6 Inverzija

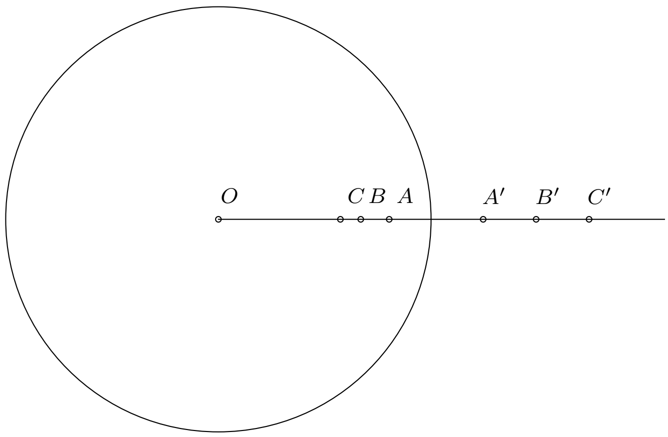
6.1 Definicija i svojstva inverzije

Neka je inverzija zadana svojom kružnicom inverzije, $k(O, r)$. Po definiciji, točki A inverzijom je pridružena točka A' na polupravcu OA za koju vrijedi

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2.$$

Očito je onda i točki A' pridružena točka A, što zajedno s činjenicom da je inverzija različita od identitete, znači da je ona *involutorno* preslikavanje.

Veličinu r^2 zovemo *potencija inverzije*, duljinu r *radijus inverzije*, kružnicu $k(O, r)$ *kružnica inverzije*, a središte O *središte inverzije*.



Slika 1: Inverzne slike točaka

Vidimo da, što je točka A bliže središtu inverzije, to je njena slika A' dalje od središta inverzije. Kako A teži prema O, tako A' teži beskonačno dalekoj točki u smjeru pravca OA. Domena inverzije po tome ne sadrži točku O, jer bi se ona po gornjem pravilu trebala preslikati beskonačno daleko. Domena je dakle $E^2 \setminus \{O\}$.

Tek ako bismo ravninu upotpunili s još jednom točkom ∞ u beskonačnosti, istom točkom u svim smjerovima, onda bismo mogli proširiti domenu inverzije na $E^2 \cup \{\infty\}$ i pritom bi točke O i ∞ bile međusobno pridružene točke. Takva domena je topološki sfera i zove se *Riemannova sfera.*

Inverzija se nekad naziva zrcaljenje po kružnici, jer se nutrina kružnice inverzije zrcali na vanjštinu, a vanjština na nutrinu. Lako se vidi da su točke na kružnici inverzije fiksne točke.

Inverzija ima mnoga lijepa svojstva, a sve ih koristimo u rješavanju zadataka. Pregledajte zato sada sami prije zadataka osnovna svojstva inverzije koja ste radili na predavanjima.

6.2 Popis zadataka

U prvom zadatku naučit ćemo kako konstruirati potencijalu dvije kružnice, što će nam biti korisno u težim zadacima. Drugi, treći i četvrti zadatak možete sami pokušati riješiti prije nego pogledate rješenja. Ako znate svojstva inverzije, trebali biste ih moći uz nešto truda riješiti samostalno. U preostala tri zadatka primijenit ćemo inverziju da riješimo teži konstruktivni problem.

1. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku. Konstruirajte njihovu potencijalu.

2. Inverzija je zadana svojom kružnicom inverzije $k(O, r)$.

   (i) Konstruirajte inverznu sliku dane točke A s obzirom na kružnicu k.

   (ii) Konstruirajte inverznu sliku danog pravca p.

   (iii) Konstruirajte inverznu sliku dane kružnice l.

3. Inverzija je zadana svojim središtem O i parom pridruženih točaka A, A'.

   (i) Konstruirajte sliku dane točke B po toj inveziji.

   (ii) Konstruirajte kružnicu inverzije.

4. Dana je kružnica $k(O, r)$. Konstruirajte inverznu sliku vrhova i stranica kvadrata upisanog kružnici k, njegovih dijagonala, te polovišta njegovih stranica s obzirom na kružnicu k.

5. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku. Nađite inverziju koja ih preslikava u dvije koncentrične kružnice.

6. Konstruirajte skup dirališta dviju kružnica koje se diraju pri čemu svaka od tih dviju kružnica dira dane kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku.

