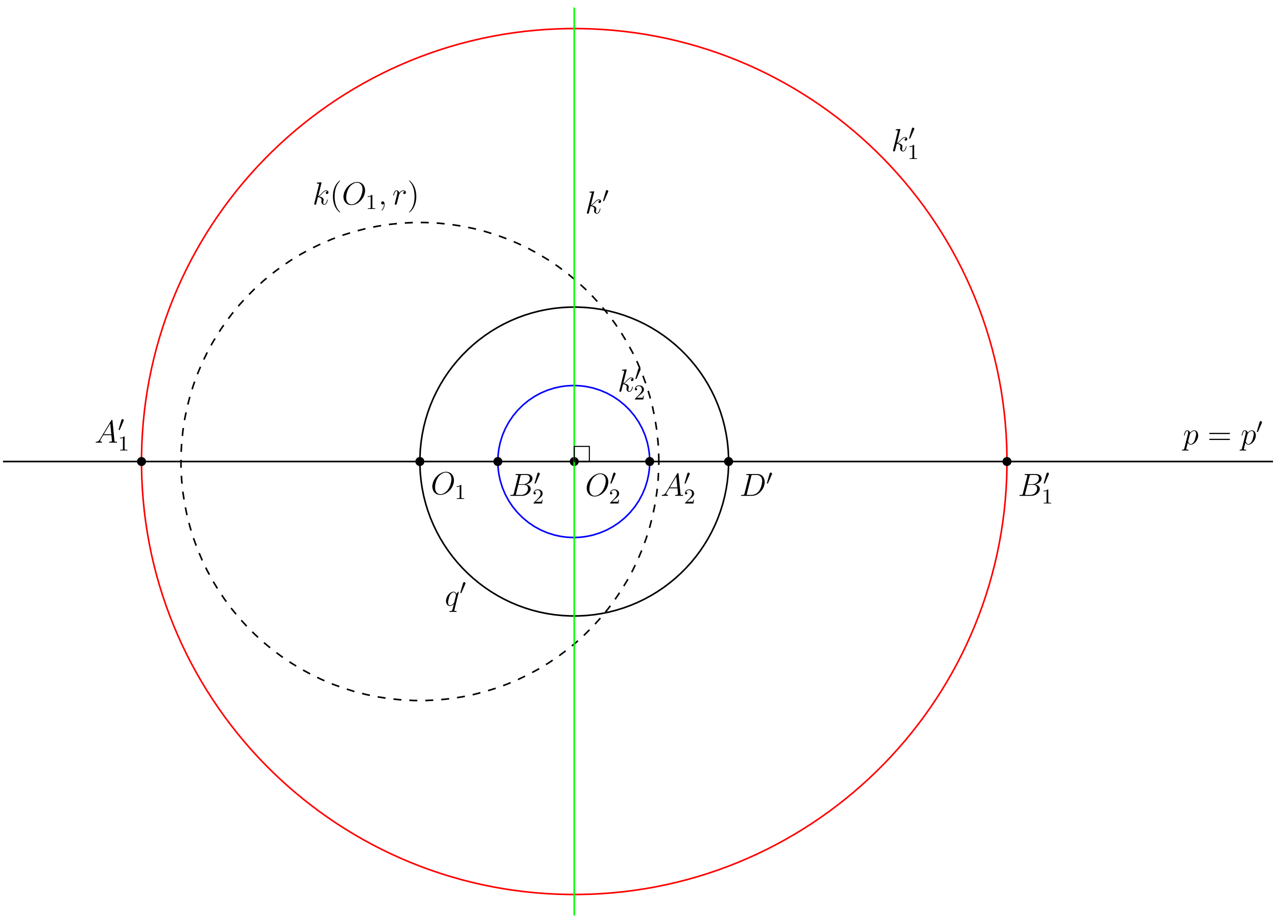
Promatramo inverziju $i[O_1, r^2]$ za npr. $r = |O_1O_2|$ (iako smo mogli uzeti bilo koji zapravo). Tada su k_1' i k_2' pravci koji se sijeku točki O_2, a c_1' i c_2' su kružnice koje se međusobno diraju u T' i koje diraju pravce k_1' i k_2'.

