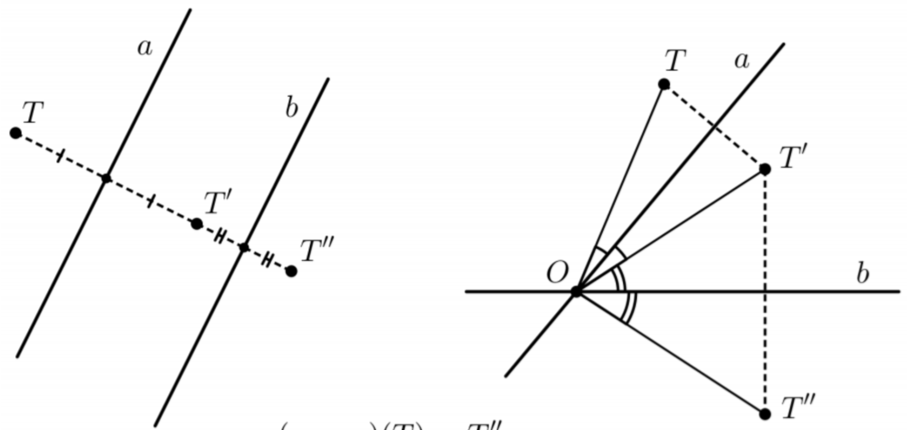
4 Translacija, rotacija, klizna simetrija

Osnovne definicije

Izometrija koja se može prikazati kao kompozicija dviju osnih simetrija zove se:

1. **translacija** ako su osi tih simetrija paralelne,
2. **rotacija** oko točke O ako se osi tih simetrija sijeku u točki O. U tom slučaju, O zovemo centar rotacije.



$(s_b \circ s_a)(T) = T''$

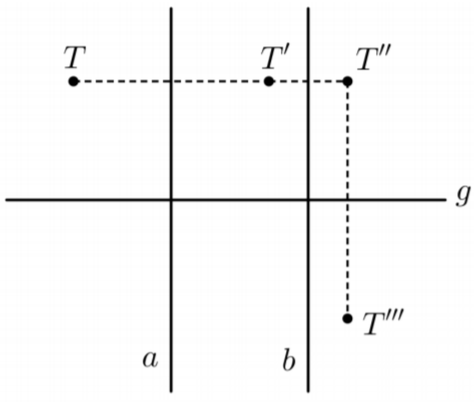
Pri translaciji $s_b \circ s_a$ svaka točka T translatira se za dvostruku orijentiranu udaljenost pravaca a i b u smjeru okomitom na te pravce.

Pri rotaciji $s_b \circ s_a$ oko točke O svaka točka T rotira se oko O za kut $2\sphericalangle(a, b)$. Specijalno, i centralna simetrija s_O je rotacija oko O za kut $180°$.

Napomenimo da prikaz rotacije i translacije u obliku kompozicije dviju osnih simetrija nije jednoznačan.

Izometriju koja se može prikazati u obliku $s_g \circ s_b \circ s_a$ gdje je g pravac okomit na pravce a i b, zovemo **kliznom simetrijom** s osi g.

Kako je $a \parallel b$, to je $s_b \circ s_a$ translacija uzduž pravca g te je klizna simetrija s osi g kompozicija jedne translacije uzduž g i simetrije s obzirom na g. Ako je $a = b$, onda je $s_g \circ s_b \circ s_a = s_g$, pa je osna simetrija poseban slučaj klizne simetrije.