7. Konstruirajte kružnicu k koja prolazi danom točkom O, dira danu kružnicu k_1 i ortogonalna je na danu kružnicu k_2.

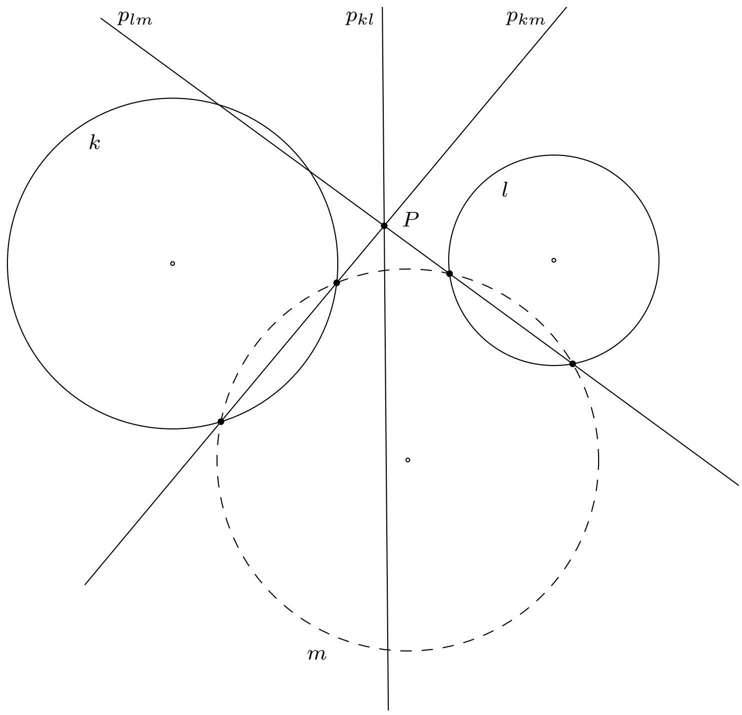
6.3 Rješenja zadataka

Zadatak 6.1. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku. Konstruirajte njihovu potencijalu.

Rješenje. Označimo kružnice s k i l. Po definiciji, potencijala kružnica k i l je skup točaka T takvih da su njene potencije na kružnicu k i kružnicu l jednake. S predavanja znamo da su istinite sljedeće tri tvrdnje.

- Potencijala je pravac.
- Potencijala je okomita na spojnicu središta kružnica.
- Potencijale triju kružnica sijeku se istoj točki, potencijalnom središtu.

Znate li dokazati svaku od ovih tvrdnji? Pokušajte ih dokazati sami ili potražite dokaze u predavanjima. Te tvrdnje ćemo koristiti da konstruiramo potencijalu.



Slika 2: Konstrukcija potencijale

Potencijalu nam je jako lako konstruirati kad se dvije kružnice sijeku. Potencije sjecišta očito su 0, dakle međusobno jednake, pa leže na potencijali. Ako se kružnice sijeku u dvije točke, potencijala je dakle pravac kroz ta sjecišta, a ako se dodiruju, onda je ona pravac kroz dirališțe okomit na spojnicu središta, dakle tangenta. To zajedno s trećom tvrdnjom možemo iskoristiti da lako konstruiramo potencijalu dvije kružnice koje se ne sijeku. *Konstrukcija.*

1. Konstruiramo neku kružnicu m koja siječe obje kružnice k i l, ali tako da joj središte nije na spojnici središta kružnica k i l.

2. Sada konstruiramo potencijale parova k, m i l, m, označimo ih redom sa p_{km}, p_{lm}. To su pravci kroz sjecišta kružnica.

3. Sjecište te dvije potencijale je potencijalno središte P. To je točka koja se nalazi na trećoj potencijali, p_{kl}, koju želimo konstruirati.

4. Pravac kroz P okomit na spojnicu središta danih kružnica je tražena potencijala p_{kl}.

Razmislite zašto je u prvom koraku bitno da središte kružnice m ne leži na spojnici središta danih kružnica.