Pravci k_1' i k_2' zadaju četiri kuta unutar kojih se mogu nalaziti kružnice c_1' i c_2'. Primijetimo da se onda središta od c_1' i c_2' nalaze na simetralama tih kutova. Dakle, imamo dva slučaja. Prvi je slučaj da se c_1' nalazi unutar jednog kuta, a c_2' unutar jednog od njemu suplementarnih kutova. Tada se moraju c_1' i c_2' dirati u točki T' koja se nužno nalazi na kraku k_1' ili k_2'. Vrijedi očito i obrat: za svaku točku $T' \in k_1' \cup k_2'$ postoje c_1' i c_2' upisane u suplementarne kutove i tako da prolaze kroz T'.

Drugi je slučaj kada se c_1' i c_2' nalaze unutar istog kuta. Ako je s simetrala tog kuta, onda je



Slika 1: Slika za zadatak 5 prije primjene inverzije.



Slika 2: Slika za zadatak 5 poslije primjene inverzije.

nužno $T' \in s$ jer su središta od c_1' i c_2' na s. Iz zadatka 5.2. (u poglavlju homotetija) slijedi da vrijedi i obrat, tj. da za svaku $T' \in s$ možemo konstruirati dvije kružnice c_1' i c_2' koje diraju krakove i koje prolaze kroz T'.

Zaključujemo da je inverzija skupa dirališta $\mathcal{D}'$ jednak skupu $k_1' \cup k_2' \cup s_1 \cup s_2$, gdje su s_1 i s_2 simetrale kutova određenih s k_1' i k_2'. Kako je inverzija involucija, slijedi da je $\mathcal{D} = k_1 \cup k_2 \cup s_1' \cup s_2'$, gdje su s_1' i s_2' sada općenito kružnice, no mogu biti i pravci ako sadrže O_1. Možemo točke O_1 i O_2 izbaciti iz tog skupa jer one odgovaraju degeneriranim rješenjima.

Konstrukcija.

(1) Odaberemo $O \in k_1 \cap k_2$ i konstruiramo kružnicu inverzije s nekim radijusom $r > 0$.

(2) Konstruiramo pravce k_1' i k_2' kao inverznu sliku od zadanih kružnica k_1 i k_2.

(3) Konstruiramo simetrale s_1 i s_2 kutova zadanih pravcima k_1 i k_2.

(4) Konstruiramo kružnice (ili pravce ako sadrže O_1) s_1' i s_2'.

Drugo rješenje.

Analiza. Neka su c_1 i c_2 dvije kružnice koje se dodiruju u točki O te neka svaka od njih dira dane dvije kružnice $k_1 = k(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ (vidi Sliku 3). Možemo pretpostaviti zbog simetrije da je $r_1 \leq r_2$. Promotrimo inverziju $i[O, r^2]$ za neki broj $r > 0$. Tada se c_1 i c_2 preslikavaju u dvije linije c_1' i c_2' koje su paralelne s tangentom na c_1 i c_2 koja prolazi točkom O te vrijedi $O \notin c_1', c_2'$. Ako pretpostavimo da $O \notin k_1, k_2$, onda se k_1 i k_2 preslikavaju u kružnice k_1' i k_2' koje se također sijeku. Kako c_1 i c_2 diraju k_1 i k_2, onda i c_1' i c_2' diraju k_1' i k_2', tj. c_1' i c_2' su zajedničke tangente kružnica k_1' i k_2'.

Primijetimo da je zbog paralelnosti c_1' i c_2' to jedino moguće kada k_1' i k_2' imaju isti polumjer (vidi Sliku 4). Vidimo također da vrijedi i obrat: ako k_1' i k_2' imaju isti polumjer, onda imaju točno dvije zajedničke tangente koje su paralelne. Dakle traženi skup dirališta je skup svih točaka O za koji postoji broj r tako da inverzija $i[O, r^2]$ preslikava k_1 i k_2 u kružnice k_1' i k_2' s istim polumjerom.

