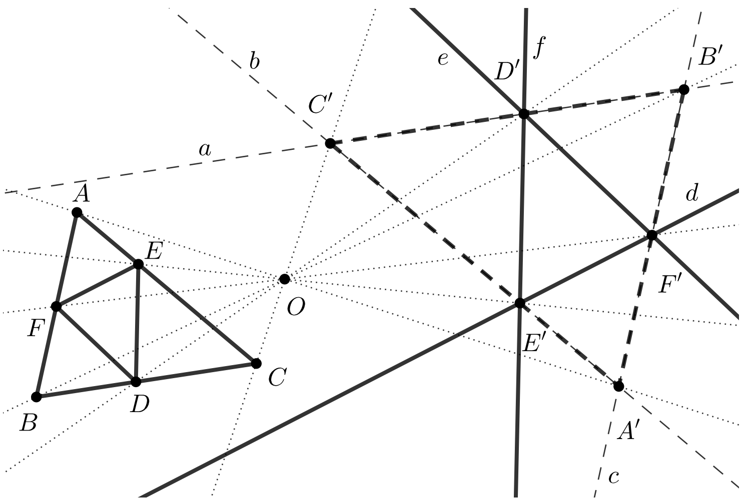
5 Homotetija

1. U dani trokut ABC upišite trokut DEF tako da je $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{CA}$, $F \in \overline{AB}$ i da su stranice $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ i $\overline{DE}$ redom paralelne danim pravcima d, e i f.

   Analiza. Promotrimo obratnu situaciju. Preciznije, neka je $D'E'F'$ trokut određen pravcima d, e i f ($D' = e \cap f$, $E' = f \cap d$, $F' = d \cap e$). Neka je $A'B'C'$ trokut takav da je $D' \in \overline{B'C'}$, $E' \in \overline{C'A'}$, $F' \in \overline{A'B'}$ te $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ i $\overline{C'A'} \parallel \overline{CA}$. Pravci AA', BB' i CC' prolaze jednom točkom, neka je to točka O. Homotetija s centrom u točki O koja preslikava trokut $A'B'C'$ u trokut ABC tada preslikava trokut $D'E'F'$ u traženi trokut DEF.

   Konstrukcija.

   - neka je $D' = e \cap f$, $E' = f \cap d$ i $F' = d \cap e$
   - neka je a pravac koji prolazi točkom D' i paralelan je pravcu BC te slično neka su b i c pravci takvi da je $E' \in b$ i $F' \in c$ te $b \parallel CA$ i $c \parallel AB$
   - neka je $A' = b \cap c$, $B' = c \cap a$ i $C' = a \cap b$
   - neka je $O = AA' \cap BB' \cap CC'$
   - sada znamo vrhove traženog trokuta DEF: $D = OD' \cap BC$, $E = OE' \cap CA$ te $F = OF' \cap AB$



   Dokaz. Slijedi direktno. Naime, točke D, E i F su po svojoj definiciji redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ te su odgovarajući pravci paralelni pravcima d, e i f. Pitanje za čitatelje, zašto pravci AA', BB', CC' prolaze jednom točkom?

   Rasprava. Jedino je bitno da postoji trokut $D'E'F'$, tj. da nikoja dva među pravcima d, e i f nisu paralelna i da ne prolaze sva tri istom točkom. Nadalje, definiramo točku O kao presjek pravaca AA', BB' i CC'. Mora li ta točka nužno postojati? Ne mora! No, ona ne postoji jedino ako su ti pravci međusobno paralelni. U tom slučaju je trokut DEF naprosto translacija trokuta $D'E'F'$ za vektor $\overrightarrow{A'A}$.