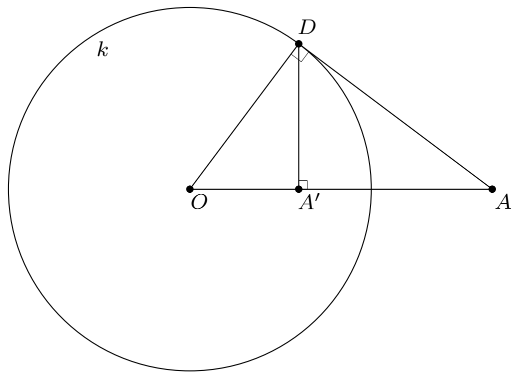
Zadatak 6.2. Inverzija je zadana svojom kružnicom inverzije $k(O, r)$.

(i) Konstruirajte inverznu sliku dane točke A s obzirom na kružnicu k.

(ii) Konstruirajte inverznu sliku danog pravca p.

(iii) Konstruirajte inverznu sliku dane kružnice l.

Rješenje. (i) Konstruirajmo inverznu sliku dane točke A s obzirom na kružnicu k. Sjetimo se slike s predavanja.



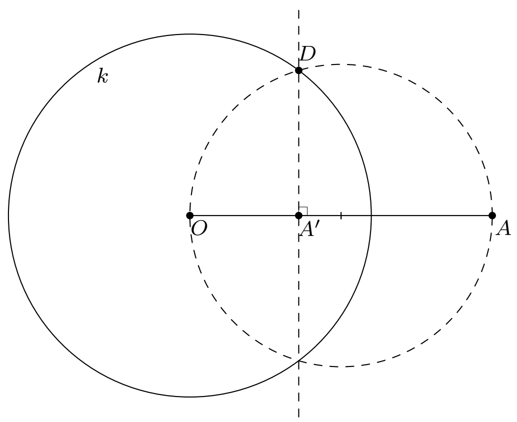
Slika 3: Karakteristični pravokutni trokut

Sada odmah razmislite zašto je slika točke A baš ova označena točka A'. Ako ne znate dokazati to, potražite dokaz u predavanjima. Imamo sada tri mogućnosti.

(a) Ako je A na k, slika točke A je ona sama. (Zašto?)

(b) Ako je A izvan k, gledamo u gornju sliku i vidimo da su koraci konstrukcije:

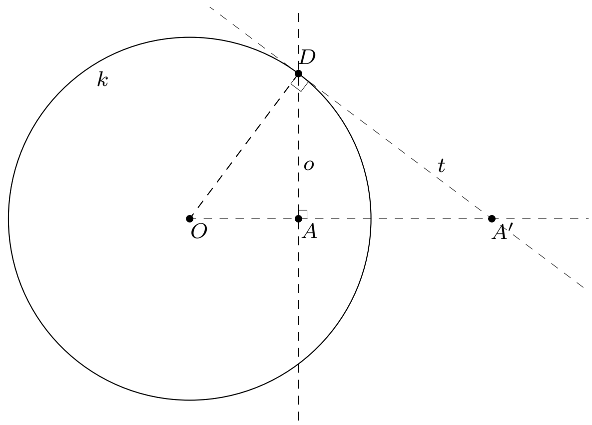
1. diralište D tangente iz A na k
   - Diralište konstruiramo tako da konstruiramo kružnicu nad dijametrom $\overline{OA}$ i njome presiječemo kružnicu k. (Zašto je to tako?)
2. nožište okomice na OA iz točke D je točka A'



Slika 4: Konstrukcija inverzne slike točke A koja je izvan k

(c) Ako je A unutar k, opet gledamo sliku i vidimo da su koraci konstrukcije:

1. okomica o na OA siječe k u D
2. okomica t na OD u točki D siječe OA u A'



Slika 5: Konstrukcija inverzne slike točke A koja je unutar k

(ii) Konstruirajmo sada inverznu sliku danog pravca p. S predavanja znamo da vrijedi:

- ◇ Pravac koji prolazi središtem inverzije preslika se u samog sebe. (Zašto?)
- ◇ Pravac koji ne prolazi središtem inverzije preslika se u kružnicu koja prolazi središtem inverzije. (Znate li to dokazati?)