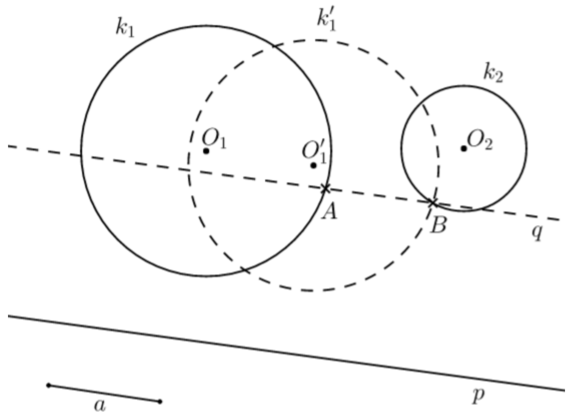


$(s_g \circ s_b \circ s_a)(T) = T'''$

Zadatci

4.1. Dane su kružnice k_1 i k_2, pravac p i duljina a. Konstruirajte pravac paralelan s p tako da za sjecišta A i B tog pravca s kružnicama k_1 i k_2 vrijedi $|AB| = a$.

Analiza. Pretpostavimo da je zadatak riješen, tj. da je određen traženi pravac (slika ispod). Jasno je da je B slika točke A pri translaciji za vektor duljine a u smjeru pravca p. Ako sa k_1' označimo sliku kružnice k_1 pri toj translaciji, vidimo da se točka B nalazi na presjeku kružnica k_1' i k_2.

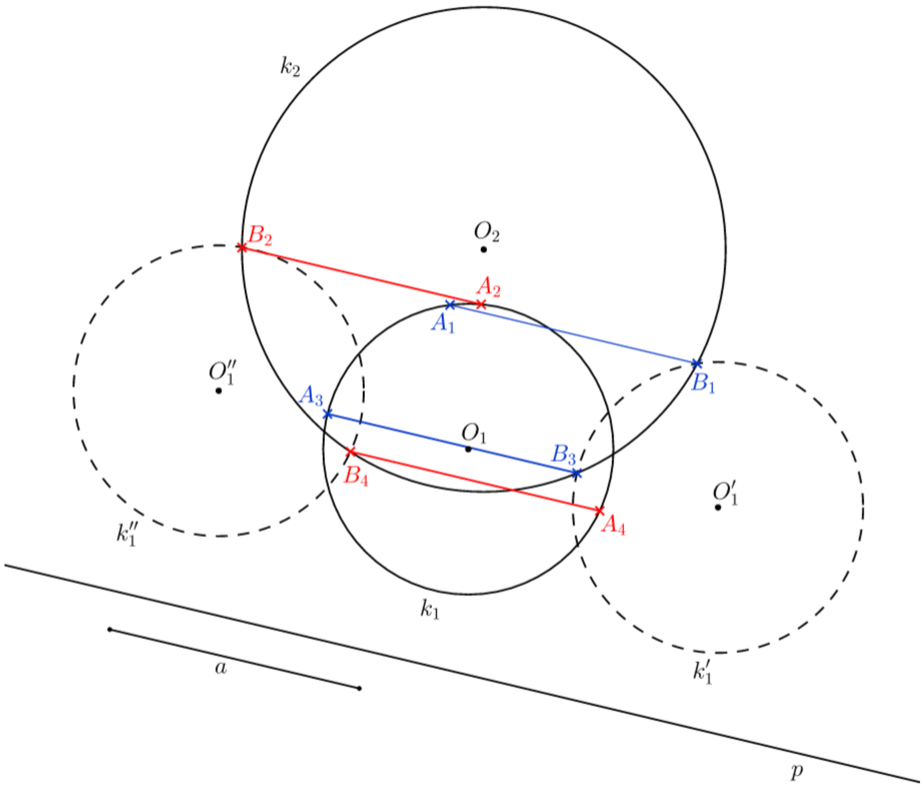


Konstrukcija.

1. Translatiramo kružnicu k_1 za vektor duljine a u smjeru pravca p u obe moguće orijentacije ($\rightarrow$ i $\leftarrow$). Tako dobijemo kružnice k_1' i k_1''.
2. Točka B određena je kao presjek $k_1' \cap k_2$ ili $k_1'' \cap k_2$.
3. Konstruiramo traženi pravac kroz B paralelan s p.