2. Konstruirajte kružnicu koja prolazi danom točkom A i dira dva dana (neparalelna) pravca b i c.

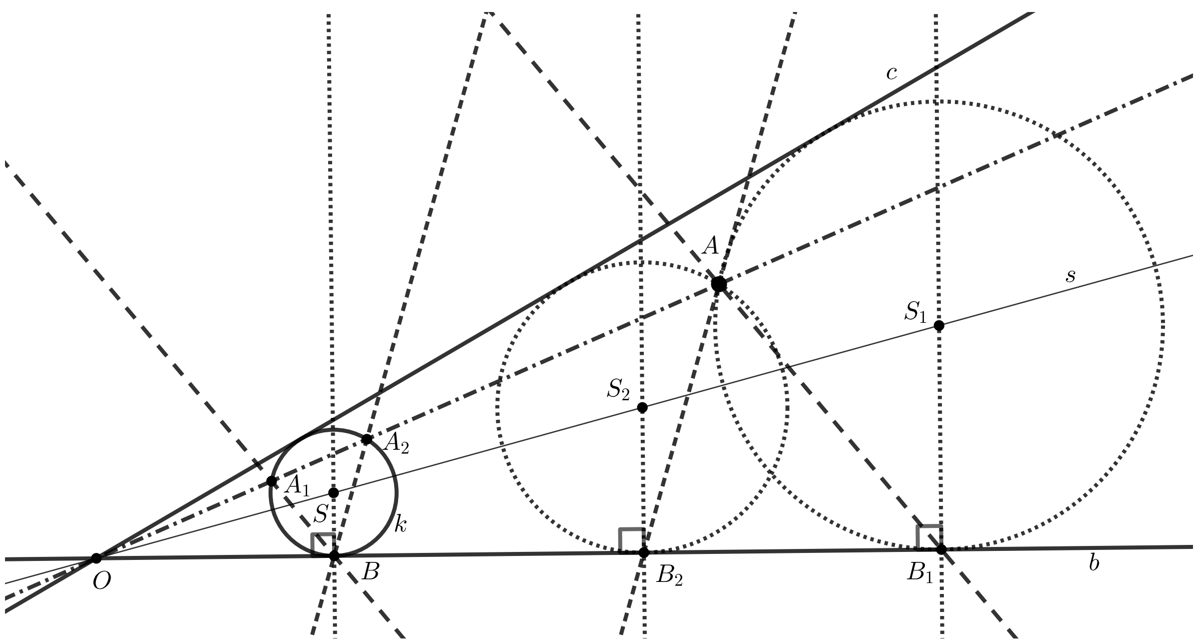
   Analiza. Neka je točka O presjek pravaca b i c. Pretpostavimo najprije da točka A nije na pravcu b, ni na pravcu c. Pravci b i c određuju 4 kuta, promotrimo onaj u kojem se nalazi točka A. U tom kutu konstruirajmo bilo koju kružnicu koja dodiruje pravce b i c, neka je to kružnica k. Neka pravac OA siječe tu kružnicu u točkama A_1 i A_2. Homotetija s centrom u točki O koja preslikava točku A_1 u točku A preslikava kružnicu k u jedno od dva rješenja, a homotetija s centrom u O koja preslikava A_2 u A daje drugo rješenje.

Ukoliko se točka A nalazi na nekom od pravaca, neka je bez smanjenja općenitosti to pravac b. Neka su S_1 i S_2 točke presjeka simetrala kutova među pravcima b i c s okomicom na pravac b kroz točku A. Tražena rješenje su tada kružnice sa središtem u S_1, odnosno S_2 i radijusom $|S_1A|$, odnosno $|S_2A|$. Jasno je da rješenje nema ukoliko se točka A nalazi na presjeku pravaca b i c.

Konstrukcija. Navodimo ju samo u slučaju kada točka A nije ni na pravcu b, ni na pravcu c. Čitatelj neka sam opiše konstrukciju u slučaju kada je točka A na pravcu b.

- neka je O presjek pravaca b i c
- konstruirajmo simetralu s onog kuta među pravcima b i c u kojem se nalazi točka A
- na s odaberimo bilo koju točku, nazovimo ju S te povucimo tom točkom okomicu na pravac b, neka je to pravac b'
- neka je presjek pravaca b i b' točka B, konstruirajmo kružnicu sa središtem u točki S i radijusom $|SB|$, neka je to kružnica k
- neka su A_1 i A_2 točke presjeka kružnice k s pravcem OA
- neka je točka B_1 presjek pravca b s paralelom na pravac A_1B kroz točku A te slično neka je točka B_2 presjek pravca b s paralelom na pravac A_2B kroz točku A
- neka je točka S_1 presjek simetrale s s pravcem kroz točku B_1 koji je okomit na b te neka je točka S_2 presjek simetrale s s pravcem kroz točku B_2 koji je okomit na pravac b
- kružnica sa središtem u S_1 i radijusom $|S_1B_1|$ kao i kružnica sa središtem u S_2 i radijusom $|S_2B_2|$ su (jedina dva) tražena rješenja

Još jednom napomenimo da (znatno jednostavniju) konstrukciju u slučaju kada se točka A nalazi na nekom od pravaca b ili c ostavljamo čitatelju. Ukoliko je točka A jednaka točki O (tj. presjeku pravac b i c) rješenja nema.