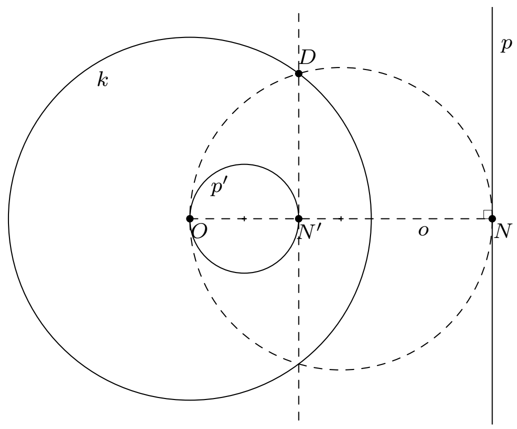
Iz toga odmah slijedi ispravnost ove konstrukcije. *Konstrukcija I.* Ako pravac p ne prolazi središtem inverzije.

1. odaberemo po volji dvije točke A i B na p
2. preslikamo ih inverzijom u točke A' i B'
3. kružnica kroz točke O, A' i B'
    - Konstruiramo je kao što konstruiramo opisanu kružnicu trokutu, tako da središte pronađemo kao sjecište simetrala dviju stranica.

No, možemo birajući posebne točke olakšati si posao, jer naprimjer uviđamo da pravac p i njegova slika zajedno posjeduju osnu simetričnost s obzirom na pravac iz O okomit na pravac p, ili jer znamo naprimjer da se inverzne slike krivulja sijeku ortogonalno čim se krivulje sijeku ortogonalno, o čemu ćemo više poslije. *Konstrukcija II.* Ako pravac p ne prolazi središtem inverzije.

1. okomica o na pravac p iz točke O siječe ga u točki N
2. slika N' točke N po inverziji
3. kružnica nad dijametrom $\overline{ON'}$

Razmislite kako biste dokazali ispravnost ove konstrukcije.



Slika 6: Inverzna slika pravca koji ne prolazi središtem O

(iii) Konstruirajmo sada inverznu sliku dane kružnice l.

slika-kruznice-oba-slucaja.png

S predavanja znamo da vrijedi:

- ⋄ Kružnica koja prolazi središtem inverzije preslika se u pravac koji ne prolazi središtem inverzije.
- ⋄ Kružnica koja ne prolazi središtem inverzije preslika se u kružnicu koja ne prolazi središtem inverzije. (Znate li to dokazati?)

Iz toga odmah slijedi ispravnost sljedeće konstrukcije. *Konstrukcija I.* Ako kružnica ne prolazi središtem inverzije.

1. odaberemo po volji tri točke A, B, C na kružnici k
2. preslikamo ih inverzijom u točke A', B', C'
3. kružnica kroz točke A', B', C' je slika kružnice l

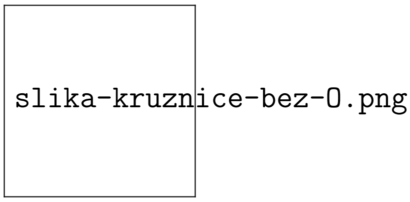
Ako kružnica prolazi središtem inverzije.

1. odaberemo po volji dvije točke A, B na kružnici k
2. preslikamo ih inverzijom u točke A', B'
3. pravac kroz točke A', B' je slika kružnice l

No, možemo opet lakše konstruirati sliku tako da koristimo posebne točke, kao u sljedećoj konstrukciji.

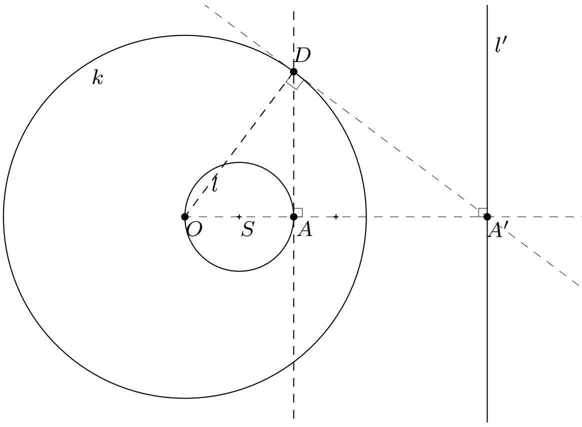
Konstrukcija II. Ako kružnica ne prolazi središtem inverzije. Označimo središte kružnice l sa S.

1. pravac OS siječe kružnicu l u točkama A, B
2. preslikamo ih inverzijom u točke A', B'
3. kružnica nad dijametrom $\overline{A'B'}$ je slika kružnice l



Ako kružnica prolazi središtem inverzije.

