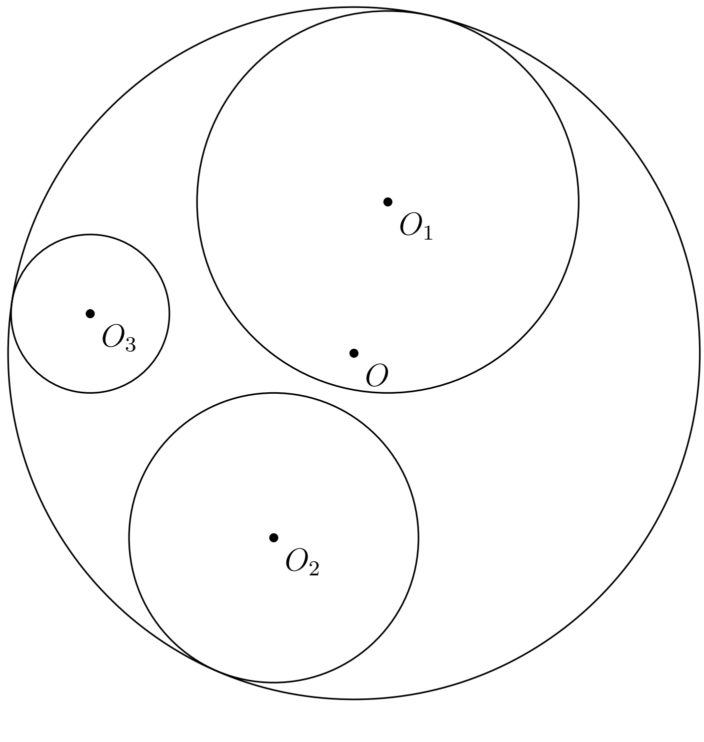
7 Apolonijev problem

U ovim se vježbama bavimo problemom koji je postavio i riješio poznati grčki matematičar Apolonije iz Perge. Problem je sljedeći: *Neka su dane tri kružnice u Euklidskoj ravnini. Treba pronaći i konstruirati sve kružnice koje diraju te zadane kružnice.* Postoji nekoliko načina na koji ga se može riješiti, a mi ćemo promotriti rješenje koje je pokazao francuski matematičar Joseph Diaz Gergonne (1771. - 1859.).

7.1 Generalni Apolonijev problem

kkk problem

Neka su dane kružnice $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$. Te tri kružnice mogu imati najviše osam kružnica koje su im tangencijalne. Naime, svaka se od te tri kružnice može nalaziti unutar ili izvan tangencijalne kružnice, što daje $2^3 = 8$ ukupnih mogućnosti.



Slika 1: Apolonijev problem i jedno moguće rješenje kada se sve tri kružnice nalaze unutar tangencijalne

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo kako je r_3 najmanji radijus od sva tri. U gore navedenoj skici, ako smanjimo radijuse svih kružnica za r_3, tangencijalnost promatranih kružnica neće se promijeniti. Označimo te novodobivene kružnice s $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ i $\tilde{k}$. Primjetimo da je k_3 ovakvom transformacijom svedena na točku O_3. Dakle, sveli smo kkk problem na kkT problem. Važno je za napomenuti to da u ovisnosti o tome koje rješenje želimo konstruirati, smanjujemo ili povećavamo radijuse početnih kružnica.

kkT problem

Glavni nam je zadatak konstruirati kružnicu koja prolazi zadanom točkom i dira dvije unaprijed zadane kružnice. Za rješavanje tog problema koristimo inverzije obrađene na prethodnim vježbama. Promotrimo inverziju i sa središtem u O_3 neke potencije ρ^2. Dobra je ideja za izbor ρ^2 primjerice odsječak tangente iz O_3 na neku od kružnica do dirališta jer se u tom slučaju ta kružnica preslika u samu sebe (razlog je ortogonalnost). Označimo s

$$
\begin{aligned}
i(\tilde{k_1}) &= \tilde{k}_1' \\
i(\tilde{k_2}) &= \tilde{k}_2'.
\end{aligned}
$$

