9 Krivulje drugog stupnja

Elipsa, hiperbola, parabola

Prije rješavanja sljedećih zadataka obavezno je pročitati Poglavlje 5 (Krivulje 2. stupnja) u skripti za predavanja, stranice 61 - 70.

1. Dana je elipsa s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ i točka T. Konstruirajte tangente elipse točkom T.

   Rješenje. Ovaj zadatak je zapravo prvi dio primjera 5.1. u skripti za predavanja.

   Pokušajte sami formulirati analizu, konstrukciju, dokaz i raspravu.

   Želimo konstruirati pravac t koji zadovoljava dva uvjeta. Prvi je da prolazi točkom T, a drugi je da je tangenta na zadanu elipsu.

   Sjetimo se što je *suprotište*. Suprotište fokusa F' u odnosu na tangentu t je točka G' koja je simetrična točki F' s obzirom na pravac t. Teorem 5.4. govori da je skup svih suprotišta fokusa F' kružnica sa središtem u točki F i radijusa $2a$. Ovo zapravo znači da je pravac t simetrala dužine $\overline{F'G'}$. Kako točka T leži na pravcu t zaključujemo da je nužno $|TF'| = |TG'|$. Dakle, imamo najviše dva kandidata za točku G' (u navedenom primjeru na slici su to točke S_1 i S_2). Naime, to su presjeci već spomenute kružnice sa središtem u F i radijusa $2a$ s kružnicom sa središtem u T i radijusa $|TF'|$.

   Dokaz da će tako konstruiran pravac t uistinu biti tangenta elipse proizlazi direktno iz gore napisane analize. Pokušajte to sami zapisati kombinirajući ispravne rezultate iz skripte za predavanja.

   Što je s raspravom? Tj. znamo li odrediti kada je konstrukcija validna (tj. moguća), a kada ne? Pa zapravo, točno znamo! Naime, ukoliko se točka T nalazi unutar elipse, onda rješenje ne postoji, ukoliko se nalazi na elipsi, onda je rješenje točno jedno, a ukoliko se nalazi izvan nje, onda imamo 2 rješenja. Točka T se nalazi unutar elipse ako je $|TF| + |TF'| < 2a$, nalazi se na elipsi ako je $|TF| + |TF'| = 2a$ te izvan elipse ako je $|TF| + |TF'| > 2a$.

2. Dana je elipsa s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ i pravac p. Konstruirajte tangente elipse paralelne s pravcem p.

   Rješenje. Ovo je drugi dio već spomenutog primjera 5.1. Opet nam je glavni alat teorem 5.4. Naime, tangenta t na elipsu je simetrala dužine koja spaja fokus s njenim suprotištem u odnosu na t. Samo tu priču "okrenemo". Tj. najprije konstruiramo dužinu koja spaja fokus i suprotište (koristeći činjenicu da znamo geometrijsko mjesto svih suprotišta), a zatim lako dolazimo do tangente. Tražena tangenta mora biti paralelna danom pravcu p. No, to znači da spomenuta dužina (kojoj je tangenta simetrala) mora biti okomita na taj pravac. Ovom pričom smo došli do jednostavnog načina konstrukcije.

   Preostaje komentirati da uvijek imamo točno dva rješenja. Naime, bilo koji pravac točkom F' (koja se nalazi unutar kružnice $(F, 2a)$) siječe tu kružnicu u točno dvije točke. Svaka od tih točaka nam "daje" jednu tangentu.

   Možete li napisati dokaz da je konstrukcija točna?

3. Konstruirajte tangente hiperbole s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ iz središta O te hiperbole. Konstruirajte dirališta tih tangenata.

   Pogledajte primjer 5.2. na stranici 67 u skripti za predavanja. Tražene tangente će zapravo biti asimptote hiperbole

4. Dana je parabola s fokusom F i ravnalicom d i točka T. Konstruirajte tangente parabole točkom T.

   Pogledajmo teorem 5.18. u skripti za predavanja. Dakle, skup svih suprotišta je pravac d (direktrisa zadane parabole). Tangenta t je simetrala dužine koja spaja fokus i suprotište. Kako tangenta t prolazi točkom T, zaključujemo da je točka T jednako udaljena od F i od odgovarajućeg suprotišta.

   Dakle, konstruiramo kružnicu sa sreištem u točki T i označimo njene presjeke s direktirom F' i F''. Tražene tangente su simetrale dužina $\overline{FF'}$ i $\overline{FF''}$.

   Preostaje se zapitati kada je konstrukcija uopće moguća? Naravno, to će biti kada kružnica sa središtem u T i radijusom $|TF|$ ima barem jednu zajedničku točku sa direktirsom. To će biti istina onda i samo onda ako je $|TF| \geq$ udaljenost točke T od pravca d.

5. Dana je parabola s fokusom F i ravnalicom d i pravac p. Konstruirajte tangentu parabole paralelnu s pravcem p.

   Skroz slično kao u zadatku 2. Povucimo okomicu na pravac p koja prolazi fokusom parabole F. Taj pravac siječe direktirsu u najviše jednoj točki. Simetrale dužine koja spaja tu točku i fokus F je tražena tangenta.

   Primijetimo da tangenta ne postoji ako je pravac p okomit na direktirsu d. U svim ostalim slučajevima rješenje je jedinstveno.