1. pravac OS siječe kružnicu l još u točki A
2. preslikamo je inverzijom u točku A'
3. okomica u A' na pravac OS je slika kružnice l



Slika 7: Inverzna slika kružnice koja prolazi središtem O

Uvjerite se u ispravnost tih konstrukcija koristeći tvrdnje s predavanja.

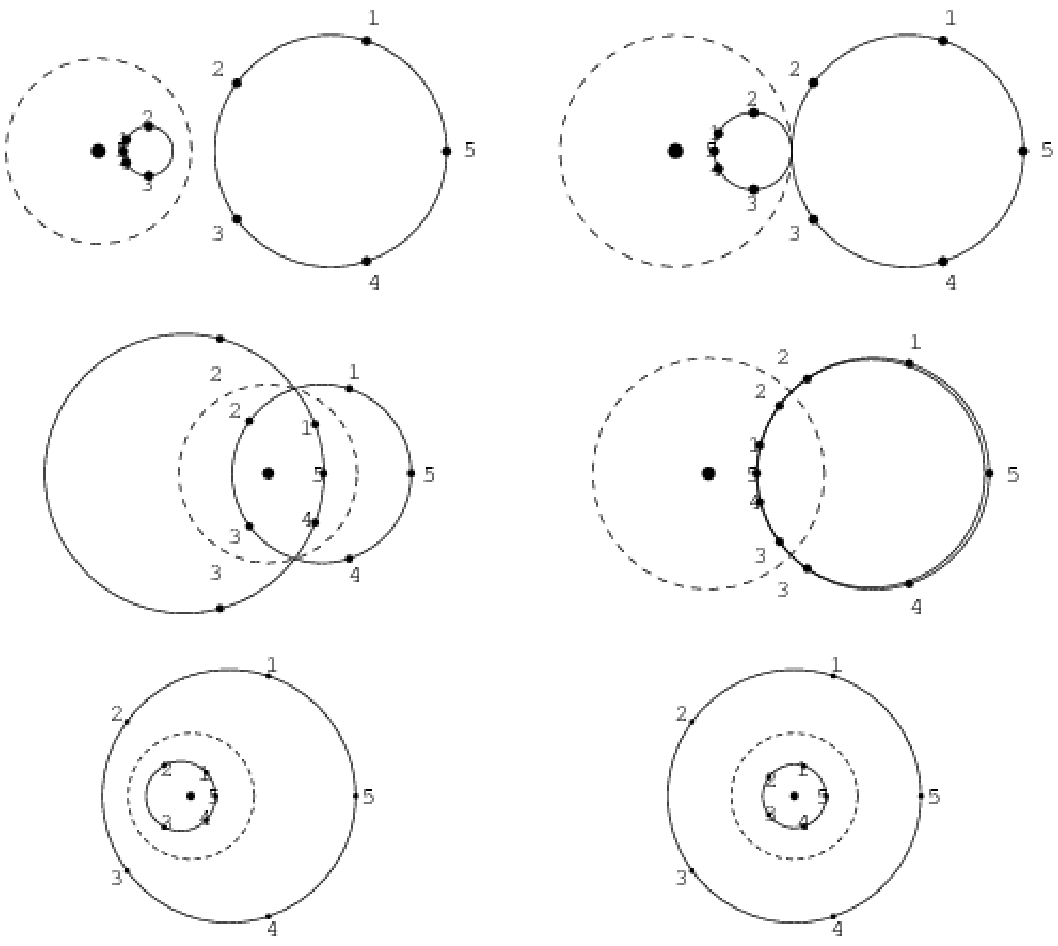
Sada još na kraju sami konstruirajte inverznu sliku S' središta kružnice l da se na oči uvjerite da se središte kružnice nikako ne preslikava u središte inverzne slike te kružnice. Osim u dva jako posebna slučaja. Znate li koja dva?

Dodatno pitanje. Možete li na jednostavniji način nego u opisanom općenitom slučaju, koristeći svoje znanje o svojstvima inverzije, konstruirati slike pravca p i kružnice l u sljedećim posebnim slučajevima?

(a) Pravac p siječe kružnicu k u dvije točke i ne prolazi središtem inverzije.

(b) Pravac p dodiruje kružnicu k.

(c) Kružnica l siječe kružnicu k u dvije točke i prolazi središtem inverzije.