Obje te slike opet su kružnice jer $\tilde{k_1}$ i $\tilde{k_2}$ ne prolaze kroz O_3. S druge pak strane, kako će $\tilde{k}$ prolaziti kroz O_3, znamo da ju u inverznoj slici tražimo kao pravac koji ne prolazi kroz O_3, a dira $\tilde{k}_1'$ i $\tilde{k}_2'$. Sada gledamo zajedničke tangente na $\tilde{k}_1'$ i $\tilde{k}_2'$. U ovisnosti o položaju tih kružnica, moguće je pet slučajeva:

- Ako se jedna kružnica nalazi unutar druge te nemaju zajedničkih točaka, očito je da zajednička tangenta ne postoji.
- Ako se jedna kružnica nalazi unutar druge te se one dodiruju, postoji jedinstvena zajednička tangenta.
- Ako se kružnice presijecaju u dvije točke, postoje dvije zajedničke tangente.
- Ako se kružnice dodiruju izvana, postoje tri zajedničke tangente.
- Ako se niti jedna kružnica ne nalazi unutar druge te se one ne presijecaju, postoje četiri zajedničke tangente.

Preslikajmo sada te zajedničke tangente po inverziji i. Označimo jednu od tangenti s t. Ako t ne prolazi kroz O_3, dobivamo da je $i(t)$ kružnica koja prolazi kroz O_3 koja dira i k_1 i k_2. Dakle, dobili smo traženu kružnicu te smo time riješili kkT problem. Postavlja se pitanje: kako sada rekonstruirati rješenje za kkk problem. Odgovor je povećavanjem ili smanjivanjem radijusa od $\tilde{k}_1$ i $\tilde{k}_2$ za r_3 što je ekvivalentno početnom povećavanju ili smanjivanju originalnih kružnica k_1 i k_2. Imamo dakle ukupno četiri mogućnosti

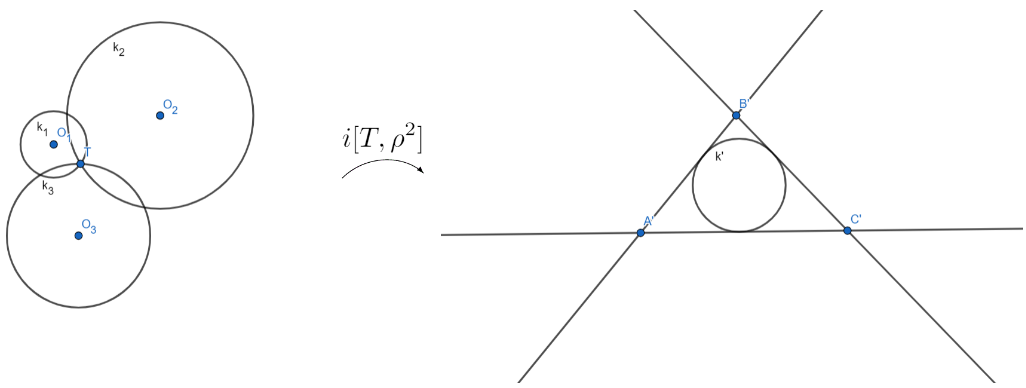
- k_1 povećamo, k_2 povećamo
- k_1 smanjimo, k_2 povećamo
- k_1 povećamo, k_2 smanjimo
- k_1 smanjimo, k_2 smanjimo,

a svaka od tih mogućnosti može dati najviše dva rješenja. Dakle, ukupno smo dobili maksimalnih 8 potencijalnih rješenja.