Prisjetimo se formule koja nam daje kako se mijenjaju udaljenosti točaka pri inverziji $i[O, r^2]$. Ako se A i B preslikavaju u A' i B', tada vrijedi:

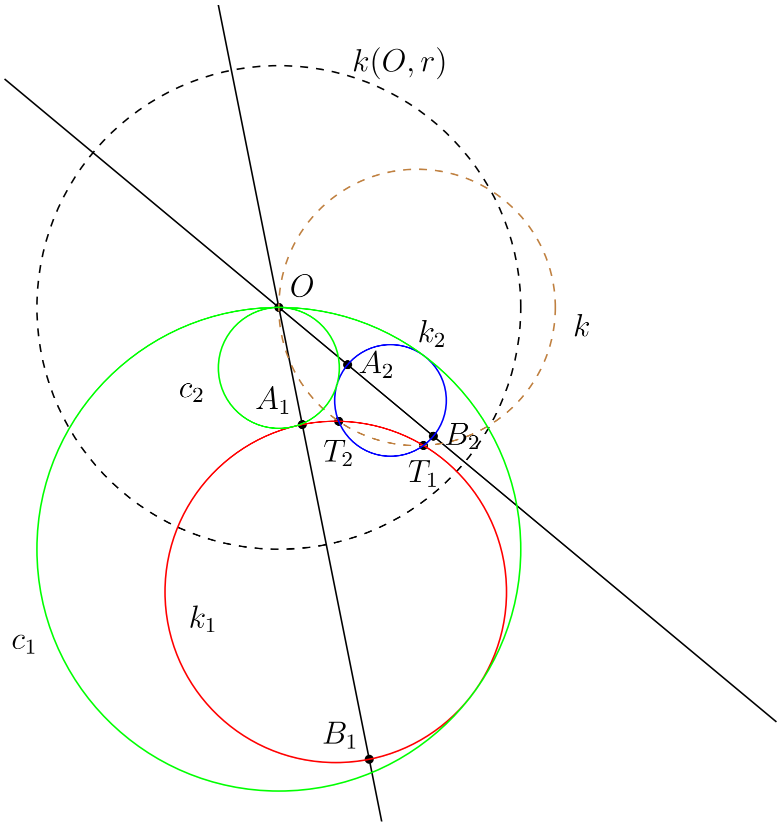
$$|A'B'| = \frac{r^2|AB|}{|OA|\,|OB|}.$$

Prisjetimo se da inverzija općenito ne preslikava središte kružnice u središte ("invertirane") kružnice, pa nema previše smisla gledati kamo se preslikava S_1T_1 za neki $T_1 \in k_1$. Umjesto toga pogledajmo pravce $p_1 = OS_1$ i $p_2 = OS_2$ i označimo $p_1 \cap k_1 = \{A_1, B_1\}$ i $p_2 \cap k_2 = \{A_2, B_2\}$ tako da je $|A_1B_1| = r_1$ i $|A_2B_2| = r_2$. Ako k_1' i k_2' imaju iste polumjere, onda koristeći gornju formulu dobijemo:

$$\frac{r^2|A_1B_1|}{|OA_1|\,|OB_1|} = \frac{r^2|A_2B_2|}{|OA_2|\,|OB_2|},$$

tj.

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{|OA_1|\,|OB_1|} &= \frac{r_2}{|OA_2|\,|OB_2|} \\ \iff \quad \frac{|OA_1|\,|OB_1|}{r_1} &= \frac{|OA_2|\,|OB_2|}{r_2}. \end{aligned}$$



Slika 3: Slika za zadatak 6 prije primjene inverzije (drugo rješenje).

