3 Osna simetrija i centralna simetrija

Osnovne definicije

Za izometriju f kažemo da je *involutorna* ako je f različita od identitete, ali $f \circ f = id$.

Involutornu izometriju kod koje su sve točke pravca a fiksne zovemo *osnom simetrijom* s osi a ili simetrijom s obzirom na pravac a i označavamo je s_a.

Involutornu izometriju kod koje su svi pravci kroz točku A fiksni zovemo *centralnom simetrijom* s centrom A ili simetrijom s obzirom na točku A i označavamo ju s_A.

Pokaže se da za svaki pravac a postoji točno jedna osna simetrija s_a te da za svaku točku A postoji točno jedna centralna simetrija s_A.

Ove su definicije ekvivalente s onima koje znate od ranije pa ćemo na vježbama koristiti taj pristup:

Slika točke $T \notin a$ pri osnoj simetriji s_a je točka $T' = s_a(T)$ takva da je pravac a simetrala dužine $\overline{TT'}$. Za $T \in a$ je $s_a(T) = T$.

Slika točke $T \neq A$ pri centralnoj simetriji s_A je točka $T' = s_A(T)$ takva da je točka A polovište dužine $\overline{TT'}$. Za $T = A$ je $s_A(T) = A$.

Zadatci

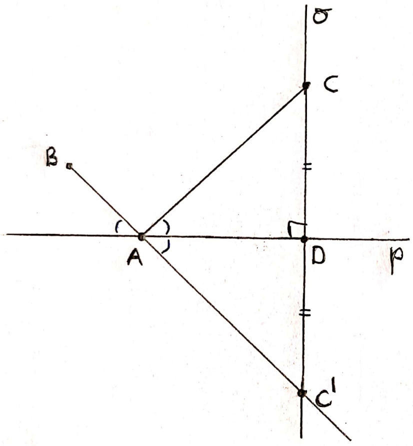
3.1. Dan je pravac p i točke B i C s iste strane tog pravca. Konstruirajte točku A na pravcu p tako da polupravci AB i AC zatvaraju jednake usmjerene kutove $\sphericalangle(AB, p) = \sphericalangle(p, AC)$.

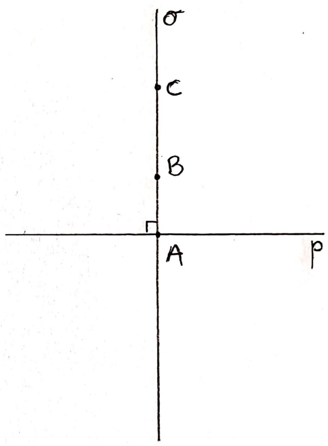
Analiza. Pretpostavimo da je zadatak riješen, tj. da je određena točka A. Neka je σ pravac kroz C okomit na p. Mogu nastupiti dva slučaja (Slike ispod):

1) B ne pripada pravcu σ,
2) B pripada pravcu σ.

U prvom slučaju, sjecište σ i p označimo sa D, a sjecište polupravca BA i σ sa C'. Budući da točka A ima traženo svojstvo te su kutovi $\sphericalangle(AB, p)$ i $\sphericalangle C'AD$ vršni, slijedi $\sphericalangle DAC = \sphericalangle C'AD$. Iz KSK poučka dobivamo da su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle C'DA$ sukladni pa je $|CD| = |C'D|$. Dakle, $C' = s_p(C)$. Konačno, točka A je presjek pravca p i pravca BC'.

U drugom slučaju, točka A je sjecište pravca p i pravca BC.





Konstrukcija.