7.2 Primjeri nekih drugih metoda u posebnim slučajevima

Kružnice koje imaju zajedničku točku

Pretpostavimo kako k_1, k_2 i k_3 prolaze istom točkom T. Tada je prirodno gledati inverziju $i[T, \rho^2]$ za neki ρ. U tom slučaju se početne kružnice preslikaju u pravce k_1', k_2' i k_3'. Označimo s A', B' i C' točke presjeka tih pravaca. One formiraju trokut kojem upišemo kružnicu k' te promatrajmo sliku od k' po inverziji $i[T, \rho^2]$. Kako k' dira svaki od pravaca k_1', k_2' i k_3', slijedi da je $i[T, \rho^2](k')$ kružnica k koja dira k_1, k_2 i k_3 i ne prolazi kroz T. Time smo dobili traženu kružnicu.

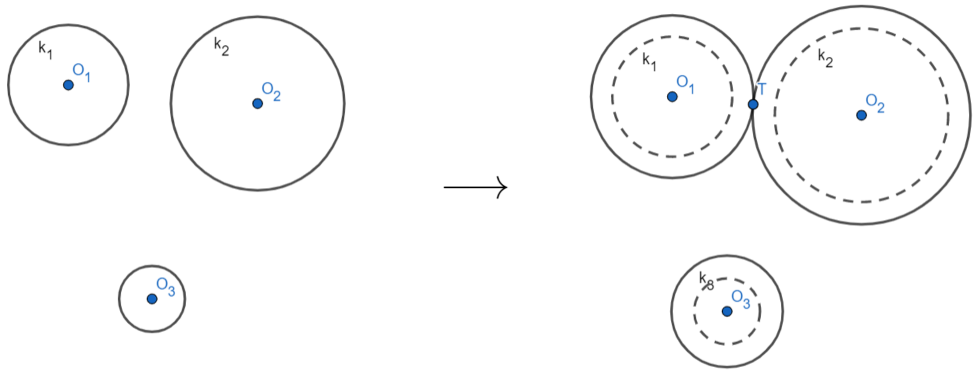


Slika 2: Slučaj kada kružnice prolaze kroz zajedničku točku

Kružnice u međusobno dijsunktnom položaju

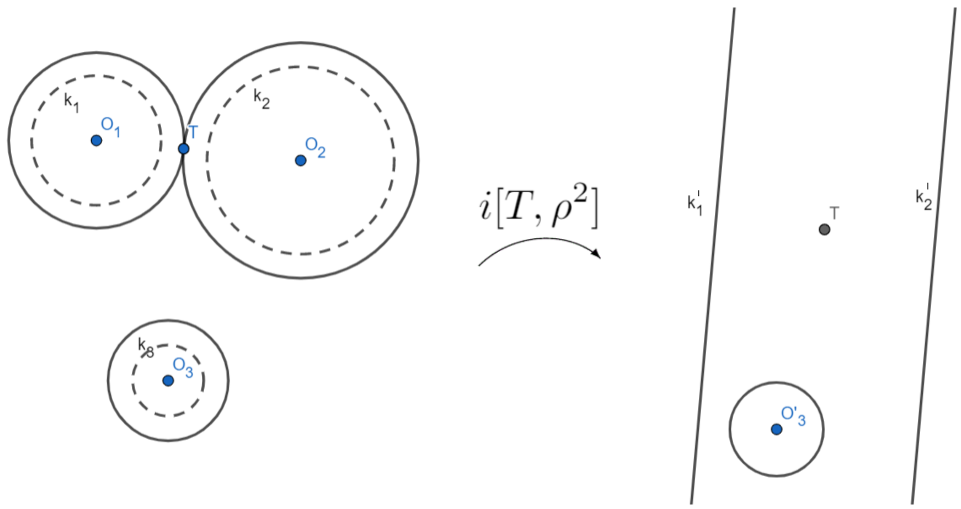
Neka su sada k_1, k_2 i k_3 u takvom položaju da međusobno nemaju zajedničkih točaka te se niti jedna ne nalazi unutar druge. Konstrukcija Apolonijeve kružnice može se načiniti kao i u kkk problemu, ali u ovom ćemo specifičnom slučaju napraviti jedan drugačiji pristup. Naime, izaberemo dvije kružnice koje su najmanje udaljene (označimo tu udaljenost sa d) te povećamo radijuse svih kružnica za $d/2$ tako da se prve dvije dodiruju u točki T. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti kako se radi o prve dvije kružnice. Kako bismo uštedili oznake, smatrajmo kako k_1, k_2 i k_3 sada označuju ovako transformirane kružnice.