Primjetimo da se r skrati, tj. da nije bilo bitno koji smo polumjer inverzije uzeli. Označimo li $|OS_1| = d_1$ i $|OS_2| = d_2$ možemo gornji izraz zapisati kao:

$$\frac{d_1^2 - r_1^2}{r_1} = \frac{d_2^2 - r_2^2}{r_2}.$$

Uzmemo li koordinatni sustav da je npr. $S_1 = (0,0)$, $S_2 = (x_2, 0)$ i $O = (x, y)$, lako se vidi da gornja jednadžba daje kružnicu (točka O je “nepoznanica”) ako $r_1 \neq r_2$ i pravac ako $r_1 = r_2$. U oba slučaja dobivena krivulja prolazi sjecištima $k_1 \cap k_2 = \{T_1, T_2\}$ (to je slučaj $d_1 = r_1$ i $d_2 = r_2$). Stoga preostaje promatrati još samo slučaj $r_1 \neq r_2$ jer nam treba još jedna točka zapotpuno odrediti traženu kružnicu na kojima se nalaze točke O.

Označimo s $d \coloneqq |S_1S_2|$ i odaberimo neku duljinu $t > 0$. Tada pogledajmo što možemo zaključiti ako

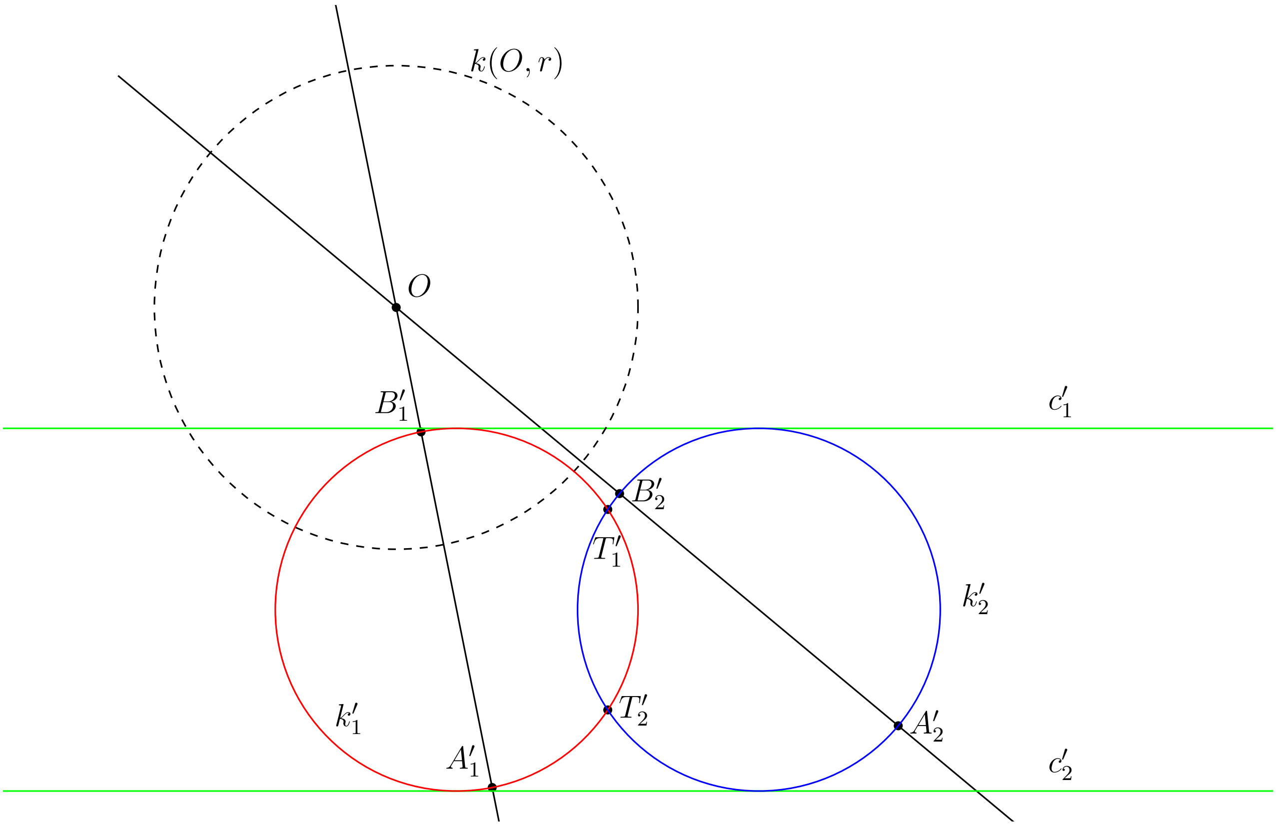
$$\frac{d_1^2 - r_1^2}{r_1} = \frac{d_2^2 - r_2^2}{r_2} = t.$$