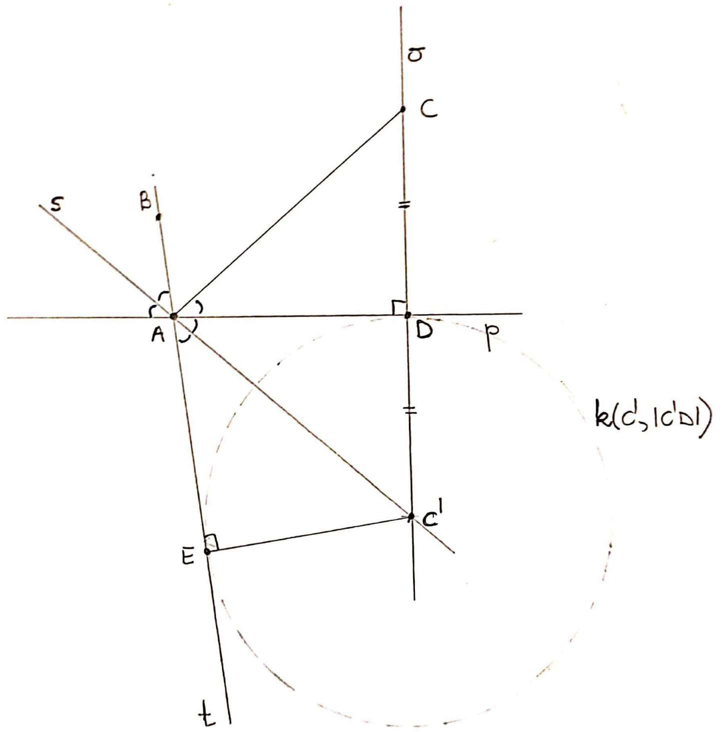
- U prvom slučaju: konstruiramo točku osnosimetričnu točki C obzirom na pravac p i označimo je sa C'. Točka A je presjek pravca p i pravca BC'.
- U drugom slučaju: točka A je presjek pravca p i pravca BC.

Dokaz. U prvom slučaju: Slijedi iz konstrukcije. Naime, neka je $C' = s_p(C)$ i neka je A presjek pravaca p i BC'. Označimo sa D presjek pravaca p i CC'. Kako su po SKS poučku trokuti $\triangle AC'D$ i $\triangle ADC$ sukladni, slijedi da je $\sphericalangle C'AD = \sphericalangle DAC$, a onda je i $\sphericalangle(AB,p) = \sphericalangle DAC$, što je i trebalo dokazati. U drugom slučaju dokaz odmah slijedi iz konstrukcije.

Rasprava. Rješenje je jedinstveno za $B \neq C$.

3.2. Dan je pravac p i točke B i C s iste strane tog pravca. Konstruirajte točku A na pravcu p tako da je $\sphericalangle(AB,p) = 2\sphericalangle(p,AC)$.

Analiza. Pretpostavimo da smo odredili točku A. (Slika ispod.) Neka je s simetrala kuta $\sphericalangle(AB,p)$. Tada je $\sphericalangle(AB,s) = \sphericalangle(s,p) = \sphericalangle(AC,p)$. Neka je σ okomica na pravac p kroz točku C. Označimo: $\{D\} = \sigma \cap p$, $\{C'\} = \sigma \cap s$. Kako su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle AC'D$ sukladni, slijedi da je $|CD| = |C'D|$ pa je $C' = s_p(C)$. Iz točke C' spustimo okomicu na pravac AB i nožište označimo sa E. Kako su trokuti $\triangle AEC'$ i $\triangle AC'D$ sukladni, slijedi da je $|EC'| = |C'D|$ pa za kružnicu sa središtem u C' radijusa $|C'D|$ vrijedi da će joj pravac BE biti tangenta. Konačno, primijetimo da je točka A sjecište te tangente i pravca p.

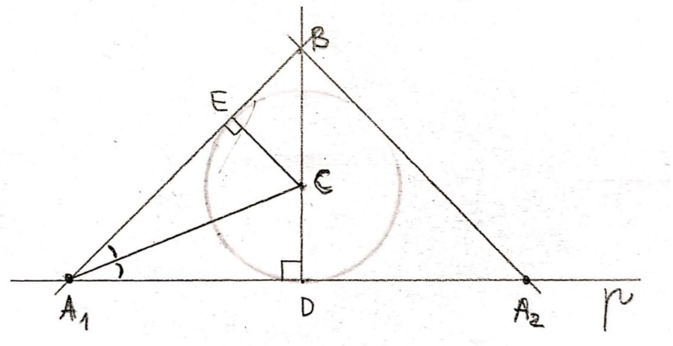


Konstrukcija.

1. Konstruiramo točku osnosimetričnu točki C obzirom na pravac p i označimo je sa C'.
2. Neka je d udaljenost točke C' do pravca p. Konstruiramo kružnicu $k = k(C', d)$.
3. Konstruiramo tangentu t na kružnicu k iz točke B.
4. Točka A je presjek pravca p i tangente t.