Dokaz. Označimo konstruirane kružnice s k_1 i k_2. Iz same konstrukcije je jasno da te kružnice dodiruju pravce b i c. Ono što preostaje dokazati je da se točka A nalazi na njima. Jasno je da je tu činjenicu dovoljno dokazati za npr. kružnicu k_1. Tvrdnja za kružnicu k_2 se tada analogno dokazuje. Kako bismo dokazali da točka A leži na kružnici k_1 nužno je i dovoljno pokazati da je $|S_1A| = |S_1B_1|$. Međutim, primijetimo da homotetija sa središtem u točki O koja šalje točku A_1 u točku A šalje i $S \to S_1$ te $B \to B_1$ (Znate li to dokazati?). Kako je $|SA_1| = |SB|$, zaključujemo da je $|S_1A| = |S_1B_1|$ čime je dokaz gotov.

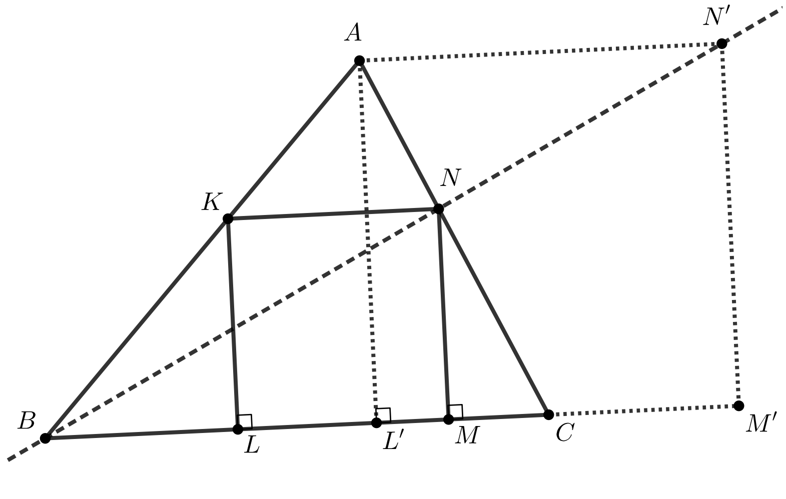
Rasprava. Kao što smo već komentirali nekoliko puta — konstrukcija nije moguća ukoliko je točka A jednaka presjeku pravaca b i c. Ako točka A ne leži na niti jednom od pravaca b i c konstrukcija je moguća i postoje točno 2 rješenja, kao što smo i pokazali. Ukoliko se točka A nalazi na nekom od pravaca (ne na oba istovremeno!), onda također imamo 2 rješenja, konstrukcija je ugrubo opisana u Analizi. Od čitatelja se očekuje da ju samostalno i sprovedu i dokažu.

3. U zadani trokut ABC upišite kvadrat kojemu dva susjedna vrha leže na stranici BC, a po jedan vrh na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Analiza. Neka je traženi kvadrat kvadrat $KLMN$, gdje je točka K na stranici $\overline{AB}$, točke L i M na stranici $\overline{BC}$ te točka N na stranici $\overline{CA}$. Promotrimo homotetiju s centrom u točki B koja točku A šalje u točku K. Primijetimo da ta homotetija kvadrat $AL'M'N'$ šalje u kvadrat $KLMN$. Ovdje je točka L' nožište visine iz točke A na BC, točka M' je također na pravcu BC, a točka N' je takva da je četverokut $AL'M'N'$ kvadrat. No, sada vidimo da lako odredimo točku N, ona je naprosto presjek pravca BN' s dužinom $\overline{CA}$.