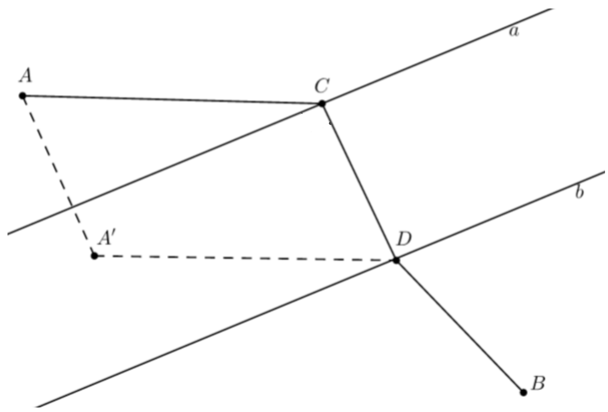
Dokaz. Slijedi direktno iz konstrukcije.

Rasprava. Ako je $r_1 = r_2$, $|O_1O_2| = a$ i pravac p paralelan s O_1O_2, imamo beskonačno rješenja. U ostalim slučajevima, možemo imati 0, 1, 2, 3 ili 4 rješenja, ovisno o tome u koliko točaka se sijeku kružnice k_1' i k_2 te k_1'' i k_2. Na slici ispod je primjer kad imamo 4 rješenja.



4.2. Na različitim obalama rijeke nalaze se naselja A i B. Gdje treba sagraditi most preko rijeke tako da put od A do B bude najkraći mogući? Obale rijeke su međusobno paralelne, a most treba biti okomit na rijeku.

Analiza. Označimo s a i b pravce koji predstavljaju obale rijeke. Neka je $\overline{CD}$, $C \in a$, $D \in b$ proizvoljan most okomit na rijeku (slika ispod). Treba nam takav da je vrijednost izraza $|AC| + |CD| + |DB|$ najmanja moguća. Kako su obale rijeke međusobno paralelne, duljina mosta okomitog na rijeku je konstantna. Dakle, trebaju nam točke C i D tako da je $|AC| + |DB|$ najmanja moguća. Promotrimo translaciju t za koju je $t(C) = D$. Označimo $A' = t(A)$. Jasno je da je onda $AA'DC$ paralelogram pa je $|AC| + |DB| = |A'D| + |DB|$. Ta vrijednost će biti najmanja moguća ako je točka D na dužini $\overline{A'B}$. Dakle, tražena točka D je presjek pravaca b i $A'B$.



Konstrukcija.

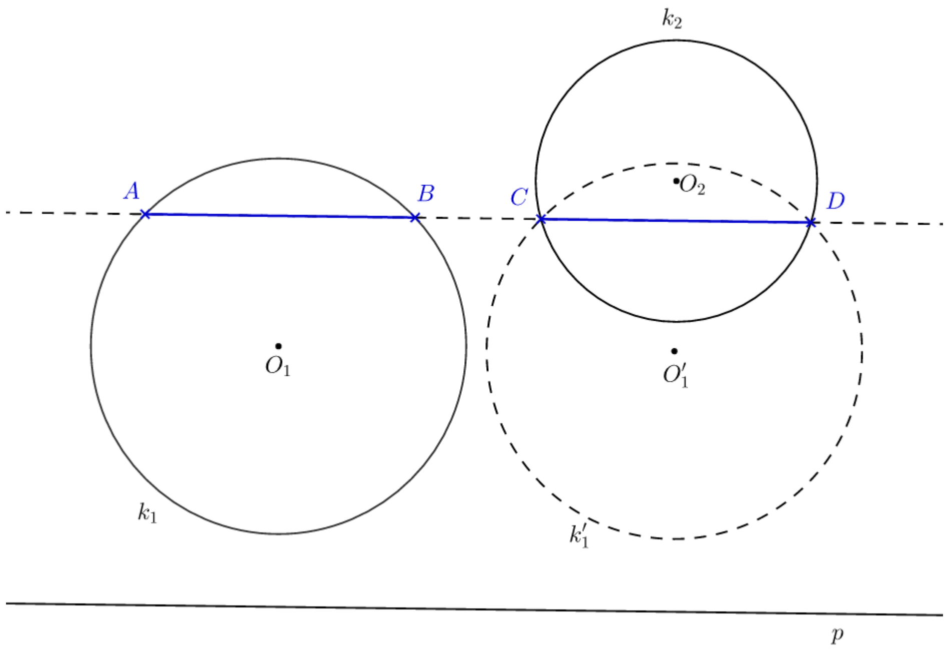
1. Konstruiramo točku A' kao sliku od A pri translaciji prema rijeci za širinu rijeke u smjeru okomitom na smjer rijeke.
2. Točka D je presjek pravaca b i $A'B$.
3. Konstruiramo točku $C \in a$ tako da je pravac CD okomit na a.