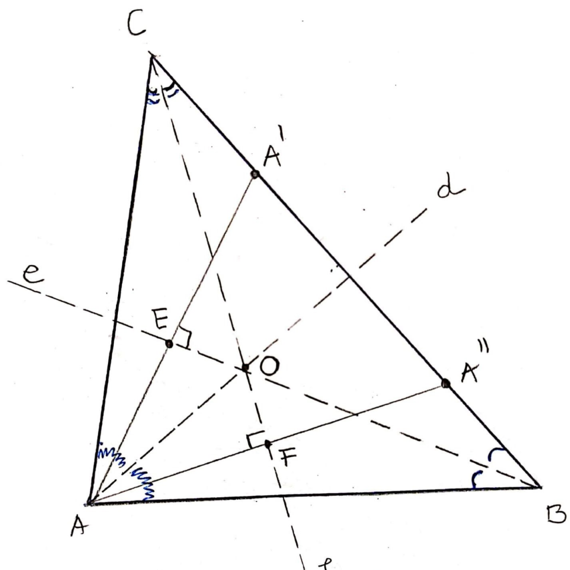
Dokaz. Slijedi iz konstrukcije. Naime, pretpostavimo da su svi elementi iz konstrukcije konstruirani. Označimo sa D presjek pravaca p i CC', a sa E nožište okomice iz C' na tangentu t. Po SSK poučku trokuti $\triangle AEC'$ i $\triangle AC'D$ su sukladni pa je $\sphericalangle EAC' = \sphericalangle C'AD$. Nadalje, po SKS poučku su sukladni trokuti $\triangle AC'D$ i $\triangle ADC$. Sad se lako vidi da je $\sphericalangle(AB, p) = 2\sphericalangle(p, AC)$

Rasprava. U zadatku smo podrazumijevali da tražimo točku A takvu da za usmjerene kutove vrijedi $\sphericalangle(AB, p) = 2\sphericalangle(p, AC)$. U tom slučaju je rješenje jedinstveno. Primijetimo da iako iz točke B imamo dvije tangente na kružnicu $k(C', d)$, samo jedna daje traženu točku A.
Ako ne gledamo usmjerene kutove nego samo kutove, imamo moguća čak četiri rješenja - iz točke B dvije tangente na kružnicu $k(C', d)$ i dvije tangente na kružnicu $k(C, d)$. Jedan takav slučaj je prikazan na slici ispod.



3.3. Dani su pravci d, e, f koji prolaze točkom O. Konstruirajte trokut $\triangle ABC$ tako da su mu dani pravci simetrale kutova.

Analiza. Iz točke A povučemo pravac okomit na pravac e. Njegovo sjecište s pravcem e označimo s E, a sjecište s pravcem BC označimo s A'. Kako su po KSK poučku trokuti $\triangle ABE$ i $\triangle EBA'$ sukladni, slijedi $s_e(A) = A' \in BC$. Analogno, iz vrha A povučemo pravac okomit na pravac f. Njegovo sjecište s pravcem f označimo s F, a sjecište s pravcem BC s A''. Kako su po KSK poučku trokuti $\triangle AFC$ i $\triangle FA''C$ sukladni, slijedi $s_f(A) = A'' \in BC$. Konačno, primijetimo da je točka B presjek pravaca e i $A'A''$, a točka C presjek pravaca f i $A'A''$.



Konstrukcija.

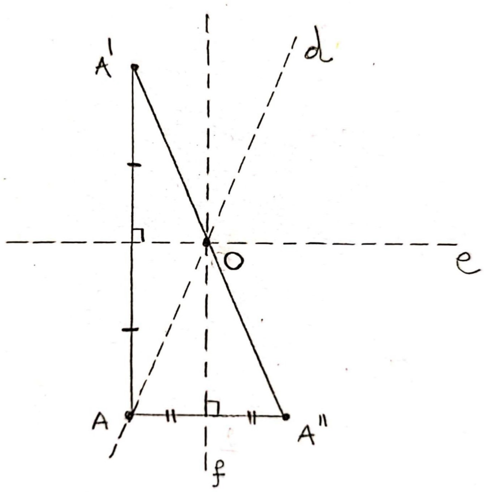
1. Odaberemo proizvoljnu točku A na pravcu d, $A \neq O$.
2. Konstruiramo točku $A' = s_e(A)$.
3. Konstruiramo točku $A'' = s_f(A)$.
4. Točka B je presjek pravaca e i $A'A''$.
5. Točka C je presjek pravaca f i $A'A''$.

