12 Konstrukcije ograničenim sredstvima

Do sada smo se bavili euklidskim konstrukcijama tj. konstrukcijama ravnalom i šestarom. Pritom se misli na tzv. idealno jednobridno ravnalo i idealni šestar.

Jednobridno ravnalo je neoznačeno i njime možemo spojiti bilo koje dvije točke dužinom. U stvarnosti smo ograničeni duljinom ravnala. Stvarna ravnala imaju obično drugu paralelnu stranu. Zanimljivo je ispitati konstrukcije u kojima smijemo koristiti tu drugu stranu tj. možemo povlačiti paralelne pravce na unaprijed zadanoj udaljenosti (širina ravnala). Tada govorimo o dvostranom ravnalu.

Idealni šestar je instrument kojim crtamo kružnice proizvoljnog polumjera. Otvor idealnog šestara možemo odabrati po volji za razliku od stvarnog šestara koji ima neki maksimalni otvor. Možemo zamisliti i zahrđali šestar kojem se otvor ne može mijenjati, kojim se mogu crtati samo kružnice unaprijed određenog polumjera.

U ovom poglavlju ćemo dati (detaljne) smjernice (tj. ideje) kako da konstrukciju provedete. Na vama je da ju uistinu i provedete.
Ideja ovog poglavlja nije učenje šablona na pamet, već snalaženje u "čudnim" situacijama.
Uživajte i sretno!
Vjerujemo da nije potrebno napominjati kako je izrazito poželjno da svaki zadatak najprije pokušate samostalno riješiti.

1. Dan je trokut i jedna njegova srednjica. Konstruirajte druge dvije srednjice koristeći samo ravnalo.

   Ideja. Sjetimo se činjenice da sve tri težišnice trokuta prolaze jednom točkom – težištem trokuta.

   Ukoliko znamo točku težišta, onda znamo i polovište stranice na koju je dana srednjica paralelna. No, sada smo zapravo i odredili preostale dvije srednjice, one su naprosto spojnice novopronađenog polovišta stranice s polovištima (krajevima dane srednjice) koje već znamo.

   Kako naći težište? Zapravo jednostavno, ono je presjek dvije težišnice koje su nam zapravo dane, naprosto spojimo dana polovište stranica trokuta (tj. krajnje točke dane srednjice) s pripadajućim vrhovima trokuta.

2. Dana je kružnica i njen promjer, te točka T (koja se ne nalazi na danom promjeru). Konstruirajte okomicu iz točke T na promjer kružnice koristeći samo ravnalo.

   Ideja. Situacija je zapravo jako slična prethodnom zadatku – samo se trebamo sjetiti da sve tri visine trokuta prolaze jednom točkom – ortocentrom trokuta.

   Neka su krajevi danog promjera točke A i B. Neka je točka A' drugi presjek pravca AT s danom kružnicom. Slično, neka je točka B' drugi presjek pravca BT s danom kružnicom. Neka je točka C presjek pravaca AB' i BA'. Po Talesovom teoremu su kutovi $\sphericalangle AA'B$ i $\sphericalangle BB'A$ pravi, što znači da je točka T ortocentar trokuta ABC.

   Konačno to znači da je pravac CT okomit na AB i to je naša tražena okomica.

3. Dane su točke A i B. Koristeći samo šestar konstruirajte točku P kolinearnu s danim točkama takvu da je $|AP| = 4|AB|$ i B se nalazi između A i P.

   Ideja. Jednakostranični trokut! Najprije konstruiramo točku C takvu da je trokut ABC jednakostraničan, zatim konstruiramo točku D (različitu od A) takvu da je trokut BDC jednakostraničan. Sada konstruiramo točku F (različitu od C) takvu da je trokut BFD jednakostraničan. Točka F je kolinearna s točkama A i B te vrijedi da je $|AF| = 2|AB|$ i točka B se nalazi između A i F. Ponavljajući isti postupak lako dolazimo do tražene točke P.