Sada je prirodno za promatrati inverziju sa središtem u točki T proizvoljne



Slika 3: Povećavanje radijusa za $d/2$

potencije ρ^2. Kako su k_1 i k_2 kružnice koje prolaze kroz središte inverzije, njihove inverzne slike $i(k_1)$ i $i(k_2)$ su pravci koji ne prolaze kroz T. Štoviše, ti pravci su paralelni. Naime, kada bi postojala točka S takva da je $S \in i(k_1) \cap i(k_2)$, tada bi $i(S) \in k_1 \cap k_2$. Dakle, vrijedilo bi $i(S) = T$, što svakako nije moguće jer T nije u domeni inverzije. Kako k_3 ne prolazi kroz T, inverzna slika je kružnica. Pretpostavimo kako smo uzeli ρ^2 dovoljno mali da se k_3' nalazi između k_1' i k_2'. Imamo sada sljedeću situaciju:



Slika 4: Inverzna slika u ovom slučaju

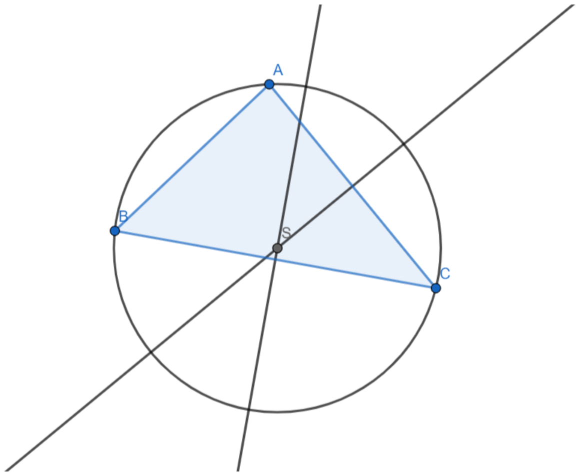
Tražimo kružnicu k' koja dira pravce k_1' i k_2' te kružnicu k_3'. Postoje dvije takve kružnice, u ovisnosti s koje strane priđemo kružnici k_3'. U konačnici, koju god kružnicu da odaberemo, vratimo sada po inerziji u početnu situaciju te napravimo povećanje/smanjenje radijusa.

7.3 Srodni problemi

Primijetimo kako smo u prethodnim razmatranjima prvenstveno promatrali kkk problem. Međutim, kružnice možemo zamijeniti i drugim geometrijskim objektima.

TTT problem

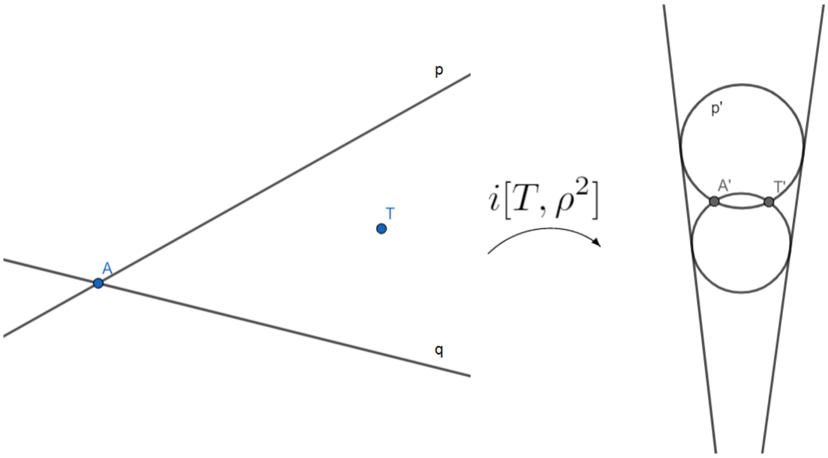
Neka su dane tri nekolinearne točke u ravnini. Znamo da u tom slučaju postoji jedna i samo jedna kružnica koja prolazi kroz sve tri točke. Konstrukcija je vrlo jednostavna, spojimo te tri točke u trokut te promotrimo sjecište simetrala stranica. To sjecište je središte opisane kružnice što je rješenje problema.