Dokaz. Slijedi iz analize i konstrukcije.

Rasprava. Kako se pravci b i $A'B$ uvijek sijeku, postoji rješenje i to jedinstveno.

4.3. Dane su kružnice k_1 i k_2 te pravac p. Konstruirajte pravac paralelan s p tako da su tetive kružnica k_1 i k_2 određene tim pravcem sukladne.

Analiza. Pretpostavimo da je konstruiran traženi pravac. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ tetive kružnica k_1 i k_2 koje on određuje (slika ispod). Tada je $|AB| = |CD|$. Neka je t translacija koja preslikava točku A u točku C. Tada je $t(B) = D$. Ako sa k_1' označimo sliku kružnice k_1 pri translaciji t, jasno je da su točke C i D presjek kružnica k_1' i k_2. Želimo odrediti gdje se nalazi središte kružnice k_1'. Označimo ga s O_1'. Kako je $k_1' = t(k_1)$, to se O_1' nalazi na pravcu kroz O_1 paralelnom s p. Nadalje, kako je $C, D \in k_1'$, to je $|CO_1'| = |DO_1'|$, pa se O_1' nalazi i na simetrali dužine $\overline{CD}$, a ona prolazi točkom O_2 i okomita je na pravac p.



Konstrukcija.

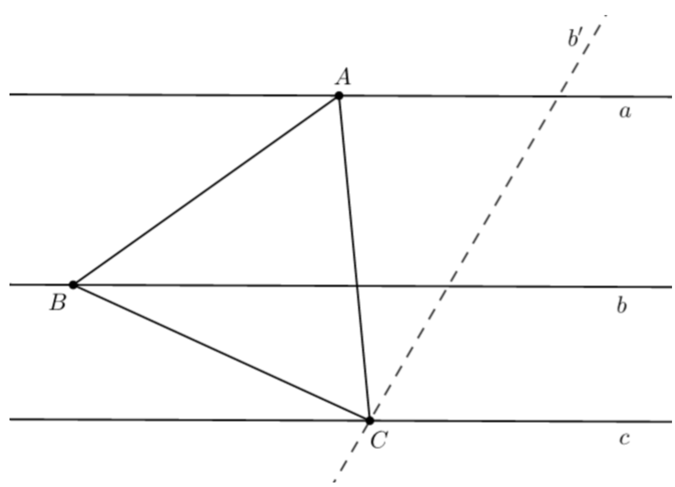
1. Konstruiramo pravac p_1 kroz točku O_1 paralelan s pravcem p.
2. Konstruiramo pravac s kroz točku O_2 okomitog na pravac p.
3. Konstruiramo točku O_1' kao presjek pravaca p_1 i s.
4. Konstruiramo kružnicu $k_1' = k(O_1', r_1)$, pri čemu je r_1 radijus kružnice k_1.
5. Konstruiramo točke C i D kao presjek kružnica k_1' i k_2.
6. Konstruiramo traženi pravac q kroz točke C i D.