Dokaz. Iz konstrukcije i trokuta promatranih u analizi, slijedi da je e simetrala kuta $\sphericalangle CBA$ i da je f simetrala kuta $\sphericalangle ACB$. Kako se simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki, slijedi da je d simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.

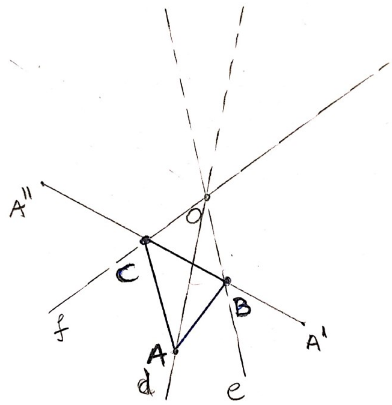
Rasprava. Točka A može biti bilo koja točka na pravcu d različita od O, pa ako zadatak ima rješenje, ima ih beskonačno mnogo. Odabirom točke A, točke B i C su jedinstveno određene. Kad zadatak ima rješenje?

Promotrimo proizvoljan trokut $\triangle ABC$ kojemu su pravci d, e i f simetrale unutrašnjih kutova u vrhovima A, B i C, redom. Ako gledamo usmjerene kutove među pravcima, jasno je da je $\sphericalangle(d,e) = \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle(e,f) = \sphericalangle BOC$ i $\sphericalangle(f,d) = \sphericalangle COA$. Ako sa α i β označimo unutrašnje kutove trokuta $\triangle ABC$ u vrhovima A i B redom, vidimo da je $\sphericalangle AOB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Budući da je uvijek $\alpha + \beta < 180°$, dobivamo $\sphericalangle(d,e) = \sphericalangle AOB > 90°$. Analogno računamo za ostale kutove. Dakle, da bi zadatak imao rješenje, puni kut u vrhu O mora se moći rastaviti na tri usmjerena tupa kuta $\sphericalangle(d,e)$, $\sphericalangle(e,f)$ i $\sphericalangle(f,d)$.

Nadalje, da bi rješenje postojalo, pravac $A'A''$ mora sjeći pravce e i f. Dakle, ne smije biti $A'A'' \parallel e$ ni $A'A'' \parallel f$. Dokažite sami za vježbu da je $A'A'' \parallel e$ ako i samo ako je $d \perp f$ i, analogno, da je $A'A'' \parallel f$ ako i samo ako je $d \perp e$. Nadalje, ako pravac $A'A''$ prolazi točkom O, onda su točke B i C obje jednake O, pa zadatak nema rješenje. Zaključite s donje slike da pravac $A'A''$ prolazi točkom O ako i samo ako je $e \perp f$. Dakle, da bi zadatak imao rješenje, nikoja dva od zadana tri pravca ne smiju biti međusobno okomita. No, to već imamo osigurano kad u gornjem dijelu zahtijevamo da se puni kut u vrhu O može rastaviti na tri usmjerena tupa kuta $\sphericalangle(d,e)$, $\sphericalangle(e,f)$ i $\sphericalangle(f,d)$.



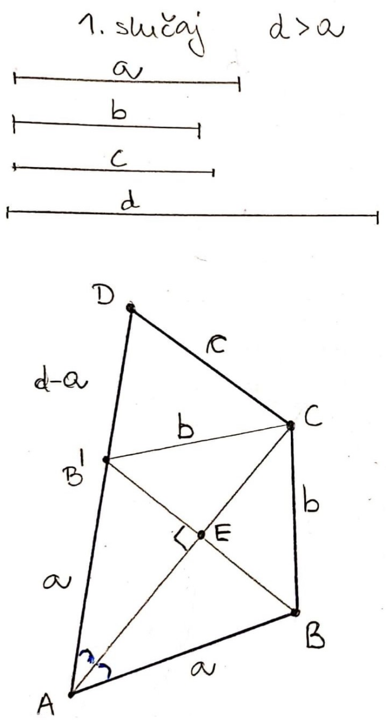
Primijetimo još da nije dovoljno da zahtijevamo da nikoja dva od zadana tri pravca nisu međusobno okomita jer ako je npr. usmjereni kut $\sphericalangle(d,e)$ šiljasti, dobit ćemo trokut $\triangle ABC$ kojemu su dva pravca simetrale vanjskih, a ne unutarnjih kutova (slika ispod).