Slika 5: TTT problem

Tpp **problem**

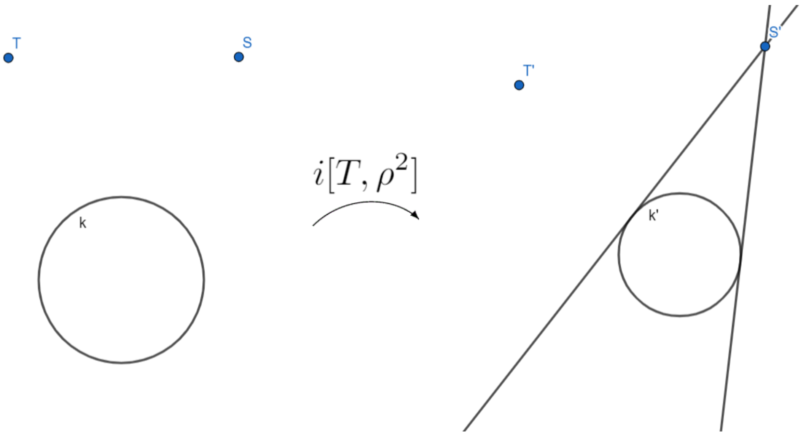
Neka su dana sada dva pravca p i q koji se sijeku u točki A te neka je dana točka T koja se ne nalazi niti na jednom od ta dva pravca. Želimo pronaći kružnicu koja dira oba pravca te prolazi kroz T. Promotrimo inverziju sa središtem u točki T neke potencije ρ^2. Kako p i q ne prolaze kroz T, to su njihove slike p' i q' dvije kružnice koje prolaze kroz T. Dakle, p' i q' sijeku se u dvije točke, A' i T. Postoje dvije tangente na p' i q', označimo ih s t_1' i t_2'. One ne prolaze kroz T, pa kad ih po inverziji preslikamo, dobivamo t_1 i t_2 koje su kružnice koje prolaze kroz T i diraju p i q.



Slika 6: Tpp problem

TTk **problem**

Neka je dana kružnica k i dvije točke T i S izvan te kružnice. Promatramo inverziju sa središtem u T neke potencije ρ^2. Kako k ne prolazi kroz T, tada je k' opet kružnica koja ne prolazi kroz T. Provučemo tangentu iz S' na k'. Očito, postoje dvije mogućnosti. Označimo te tangente s t_1' i t_2'. Preslikamo sada t_1' i t_2' po inverziji te dobivamo kružnice t_1 i t_2 koje prolaze kroz T. Kako po konstrukciji t_1 i t_2 prolaze kroz S i diraju k, problem je riješen.



Slika 7: TTp problem

Zadaci za vježbu

Vidjeli smo u prethodnim primjerima kako se primjenom inverzije te korištenjem njezinim svojstvima vrlo jednostavno rješavaju problemi koji zahtijevaju konstrukciju kružnice koja dira određene geometrijske objekte. Idući zadaci služe studentima za vježbu.

1. Neka su dane dvije točke te pravac koji ne prolazi tim točkama. Konstruirajte kružnicu koja prolazi kroz dane točke te dira dani pravac.

2. Neka su dana dva pravca koja se sijeku te kružnica koju ti pravci ne presijecaju. Konstruirajte kružnicu koja dira oba pravca i danu kružnicu.

3. Neka su dana tri nekolinearna pravca. Konstruirajte kružnicu koja dira sva tri pravca.

4. Neka su dane dvije kružnice i pravac koji ne siječe te dvije kružnice. Konstruirajte kružnicu koja dira obje kružnice i pravac.

T. Kralj