Dokaz. Pretpostavimo da su konstruirani svi elementi iz konstrukcije. Dokažimo da je ovako konstruirani pravac q uistinu paralelan s pravcem p i da je $|AB| = |CD|$, pri čemu je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k_1 određena pravcem q. Neka su C' i D' ortogonalne projekcije točaka C i D na pravac p_1. Po SSS poučku, trokuti $\triangle CO_1'O_2$ i $\triangle O_1'DO_2$ su sukladni, odakle zaključujemo da je $\sphericalangle CO_1'C' = \sphericalangle D'O_1'D$. Sada su po KSK poučku trokuti $\triangle C'O_1'C$ i $\triangle O_1'D'D$ sukladni, pa je $|CC'| = |DD'|$ pa su pravci q i p_1 paralelni, a onda i q i p.
Dokažimo i da je $|AB| = |CD|$. Neka je O_1'' ortogonalna projekcija točke O_1 na pravac q. Označimo sa S sjecište pravaca s i q. Kako su pravci q i p_1 paralelni, slijedi $|O_1O_1''| = |O_1'S|$ pa su po SSK poučku trokuti $\triangle AO_1O_1''$ i $\triangle O_1'SC$ sukladni. Zato je $\sphericalangle O_1AO_1'' = \sphericalangle O_1'CS$. Kako su trokuti $\triangle AO_1B$ i $\triangle CO_1D$ jednakokračni, zaključujemo po SKS poučku da su sukladni. Dakle, $|AB| = |CD|$.

Rasprava. Ako je $r_1 = r_2$ i pravac p je paralelan s pravcem O_1O_2, zadatak ima beskonačno rješenja. U ostalim slučajevima imamo 0 ili 1 rješenje. Preciznije, ako kružnice k_1' i k_2 nemaju zajedničkih točaka ili imaju jednu zajedničku točku (a to će biti kad je $|O_1'O_2| \geq r_1 + r_2$ ili $|O_1'O_2| \leq |r_1 - r_2|$), zadatak nema rješenje, a ako imaju dvije zajedničke točke, onda imamo jedinstveno rješenje.
Možemo gledati i ovako: uzmemo koordinatni sustav u kojem je x-os pravac p, a y-os bilo koji pravac okomit na p. Tada zadatak nema rješenje ako je razlika y-koordinata točaka O_1 i O_2 veća ili jednaka od $r_1 + r_2$ ili ako je ta razlika manja ili jednaka od $|r_1 - r_2|$. Ako je ta razlika strogo veća od $|r_1 - r_2|$ i strogo manja od $r_1 + r_2$, zadatak ima jedinstveno rješenje.

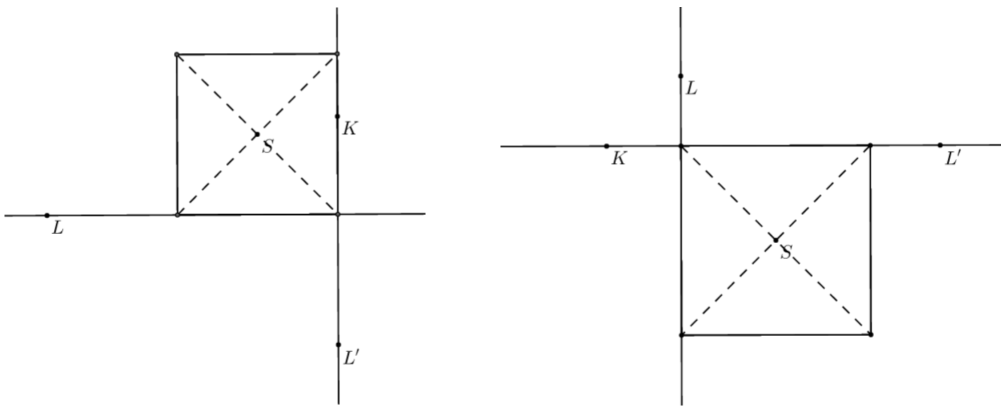
4.4. Dani su paralelni pravci a, b i c. Konstruirajte jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ tako da je $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$.

Analiza. Pretpostavimo da je konstruiran traženi trokut $\triangle ABC$. Rotacijom r_A oko vrha A za $\frac{\pi}{3}$ (u pozitivnom smjeru - obrnuto od smjera kazaljke na satu), točka B se preslika u C. Ako s b' označimo sliku pravca b pri toj rotaciji, vidimo da je točka C presjek pravaca b' i c. B je slika od C pri rotaciji oko A za $-\frac{\pi}{3}$ (za $\frac{\pi}{3}$ u negativnom smjeru).