(Može se gledati i slučaj kada je desna strana $-t$; to odgovara slučaju kada je O unutar kružnica k_1 i k_2.) Onda imamo jednadžbe

$$r_1^2 + tr_1 = d_1^2, \qquad r_2^2 + tr_2 = d_2^2.$$

Dakle, za svaki t možemo odrediti d_1 i d_2, pa će točka O biti na sjecištu kružnica $k(S_1, d_1)$ i $k(S_2, d_2)$ (ono će postojati ako i samo ako je zadovoljena nejednakost trokuta $|d_1 - d_2| \leq d \leq d_1 + d_2$). Za $t = 0$ dobijemo upravo točke $O = T_1, T_2$, a ako uzmemo dovoljno mali $t \neq 0$ (tako da nejednakost trokuta bude zadovoljena) dobit ćemo još dvije točke iz kojih onda možemo odrediti traženu kružnicu.

Konstrukcija.



Slika 4: Slika za zadatak 6 poslije primjene inverzije (drugo rješenje).

(1) Za dovoljno mali $t > 0$ konstruiramo duljine $\sqrt{tr_1}$ i $\sqrt{tr_2}$.

(2) Konstruiramo pravokutne trokute s katetama duljina r_1 i $\sqrt{tr_1}$ te r_2 i $\sqrt{tr_2}$. Tada su hipotenuze duljina d_1 i d_2.

(3) Konstruiramo kružnice $k(S_1, d_1)$ i $k(S_2, d_2)$ gdje su S_1 i S_2 središta zadanih kružnica $k_1 = k(S_1, r_1)$ i $k_2 = (S_2, r_2)$.

(4) Označimo $k_1 \cap k_2 = \{T_1, T_2\}$ i $k(S_1, d_1) \cap k(S_2, d_2) = \{P_1, P_2\}$. Konstruiramo kružnicu kroz točke te četiri točke – to je tražena kružnica.

Dokaz. Označimo konstruiranu kružnicu s k. Iz gornje analize se vidi da je nužno i dovoljno za sve točke O koje se ne nalaze na k_1 i k_2 da zadovoljavaju

$$\frac{d_1^2 - r_1^2}{r_1} = \frac{d_2^2 - r_2^2}{r_2} = t$$

za neki $t \in \mathbb{R}$, gdje je $|S_1O| = d_1$ i $|S_2O| = d_2$. Dakle sve točke na k (osim T_1 i T_2 jer se nalaze na obije kružnice k_1 i k_2 pa očito nema rješenja) zadovoljavaju traženi uvjet.

Rasprava. Kada je $r_1 = r_2$ za k se uzme pravac kroz T_1 i T_2. U suprotnome možemo uvijek konstruirati kružnicu k.