Konstrukcija.

- neka je L' nožište visine iz vrha A
- neka je M' točka na produžetku dužine $\overline{BL'}$ preko vrha L' takva da je $|AL'| = |L'M'|$
- neka je točka N' presjek paralele na pravac $L'M'$ točkom A i paralele na pravac AL' točkom M'
- neka je točka N presjek pravca BN' s dužinom $\overline{CA}$
- neka je točka K presjek paralele na pravac BC točkom N
- neka je L nožište visine iz točke K na dužinu $\overline{BC}$ te neka M nožište visine iz točke M na dužinu $\overline{BC}$
- kvadrat $KLMN$ je traženo rješenje



Dokaz. Četverokut $AL'M'N'$ je kvadrat po konstrukciji. Promotrimo homotetiju sa središtem u točki B koja točku N' preslikava u točku N. Primijetimo (dokažite!) da ta homotetija preslikava i $A \to K$, $M' \to M$ te $L' \to L$. Dakle, četverokut $KLMN$ uistinu je kvadrat i zadovoljava uvjete (točka K nalazi se na stranicai $\overline{AB}$, točke L i M na $\overline{BC}$ te točka N na stranici $\overline{CA}$).

Rasprava. Ova konstrukcija je uvijek moguća i rješenje je uvijek jedinstveno. Vidite li zašto je rješenje jedinstveno?

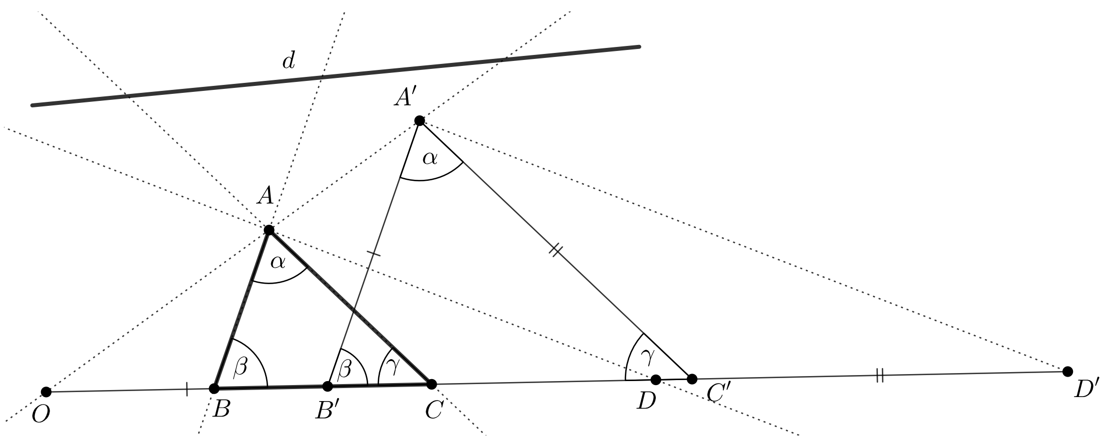
4. Konstruirajte trokut kojemu su dani kutovi i opseg.

(Pretpostavljamo da su dani kutovi α, β i γ te dužina d čija je duljina o jednaka opsegu traženog trokuta.)

Analiza. Promotrimo traženi trokut ABC. Uočimo na pravcu BC točke O i D, takve da imamo poredak (na pravcu BC): O, B, C, D. Dodatno, neka je točka O takva da je $|OB| = |AB|$ te točka D takva da je $|DC| = |AC|$. Primijetimo da je tada $|OD| = o$. Nadalje, homotetija s centrom u točki O (s bilo kojim koeficijentom) trokut ABC preslikava u sličan trokut (dakle, u trokut koji ima jednake kutove) te na taj nažin možemo dobiti trokut sličan trokutu ABC s proizvoljnim opsegom. Naime, na polupravcu OB odredimo točku X takvu da je $|OX| = x$ (naš proizvoljni opseg). Homotetija s centrom u točki O koja točku D preslikava u točku X preslikava trokut ABC u njemu sličan trokut s opsegom x. Ovaj postupak možemo "preokrenuti". Krenimo od proizvoljnog trokuta s danim kutovima te ga zatim preslikajmo u naš traženi trokut s opsegom o.