4. Dane su točke A i B. Koristeći samo šestar konstruirajte polovište dužine $\overline{AB}$.

   Ideja. Konstruirajmo točku C takvu da je $|AC| = 2|AB|$, točke A, B i C su kolinearne te je točka B između točaka Ai C. Neka su točke T_1 i T_2 presjeci kružnice sa središtem u A i polumjerom $|AB|$ i kružnice sa središtem u C i polumjerom CA.

   Sa središtem u točki T_1 povucimo kružnicu radijusa $|AT_1|$, također, sa središtem u točki T_2 konstruirajmo kružnicu radijusa $|AT_2|$. Presjek tih kružnica su dvije točke – točka A i točka P. Tvrdimo da je točka P naša tražena točka.

   Pokušajte to sami dokazati, svi sastojci dokaza su već navedeni. Ključno je uočii da su trokuti APT i ATC slični.

5. Koristeći ravnalo konačne duljine l i šestar maksimalnog otvora r konstruirajte dužinu $\overline{AB}$ ako su dane točke A i B udaljene za manje od $2r$ i više od l.

   Ideja 1. Konstruirajmo najprije točke T_1 i T_2 takve da je pravac T_1T_2 simetrala dužine $\overline{AB}$. Naime, sa središtem u točki A konstruiramo kružnicu radijusa r i sa središtem u B kružnicu radijusa r. Zapravo, konstruiramo kružnice koje su radijusa većeg od pola duljine dužine $\overline{AB}$, a manje od cijele njene duljine.

   Presjeci te dvije kružnicu su tražene točke T_1 i T_2. Kao u prethodnom zadatku možemo konstruirati polovište dužine $\overline{T_1T_2}$ (samo šestarom, tako da nas ne brinu ograničenja na duljinu ravnala). Neka je to točka P, primijetimo da je točka P također i polovište dužine $\overline{AB}$.

   Ponavljamo ovaj postupak, sada raspolovimo dužine $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$ sve dok dobiveni "komadići" dužine $\overline{AB}$ ne budu po duljini manji od ili jednaki l. U tom trenutku ih jednostavno sve pospajamo ravnalom.

   Ideja 2. Kao i na početku prethodne ideje, konstruiramo točke T_1 i T_2. Primijetimo da možemo postići da su one "dovoljno blizu". Naime, samo želimo da su udaljene za manje od $2r$. Sada konstruirajmo sukladne kružnice čiji je polumjer veći od polovice duljine $|T_1T_2|$ sa središtima u T_1 i T_2. Te dvije kružnice se sijeku u 2 točke koje leže na pravcu AB. Produljujemo spojnicu tih točaka na obje strane sve dok ne dobijemo dužinu $\overline{AB}$.

6. Dane su točke A i B udaljene barem d. Dvobridnim ravnalom širine d konstruirajte točku C tako da je B polovište dužine $\overline{AC}$.

   Ideja. Dvobridno ravnalo postavimo tako njegovi rubovi sijeku pravac AB u točkama A i B. Dobili smo dva paralelna pravca, a koji prolazi točkom A i b koji prolazi točkom B. Postavimo dvobridno ravnalo tako da mu jedan rub odgovara pravcu b, drugim rubom povucimo pravac c. Presjek pravca c s pravcem AB je naša tražena točka C.

U sljedećih nekoliko zadataka ćemo koristiti sljedeće.

Tvrdnja 1. Polovišta osnovica, sjecište dijagonala i sjecište krakova trapeza leže na jednom pravcu.

Ovo je dokazano na vježbama na kolegiju Elementarna geometrija, za dokaz se koristit homotetija, riječ je o zadatku 13 u poglavlju 7. Preslikavanja ravnine.

Ovu tvrdnju možete dokazati i koristeći Teorem 4.5 (stranica 55) u skripti za predavanja.

7. Dana je dužina $\overline{AB}$, njeno polovište P te točka T koja nije na pravcu AB. Konstruirajte paralelu s pravcem AB točkom T koristeći samo ravnalo.

   Ideja. Na produžetku dužine $\overline{AT}$ preko točke T odaberimo točku C (bilo gdje). Neka je točka S presjek dužina $\overline{BT}$ i $\overline{CP}$, neka je točka D presjek pravca AS i dužine $\overline{BC}$. Pravac TD je traženi pravac.