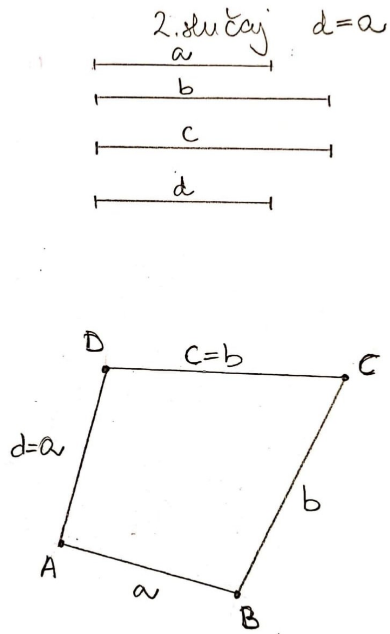


3.4. Konstruirajte četverokut $ABCD$ kojemu dijagonala $\overline{AC}$ raspolavlja kut u vrhu A ako su mu dane duljine stranica $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$.

Analiza. Promotrimo prvo slučaj kad je $d > a$. Spustimo iz točke B okomicu na AC. Sjecište te okomice s pravcem AD označimo sa B'. Kako su trokuti $\triangle AEB'$ i $\triangle ABE$ sukladni, slijedi $|B'E| = |BE|$, pa je $B' = s_{AC}(B)$. Uočimo da iz ove sukladnosti trokuta slijedi i $|AB'| = |AB| = a$, pa je $|B'D| = d - a$. Nadalje, iz sukladnosti trokuta $\triangle B'EC$ i $\triangle EBC$ slijedi $|B'C| = |BC| = b$. Sada u trokutu $\triangle B'CD$ imamo $|B'D| = d - a$, $|B'C| = b$, $|CD| = c$, pa ga možemo konstruirati. Onda možemo konstruirati točku A na polupravcu DB' tako da je $|AD| = d$, pa točku B tako da je $B = s_{AC}(B')$.

Ako je $d < a$, u gornjemu zamijenimo uloge B i D. Ako je $d = a$, iz sukladnosti trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$, dobivamo $b = c$. Točke B i D su na presjeku kružnica $k(A, a)$ i $k(C, b)$. Da bi se te kružnice sjekle u dvije točke, mora biti $|a - b| < |AC| < a + b$.





Konstrukcija.

(a) Prvi slučaj kad je $d > a$:

1. Konstruiramo dužinu duljine $d - a$.
2. Konstruiramo trokut $\triangle B'CD$ sa stranicama $|B'D| = d - a$, $|B'C| = b$, $|CD| = c$.
3. Konstruiramo točku A na polupravcu DB' tako da je $|DA| = d$.
4. Konstruiramo točku B tako da je $B = s_{AC}(B')$.

(b) Drugi slučaj kad je $d = a$:

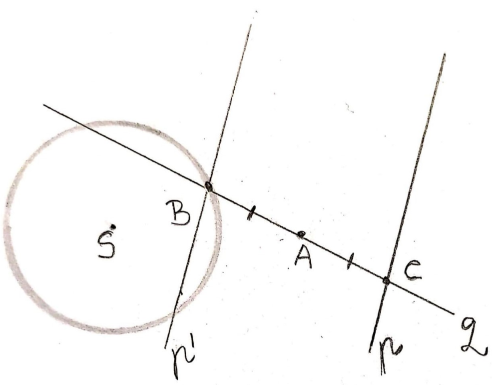
1. Oko proizvoljne točke A konstruiramo kružnicu radijusa a.
2. Oko proizvoljne točke C takve da je $|a - b| < |AC| < a + b$, konstruiramo kružnicu radijusa b.
3. Točke B i D su presjek kružnica $k(A, a)$ i $k(C, b)$.

Dokaz. Slijedi iz konstrukcije. Raspišite sami za vježbu.

Rasprava. Ako $|d-a|$, b i c zadovoljavaju nejednakost trokuta, možemo konstruirati trokut čije su to duljine stranica. Kad konstruiramo takav trokut, točke A i B su jedinstveno određene, pa u ovom slučaju imamo jedinstveno rješenje. Ako je $d = a$ i $b = c$, u tom slučaju imamo beskonačno mnogo rješenja. U svim ostalim slučajevima zadatak nema rješenje.