Konstrukcija.

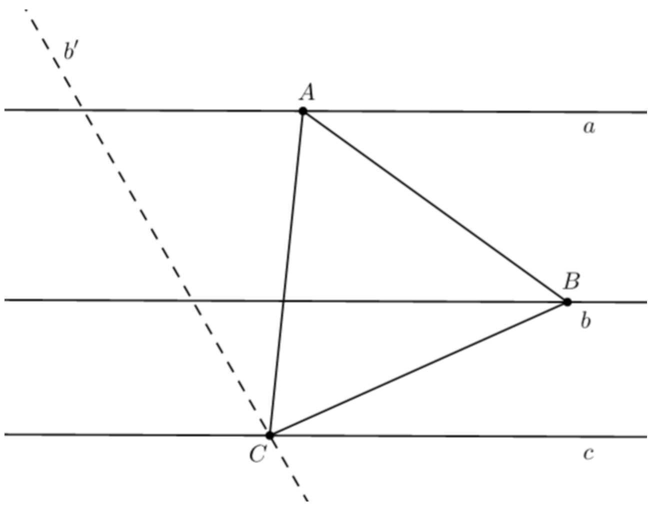
1. Odaberemo proizvoljnu točku $A \in a$.



2. Konstruiramo pravac b' kao sliku pravca b pri rotaciji oko točke A za $\frac{\pi}{3}$.
3. Točka C presjek pravaca b' i c.
4. Konstruiramo točku B kao sliku od C pri rotaciji oko A za $-\frac{\pi}{3}$.

Dokaz. Iz konstrukcije je jasno da je $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{3}$ i $|AB| = |AC|$. Odatle zaključujemo da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan.

Rasprava. Uvijek imamo dva rješenja. Prvo je opisano gornjom konstrukcijom, a drugo se dobije rotacijom pravca b oko točke A za $-\frac{\pi}{3}$ (slika ispod).



4.5. Neka su zadane točke S, K i L. Konstruirajte kvadrat kojemu je S središte, a pravci na kojima leže dvije susjedne stranice prolaze točkama K i L.

Analiza. Pretpostavimo da je konstruiran traženi kvadrat. Moguće su sljedeće dvije situacije (slike iznad redom):
1. pravac na kojem je točka L preslika se u pravac na kojem je točka K rotacijom oko S za $\frac{\pi}{2}$.
2. pravac na kojem je točka L preslika se u pravac na kojem je točka K rotacijom oko S za $-\frac{\pi}{2}$.
Iz toga je jasno da ćemo konstrukciju moći provesti na dva načina - rotacijom točke L oko S za $\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$. Opisat ćemo detaljnije konstrukciju za prvi način.

Konstrukcija.

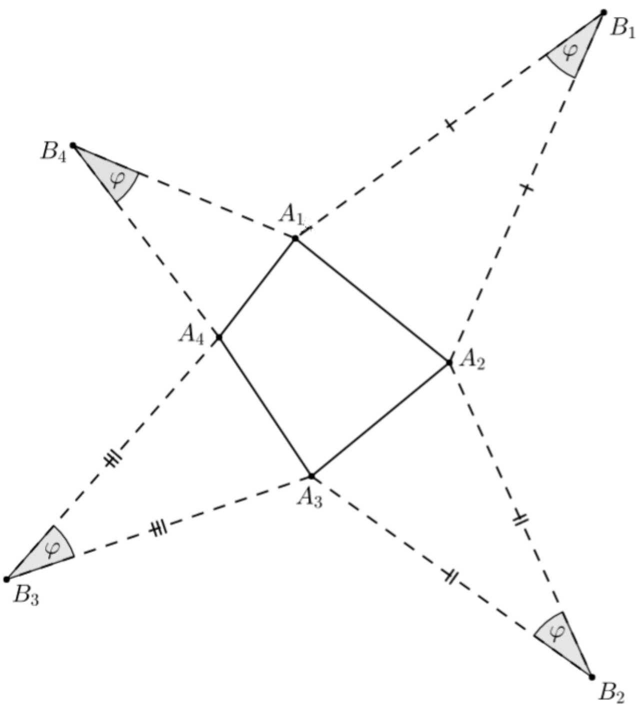
1. Neka je L' slika točke L pri rotaciji oko S za $\frac{\pi}{2}$.
2. Konstruiramo okomicu o iz točke L na pravac KL'
3. Neka je $d = d(S, o) = d(S, KL')$. Konstruiramo traženi kvadrat kao kvadrat sa središtem u S stranice duljine $2d$.