   Ono što zapravo treba dokazati je: četverokut $ABDT$ je trapez, kako biste to pokazali?

8. Dana su dva paralelna pravca i točke A i B na jednom od njih. Konstruirajte polovište dužine $\overline{AB}$ koristeći samo ravnalo.

   Ideja. Na pravcu na kojem se ne nalaze točke A i B odaberimo proizvoljne dvije točke, C i D. Sada nam je četverokut $ABCD$ trapez pa koristimo Tvrdnju 1 kako bismo dovršili konstrukciju. Naime, traženo polovište leži na pravcu koji je spojnica točke presjeka krakova i točke presjeka dijagonala trapeza.

9. Dana su dva paralelna pravca i točka T izvan njih. Konstruirajte pravac točkom T paralelan zadanim pravcima koristeći samo ravnalo.

   Ideja. Na jednom od pravaca odaberemo točke A i B, zatim kao u prethodnom zadatku (8) konstruiramo točku P koja je polovište dužine $\overline{AB}$. Na kraju, kao u zadatku 7 konstruiramo traženi pravac.

10. Dane su točke A i B. Dvobridnim ravnalom konstruirajte polovište dužine $\overline{AB}$.

    Ideja 1. Najprije, dvobridnim ravnalom konstruiramo paralelu na pravac AB, a zatim nastavljamo kao u zadatku 8

    Ideja 2. Slično kao u zadatku 6 najprije konstruiramo "prugu" na čijim rubovima leže točke A i B koja je "nagnuta lijevo", a zatim i onu koja je "nagnuta desno". Presjek te dvije pruge je romb čije sjecišta dijagonala je traženo polovište dužine $\overline{AB}$. Ova konstrukcija funkcionira samo ako su točke A i B udaljene za više od širine dvobridnog ravnala.

11. Dane su točke A i B i dva pravca paralelna s AB. Konstruirajte točku C tako da je B polovište od $\overline{AC}$ koristeći samo ravnalo.

    Ideja 1. Odaberimo točke D i E na jednom od dana dva paralelna pravca (koji ne sadrže točke A i B), koristeći preostali dani paralelni pravac, kao u zadatku 8 konstruiramo polovište dužine $\overline{DE}$, neka je to točka P. Neka je točka R presjek pravaca AD i BP. Tražena točka C je presjek pravca RE s pravcem AB. Dokažite to! Naravno, imajte na umu Tvrdnju 1.

    Ideja 2. Točkom B provucimo neki pravac te neka on siječe jedan od zadanih pravaca, pravac p u P, a drugi, pravac q u Q. Neka je $S = PA \cap q$, neka je $R = BS \cap p$. Dokažite da je tada tražena točka $C = QR \cap AB$. Koristite već spomenuti Teorem 4.5 (stranica 55) iz skripte za predavanja.

12. Dani su točka T i pravac p. Konstruirajte paralelu s p točkom T koristeći dvobridno ravnalo.

    Ideja 1. Na pravcu p izaberemo dvije točke, A i B, konstruiramo polovište dužine $\overline{AB}$, kao u zadatku 10, neka je to točka P. Sada se nalazimo u polaznoj situaciji za zadatak 7 te analogno i nastavljamo.

    Ideja 2. Na pravcu p izaberimo neku točku A te neka je a pravac AT. Neka su b i c dva različita paralelna pravca na pravac a, tako da je pravac b udaljen i od pravca a i od pravca c za širinu dvobridnog ravnala. Neka je $b \cap p = B$ i $c \cap p = C$. Nadalje, točka $D = TC \cap b$ je polovište dužine $\overline{TC}$. Neka je $E = AD \cap c$, tada je četverokut $ACET$ paralelogram pa je naš traženi pravac upravo pravac TE.

13. Konstruirajte kvadrat koristeći samo dvobridno ravnalo.

    Ideja. Povucimo bilo gdje dva paralelna pravca te njih presjecimo s druga dva paralelna pravca. Dakle, presjekli smo dvije "pruge". Njih presjek je romb (dokažite to!). Dijagonale romba se sijeku pod pravim kutom, tj. konstruirali smo pravi kut! Sada u tom kutu napravimo presjek dvije pruge (za koje sada znamo da su međusobno okomite. Dobili smo romb čiji je jedan unutarnji kut pravi – dakle, dobili smo kvadrat.