Slika 8: Primjeri parova inverznih kružnica

(d) Kružnica l siječe kružnicu k u dvije točke, a ne prolazi središtem inverzije.

(e) Kružnica l dodiruje kružnicu k, a ne prolazi središtem inverzije.

(f) Kružnica l dodiruje kružnicu k, a prolazi središtem inverzije.

(g) Kružnica l siječe kružnicu k ortogonalno.

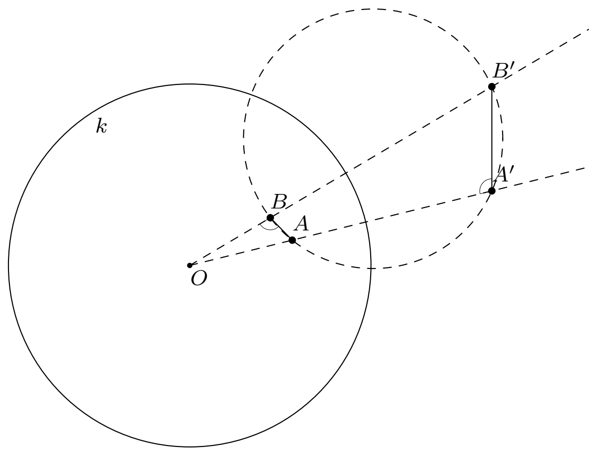
Zadatak 6.3. Inverzija je zadana svojim središtem O i parom pridruženih točaka A, A'.

(i) Konstruirajte sliku dane točke B po toj inveziji.

(ii) Konstruirajte kružnicu inverzije.

Rješenje. (i) Naravno, možemo prvo konstruirati kružnicu inverzije, što nas traže u drugom dijelu zadatka, pa onda iskoristiti tu kružnicu da konstruiramo sliku točke B. No možemo i direktno ako znamo s predavanja:

◇ Inverzijom pridružene točke A, A' i B, B' čine vrhove tetivnog četverokuta.



Slika 9: Tetivni četverokut

Znate li zašto je to tako? Pokušajte dokazati to sami, ili pogledajte predavanja. Iz toga slijedi odmah ispravnost sljedećih konstrukcija. *Konstrukcija I.* Ako točke ne leže na istom pravcu.

1. usmjereni kut OBA nanesemo u suprotnom smjeru na polupravac $A'O$
2. nastali krak siječe OB u B'

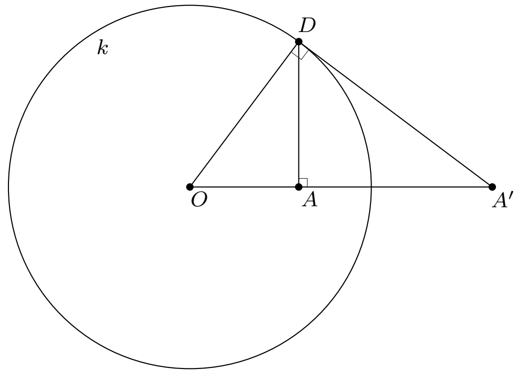
Umjesto prenošenja kuta, konstrukciju bismo mogli provesti i ovako. *Konstrukcija II.* Ako točke ne leže na istom pravcu.

1. kružnica m kroz točke A, A', B
2. m siječe OB u B'

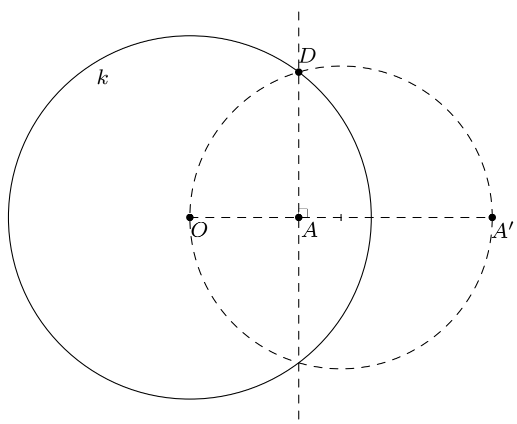
Ako pak točke leže na istom pravcu, odaberemo neku točku C koja nije na OA, konstruiramo koristeći par A, A' njenu sliku po prethodnoj konstrukciji, pa onda koristeći par C, C' konstruiramo sliku točke B, opet po prethodnoj konstrukciji.