Konstrukcija. Rješenje je, naravno, jedinstveno, do na sukladnost.

- odaberimo proizvoljne dvije točke u ravnini, neka su to točke B' i C'
- u točki B' konstruirajmo kut β (neka ga s pravcem BC određuje pravac c), a u točki C' kut γ (pravac b)
- neka je točka A' presjek pravaca b i c
- na pravcu $B'C'$ označimo točke O i D' i to tako da imamo poredak: O, B', C', D te da je $|OB'| = |AB'|$ i $|DC'| = |AC'|$
- na polupravcu OD' odaberimo točku D takvu da je $|OD| = o$
- točkom D povucimo paralelu s pravcem $A'D'$ te neka ta paralela siječe pravac OA' u točki A
- točkom A povucimo paralelu s pravcem $A'C'$ te neka ta paralela siječe pravac OD u točki C
- točkom A povucimo paralelu s pravcem $A'B'$ te neka ta paralela siječe pravac OD u točki B
- trokut ABC je traženo rješenje



Dokaz. Trokut ABC je slika trokuta $A'B'C'$ homotetijom sa središtem u točki O te koeficijentom $\frac{|OD|}{|OD'|}$. (Dokažite to!)

Dakle, trokut ABC ima iste kutove kao trokut $A'B'C'$, tj. α, β i γ. Nadalje, trokut $A'C'D'$ je jednakokračan pa je takav i trokut ACD te isto vrijedi i za trokut ABO. Dakle, opeg trokuta ABC je jednak

$$|AB| + |BC| + |CA| = |OB| + |BC| + |CD| = |OD| = o.$$

Rasprava. Nužno je i dovoljno da su α, β i γ uistinu kutovi nekog trokuta te da je $o > 0$. Dakle, uz to da je $o > 0$ mora biti i $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ te $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

5. Konstruirajte trokut ako su zadane duljine njegovih visina.

Analiza. Neka su zadane visine v_a, v_b te v_c. Primijetimo da je

$$av_a = bv_b = cv_c = 2P,$$

gdje je P površina trokuta ABC. To znači da je

$$a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}.$$

Neka je DEF trokut sa stranicama v_a, v_b i v_c te neka su njegove visine redom h_a, h_b i h_c. Analognim razmišljanjem (kao za trokut ABC, samo sada za trokut DEF) zaključujemo da je

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Odnosno, dolazimo do toga da je