14. Dan je kut $\sphericalangle aOb$ i točka A na kraku a. Dvobridnim ravnalom konstruirajte točku B na kraku b tako da je $OB = OA$.

    Ideja 1. Dvobridnim ravnalom konstruiramo romb čiji jedan kut jednak upravo danom kutu. Neka je to romb $OPQR$ i to tako da je točka P na pravcu A te točka Q na pravcu b. Pravac OQ je simetrala danog kuta. Neka je $S = AR \cap OQ$, tada je naša tražena točka $B = PS \cap b$. Dokažite to.

    Ideja 2. Kao u zadatku 12 konstruiramo paralelu na pravac b točkom A, neka je to pravac b'. Dvobridnim ravnalom konstruiramo prugu kojoj je jedna granica pravac b' i prugu kojoj je jedna granica pravac a. Presjek te dvije pruge je romb (napravimo tako da se romb nalazi unutar danog kuta) čiji je jedan vrh točka A. Neka je vrh nasuprot A jednak X. Tražena točka B je presjek pravca AX s pravcem b. Dokažite to! (Zapravo se pokaže da je trokut AOB jednakokračan, a to slijedi zato što je sličan polovici dobivenog romba!) Napomenimo da ovakva konstrukcija prolazi samo ako naš romb "stane" u dani kut.

15. Dana su dva paralelna pravca i na jednom točke A i B. Konstruirajte točku C na pravcu AB (različitu od A) tako da je $|AB| = |BC|$. Koristite samo ravnalo!

    Ideja. Zapravo skoro pa isto kao zadatak 11 (prva ideja). Naime, samo u prvom koraku jednastavno pravac AB koristimo kao "pomoćni" pravac.

16. Dana je kružnica i njeno središte S. Koristeći samo ravnalo konstruirajte tri paralelna pravca tako da je jedan jednako udaljen od druga dva.

    Ideja. Neka je $\overline{AB}$ bilo koji promjer dane kružnice. Neka je M bilo koja točka te kružnica različita od A i B. Kao u zadatku 7 konstruiramo paralelu na AB točkom M. Na taj način dobijemo tetivu $\overline{MN}$. Ukoliko je točka M takva da je dobivena paralela zapravo tangenta na danu kružnicu, izaberimo neku drugu točku M.

    Neka je O sjecište dijagonala trapeza $ABMN$, taj trapez je jednakokračan pa znamo da je OS okomito na AB. Neka je $\overline{XY}$ promjer dane kružnice koji leži na pravcu OS.

    Točkama X i Y konstruiramo pravce paralelne s AB (postupak iz zadataka 7). Ta dva pravca zajedno s pravcem AB su traženo rješenje.

17. Dana je kružnica i njeno središte, te pravac p i točka T. Koristeći samo ravnalo konstruirajte paralelu s pravcem p kroz točku T.

    Ideja. Neka je $\overline{AB}$ bilo koji promjer dane kružnice takav da pravac AB siječe pravac p u točki C. Neka je $\overline{DE}$ neki drugi promjer dane kružnice i neka pravac DE siječe pravac p u točki F.

    Koristeći zadatak 7 znamo točkom A konstruirati pravac paralelan pravcu DE, neka on siječe pravac p u X.

    Analogno, točkom B konstruirajmo pravac paralelan pravcu DE te neka on siječe pravac p u točki Y.

    Primijetimo da je p zapravo pravac XY te da je točka F polovište dužine $\overline{XY}$. Konačno, koristeći zadatak 7 znamo konstruirati paralelu na pravac p (tj. na pravac XY) točkom T.

18. Dana je kružnica, njeno središte i jedan njen promjer. Koristeći samo ravnalo konstruirajte promjer kružnice okomit na dani promjer.

    Ideja. Postupimo analogno kao na početku rješenja zadatka 16.