(ii) Konstruirajmo sad kružnicu inverzije ako su nam zadani središte inverzije i dvije pridružene točke. Sjetimo se opet slike.

Dovoljno je da konstruiramo točku D. Način ćemo pronaći tako da prvo ispitamo kojim svojim svojstvima je točka D određena. Znamo da kut ODA' mora biti pravi, ako je A' ona točka u paru koja je izvan kružnice inverzije, dakle, iz točke D dužina $\overline{OA'}$ vidi se pod pravim kutom. Znamo da kut DAO mora biti pravi, ako je A ona točka u paru koja je unutar kružnice, dakle, D je na okomici podignutoj u točki A na OA. U presjeku ta dva geometrijska mjesta točaka je točka D. Sada kad imamo D, kružnica inverzije je kružnica sa središtem u O kroz D.



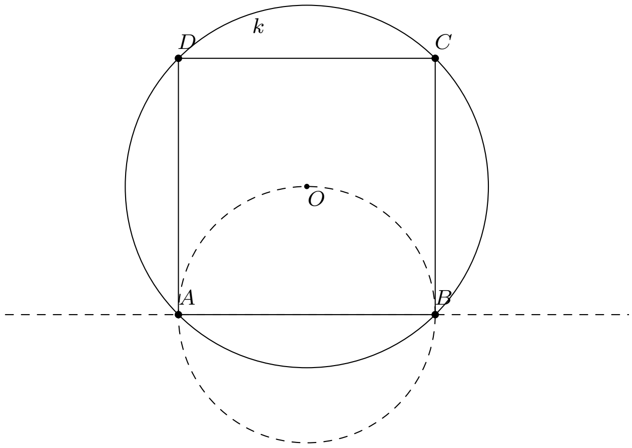
Slika 10: Karakteristični pravokutni trokut



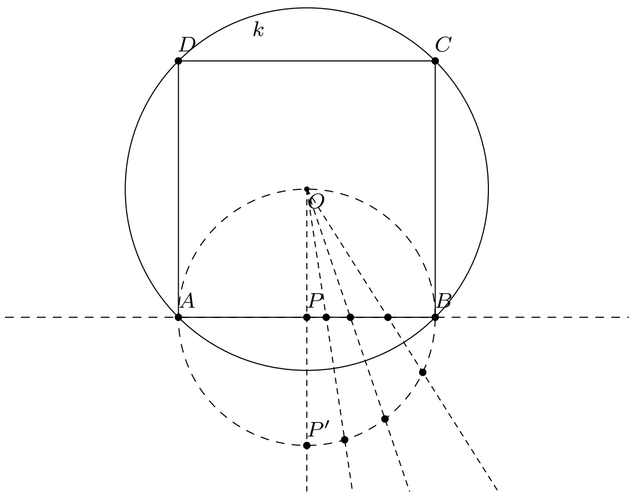
Slika 11: Nalaženje kružnice inverzije zadane s O, A, A'

Zadatak 6.4. Dana je kružnica $k(O, r)$. Konstruirajte inverznu sliku vrhova i stranica kvadrata upisanog kružnici k, njegovih dijagonala, te polovišta njegovih stranica s obzirom na kružnicu k.

Rješenje. Znamo kako se preslikavaju pravci i znamo koji dio pravca se preslika u koji dio slike pravca. To nam je dovoljno da riješimo ovaj zadatak.