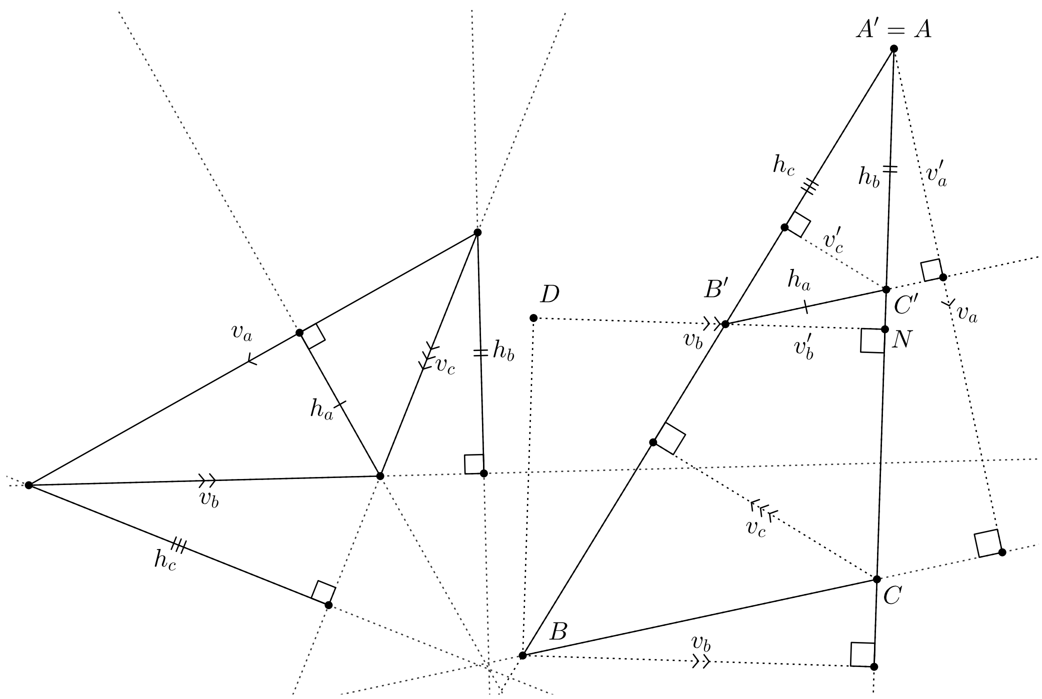
$$a : b : c = h_a : h_b : h_c.$$

Dakle, trokut ABC je sličan trokutu čije su stranice visine trokuta čije su stranice visine trokuta ABC.

Dakle, moramo konstruirati trokut čije su stranice visine trokuta čije su stranice v_a, v_b i v_c. Time dobivamo trokut $A'B'C'$ sličan našem traženom trokutu ABC. Neka su visine tog trokua v_a', v_b' i v_c'. Na kraju, homotetijom s centrom u $A' = A$ i koeficijentom $\frac{v_c}{v_c'}$ preslikamo trokut $A'B'C'$ do našeg traženog trokuta ABC (naravno, rješenje je opet jedinstveno do na sukladnost trokuta).

Konstrukcija.

- konstruirajmo trokut sa stranicama v_a, v_b i v_c te neka su visine tog trokuta h_a (na v_a), h_b (na v_b) i h_c (na v_c)
- konstruiramo trokut sa stranicama h_a, h_b i h_c te neka je $A' = h_b \cap h_c$, $B' = h_c \cap h_a$ i $C' = h_a \cap h_b$
- neka je N nožište visine iz vrha B' u trokutu $A'B'C'$
- na polupravcu NB' odredimo točku D takvu da je $|ND| = v_b$
- neka je točka B presjek pravca $A'B'$ s paralelom na pravac $A'C'$ koja prolazi točkom D
- neka je točka C presjek pravca $A'C'$ s pravcem koji prolazi točkom B i paralelan je pravcu $B'C'$
- neka je $A = A'$, trokut ABC je traženo rješenje



Dokaz. Homotetija s centrom u točki $A' = A$ i koeficijentom $\frac{v_b}{v_b'}$ šalje trokut $A'B'C'$ u trokut ABC. Dokažite!

Dakle, jasno je da je visina iz vrha B u trokutu ABC jednaka v_b. Preostaje pokazati da je visina iz vrha C jednaka v_c te da je ona iz vrha A jednaka v_a. Jasno je da je tvrdnju dovoljno pokazati za v_a, analogno slijedi i za v_c. Ono što zapravo moramo pokazati je da vrijedi da je:

$$v_a' \cdot \frac{v_b}{v_b'} = v_a, \quad \text{odnosno} \quad \frac{v_a'}{v_b'} = \frac{v_a}{v_b}.$$

Međutim, sjetimo se analize ove konstrukcije i sljedećih činjenica:

- v_a' i v_b' su odgovarajuće visine u trokutu sa stranicama h_a, h_b i h_c, što znači da je $v_a' : v_b' = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$,
- h_a i h_b su odgovarajuće visine u trokutu sa stranicama v_a, v_b i v_c, što znači da je $h_a : h_b = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b}$.

Odnosno, uistinu vrijedi da je $\frac{v_a'}{v_b'} = \frac{v_a}{v_b}$, čime je dokaz gotov.

Rasprava. Razmislite kako doskočiti situaciji u kojoj visine trokuta ABC nisu stranice trokuta. Kako bismo u tom slučaju odradili konstrukciju? U slučaju da zadane visine jesu stranice trokuta, opisana konstrukcija je uvijek moguća. Naime, u tom slučaju je jedino upitno jesu li i h_a, h_b te h_c stranice trokuta. No, to je uvijek istina, budući da se te duljine odnose isto kao i duljine stranica trokua ABC.

Ukoliko v_a, v_b i v_c nisu stranice trokuta, kako se "dočepati" trokuta kojemu je omjer stranica $\frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$?
Uputa: algebarska metoda.