Dokaz. Treba dokazati da je uistinu $d(S, o) = d(S, KL')$. Neka su S_1 i S_2 ortogonalne projekcije točke S na pravce o i KL' redom. Vrijedi $\sphericalangle S_1LS = \sphericalangle S_2L'S$ jer su to kutovi s okomitim kracima. Odavde slijedi da su po KSK poučku trokuti $\triangle S_1SL$ i $\triangle S_2SL'$ sukladni pa je $|SS_1| = |SS_2|$.

Rasprava. Ako su pravci SL i SK okomiti zadatak nema rješenja. Inače imamo dva rješenja - jedno se dobije rotacijom točke L oko S za $\frac{\pi}{2}$, a drugo za $-\frac{\pi}{2}$.

4.6. Dane su točke B_1, B_2, $\ldots$, B_n i kut φ. Konstruirajte mnogokut $A_1A_2\ldots A_n$ tako da trokuti $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, $\ldots$, $A_{n-1}A_nB_{n-1}$ i $A_nA_1B_n$ budu jednakokračni ($|A_kB_k| = |A_{k+1}B_k|$) s kutom φ u vrhovima B_1, B_2, $\ldots$, B_n.

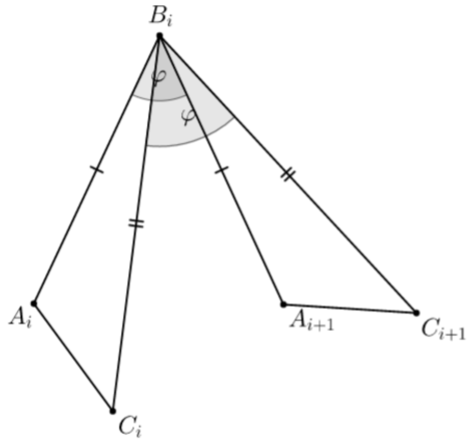
Analiza. Pretpostavimo da je konstruiran traženi mnogokut $A_1A_2\ldots A_n$ (slika ispod za $n = 4$).



A_i se rotacijom za kut φ oko točke B_i preslika u A_{i+i} te se A_n rotacijom za za kut φ oko točke B_n preslika u A_1. Dakle, ako konstruiramo točku A_1, onda lako nizom rotacija možemo konstruirati ostale točke A_2,$\ldots$,A_n. Gdje se nalazi A_1? Neka je C_1 proizvoljna točka, a C_i slika od C_{i-1} pri rotaciji za φ oko B_{i-1}, $i = 2, \ldots, n+1$. Onda su po SKS poučku trokuti $\triangle A_iC_iB_i$ i $\triangle A_{i+1}C_{i+1}B_i$, $i = 1, \ldots, n$ sukladni te su $\triangle A_nC_nB_n$ i $\triangle A_1C_{n+1}B_n$ sukladni (slika ispod). Odatle imamo

$$|A_1C_1| = |A_2C_2| = \cdots = |A_{n-1}C_{n-1}| = |A_nC_n| = |A_1C_{n+1}|,$$

pa se A_1 nalazi na simetrali dužine $\overline{C_1C_{n+1}}$. Ako uzmemo proizvoljnu točku D_1 i ponovimo postupak, dobivamo da je A_1 na presjeku simetrala dužina $\overline{C_1C_{n+1}}$ i $\overline{D_1D_{n+1}}$.