Slika 12: Inverzna pravca na kojem leži stranica kvadrata

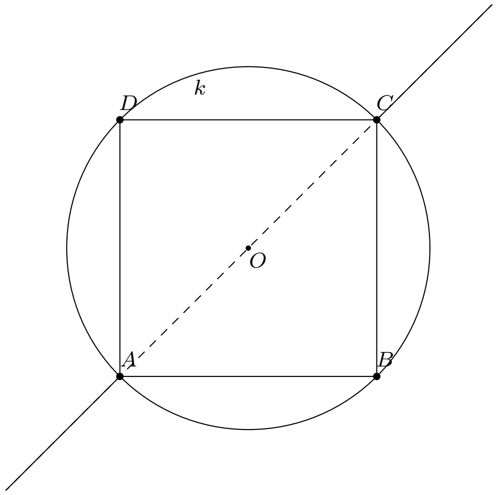


Slika 13: Inverzna slika stranice kvadrata

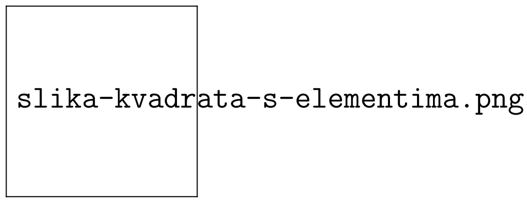
Vrhovi A, B, C, D leže na kružnici inverzije, pa se preslikaju sami u sebe. Pravac AB ne prolazi središtem inverzije pa se preslikava u kružnicu koja prolazi kroz središte inverzije. Budući da se A i B preslikaju same u sebe, slike dviju točaka već znamo. Dakle, slika pravca AB je kružnica ABO. Lako se vidi da je njeno središte na polovištu stranice $\overline{AB}$, što nam olakšava konstrukciju. Analogno sada napravimo za ostala tri pravca na kojima leže stranice.

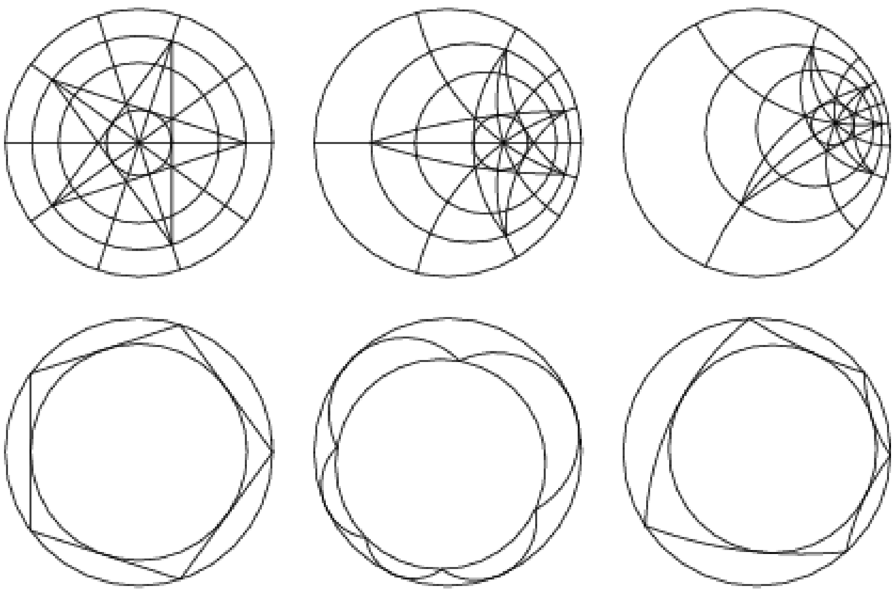
Sada su na redu stranice. Ako pustite zrake iz središta O kroz točke na dužini $\overline{AB}$ one će sijeći kružnicu OAB u točkama luka AB koji je izvan kružnice inverzije. Sada su na redu polovišta stranica. Za njih vidimo da se preslikaju u polovišta lukova. No, pazite, polovište se općenito ne preslikava u polovište. Pogledajte recimo neku drugu točku na stranici i vidjet ćete da njena slika ne dijeli luk u omjeru u kojem ona dijeli stranicu. Inverzija jako izobličuje likove i mijenja duljine, ali ne mijenja kutove, što ćemo vidjeti poslije.

Sada su na redu dijagonale. Pravci na kojima one leže prolaze središtem O. Oni se dakle preslikaju sami u sebe, ali pazite, točke na njima se ne preslikavaju same u sebe. Točke u unutrašnjosti dužine $\overline{AO}$, od A prema O, preslikaju se u točke na polupravcu OA koje su od njene slike A prema ∞. Analogno napravimo za sve ostale dijelove dijagonala.



Slika 14: Inverzna slika dijagonale kvadrata





Slika 15: Po dvije inverzne slike kružnice i njene unutrašnjosti

Sljedeći put ćemo riješiti tri teža konstrukcijska problema koristeći ova znanja, koji su zadani u popisu zadataka, te proučiti Apolonijev problem i njemu srodne probleme.

Dvije slike preuzete su sa sljedeće stranice: `https://mathworld.wolfram.com/Inversion.html`