Preostaje raspraviti što se događa kada $O \in (k_1 \setminus k_2) \cup (k_2 \setminus k_1)$. Pokazat ćemo da skoro sve točke iz tog skupa također omogućuju konstrukciju kružnica c_1 i c_2. Neka bez smanjenja općenitosti vrijedi $O \in k_1 \setminus k_2$. Tada je k_1' pravac koji siječe kružnicu k_2' i paralelan je s tangentom na k_1 kroz O. Uzmemo li da su c_1' i c_2' pravci paralelni s k_1' i tangencijalni na k_2', onda ako $O \notin c_1, c_2$ tada će c_1, c_2 i k_1 biti kružnice koje se dodiruju u O te će c_1 i c_2 također dodirivati kružnicu k_2. U slučaju $O \in c_1'$ (odnosno $O \in c_2'$) će c_1 (odnosno c_2) biti pravac tangencijalan na k_1 i k_2, pa rješenje neće postojati – označimo s $Q_1, R_1 \in k_1$ i $Q_2, R_2 \in k_2$ točke u k_1 i k_2 kojima prolazi zajednička tangenta na k_1 i k_2.

Dakle, ako isključimo degenerirana rješenja (kada je barem jedna od kružnica c_1 i c_2 radijusa 0, što bi odgovaralo točki, ili radijusa ∞, što bi odgovaralo pravcu), skup traženih točaka je unija skupova k, k_1 i k_2 iz kojih treba isključiti točke $k_1 \cap k_2 = \{T_1, T_2\}$ i točke Q_1, Q_2, R_1, R_2.

Zadatak 7. Konstruirajte kružnicu k koja prolazi danom točkom O, dira danu kružnicu k_1 i ortogonalna je na danu kružnicu k_2.

Analiza. Neka $k_1 = k(S_1, r_1)$ i $k_2 = k(S_2, r_2)$. Promotrimo inverziju u odnosu na točku O s nekim (bilo kojim) polumjerom inverzije $r > 0$. Imamo nekoliko slučajeva, ovisno nalazi li se točka O na k_1 ili k_2. Primijetimo da će se tražena kružnica k uvijek preslikati u pravac k' koji ne prolazi točkom O.

Ako $O \in k_1 \cap k_2$, onda postoji rješenje ako i samo ako $k_1 \perp k_2$ – u tom je slučaju k bilo koja kružnica (različita od k_1) koja dodiruje k_1 u O.

Ako $O \notin k_1, k_2$, onda su k_1' i k_2' kružnice i treba biti zadovoljeno $k_1' \perp k'$, tj. k' prolazi središtem od k_1', i k' je tangencijalan na k_2'. Dakle za k' možemo uzeti tangente na k_1' kroz središte od k_2' (a one postoje ako i samo ako se središte od k_2' ne nalazi striktno unutar k_1'). Također O se ne smije nalaziti na odabranoj tangenti.

Ako $O \in k_1$ i $O \notin k_2$, onda je k_1' pravac koji ne prolazi kroz O, a k_2' kružnica. Za k' odaberemo (jedinstven) pravac paralelan s k_1' koji prolazi središtem od k_2'. Opet, taj pravac ne smije sadržavati točku O.

Konačno, ako $O \notin k_1$ i $O \in k_2$, onda je k_1' kružnica, a k_2' pravac. Pravac k' treba biti okomit na k_2' i tangencijalan na k_1'. Također, opet taj pravac koji odaberemo ne smije sadržavati točku O.

Konstrukcija. Konstrukcija ovisi u kojem smo od gornjih slučajeva – konstruiraju se k_1' i k_2' i pomoću gornje analize se ovisno o slučaju vidi kako konstruirati k'. Npr. u slučaju $O \notin k_1, k_2$ za k' možemo uzeti bilo koju tangentu na k_1' koja prolazi središtem od k_2', a da ne prolazi točkom O. To je trivijalna konstruktcija ako je moguća – i u svim ostalim slučajevima je ta konstrukcija lagana. Na kraju treba opet napraviti inverziju od k' da se dobije k, što daje rješenje.

Dokaz. Po konstrukciji traženo rješenje zadovoljava sve uvjete (ako postoji).

Rasprava. Već smo u analzi raspravili koji su točno uvjeti za svaki slučaj kada rješenje može postojati. Vidimo da ako rješenje postoji, onda ih može biti 1, 2, ili beskonačno, ovisno o slučaju.

Lj. Palle