Konstrukcija.

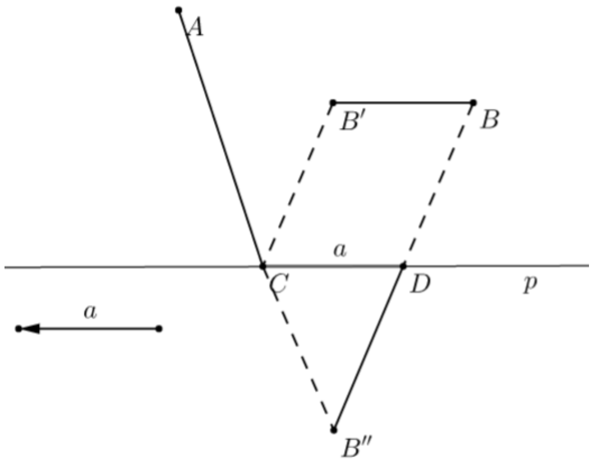
1. Neka je C_1 proizvoljna točka. Konstruiramo točku C_i kao sliku od C_{i-1} pri rotaciji za φ oko B_{i-1} za $i = 2, \ldots, n+1$.
2. Neka je D_1 proizvoljna točka tako da B_1, C_1 i D_1 nisu kolinearne. Konstruiramo točku D_i kao sliku od D_{i-1} pri rotaciji za φ oko B_{i-1} za $i = 2, \ldots, n+1$.
3. Konstruiramo simetralu s_1 dužine $\overline{C_1C_{n+1}}$.
4. Konstruiramo simetralu s_2 dužine $\overline{D_1D_{n+1}}$.
5. Konstruiramo točku A_1 kao presjek pravaca s_1 i s_2.
6. Konstruiramo točke A_i kao slike od A_{i-1} pri rotaciji za kut φ oko točke B_{i-1}.

Dokaz. Slijedi iz konstrukcije.

Rasprava. Rješenje je jedinstveno. Može se pokazati da se za bilo koji izbor točaka C_1 i D_1 simetrale s_1 i s_2 sijeku u istoj točki.

4.7. Dan je pravac p, točke A i B s iste strane toga pravca i dužina duljine a. Na pravcu p konstruirajte točke C i D tako da je $|CD| = a$ i da je zbroj duljina $|AC| + |CD| + |DB|$ najmanji mogući.

Analiza. Pretpostavimo da je zadatak riješen (slika ispod). Trebaju nam točke C i D takve da je zbroj duljina $|AC|+|CD|+|DB|$ najmanji mogući, no kako je $|CD| = a$ zapravo nam treba da je $|AC| + |DB|$ najmanji moguć. Translatirajmo točku B za vektor $\vec{DC}$ i dobivenu točku označimo B'. Tada je lik $CDBB'$ paralelogram, pa je $|AC| + |DB| = |AC| + |CB'|$. Neka je B'' točka osnosimetrična točki B obzirom na pravac p. Tada je $|AC|+|DB| = |AC|+|CB'| = |AC|+|CB''|$, a to je najmanje moguće kad je točka C na pravcu AB''.



Konstrukcija.

1. Translatiramo točku B za vektor $\vec{v}$ duljine a u smjeru pravca p prema točki A i dobivenu točku označimo B'.
2. Konstruiramo točku B'' osnosimetričnu točki B' obzirom na pravac p.
3. Konstruiramo točku C kao presjek pravaca AB'' i p.
4. Konstruiramo točku $D \in p$ tako je $\vec{v} = \vec{DC}$.

Dokaz. Slijedi iz analize i konstrukcije. Preciznije, neka je $\overline{C_1D_1}$ proizvoljna dužina duljine a pri čemu su točke C_1 i D_1 na pravcu p. Tada je $|AC_1| + |BD_1| = |AC_1| + |B'C_1| = |AC_1| + |B''C_1| \geq |AB''| = |AC| + |CB''| = |AC| + |DB|$.

Rasprava. Rješenje je jedinstveno.