3.5. Dana je kružnica k, točka A i pravac p. Konstruirajte pravac q koji prolazi kroz A, a siječe k i p i točkama B i C tako da je A polovište dužine $\overline{BC}$.

Analiza. Pretpostavimo da je određen pravac q. Tada je $|AB| = |AC|$ (slika ispod). Centralna simetrija obzirom na A preslika točku B u C, a pravac p u pravac p'. Dakle, B je presjek pravca p' i kružnice k. Konačno, pravac q prolazi kroz točke A i B.



Konstrukcija.

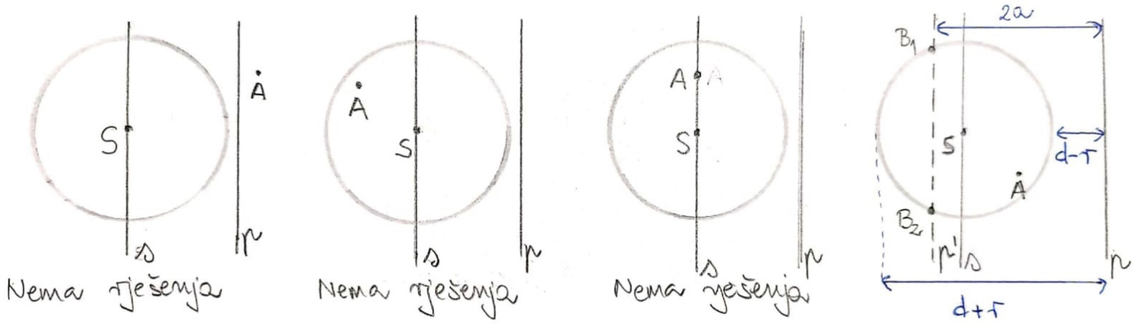
1. Konstruiramo pravac p' centralnosimetričan pravcu p obzirom na točku A.
2. Točka B je presjek pravca p' i kružnice k.
3. Konstruiramo pravac q kroz točke A i B.

Dokaz. Slijedi iz konstrukcije. Centralna simetrija osigurava da je $|BA| = |AC|$.

Rasprava. Neka je S središte dane kružnice, a r njen radijus. Označimo sa d udaljenost $d(S, p)$, a s a udaljenost $d(A, p)$. Lako se vidi da je onda udaljenost pravaca p i p' jednaka $2a$. Neka je s pravac kroz S paralelan s p. Promotrimo sljedeće moguće slučajeve:

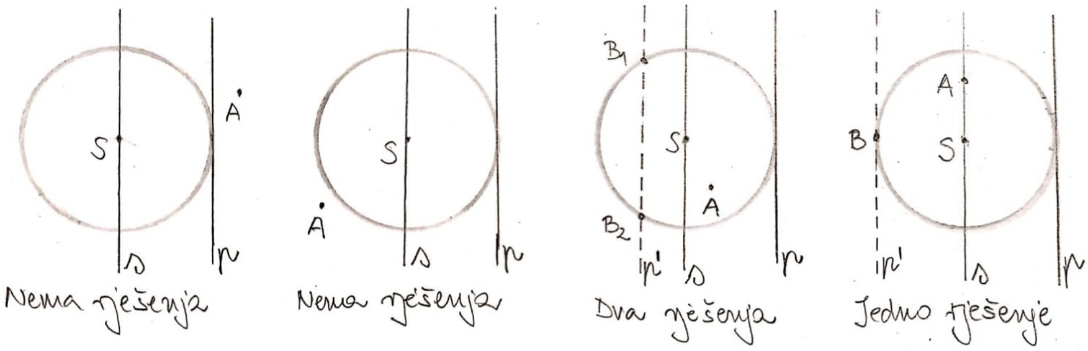
1) $d > r$, tj. pravac p nema zajedničkih točaka s kružnicom k.

Ako se pravci p i s nalaze s iste strane točke A ili ako se A nalazi na pravcu s, zadatak nema rješenje. U slučaju da se točka A nalazi između pravaca p i s, zadatak ima rješenje ako i samo ako je $d - r \leq 2a \leq d + r$. U slučaju jednakosti pravac p' je tangenta na kružnicu k pa imamo jedno rješenje, a u slučaju stroge nejednakosti, pravac p' siječe kružnicu k u dvije točke pa imamo dva rješenja.



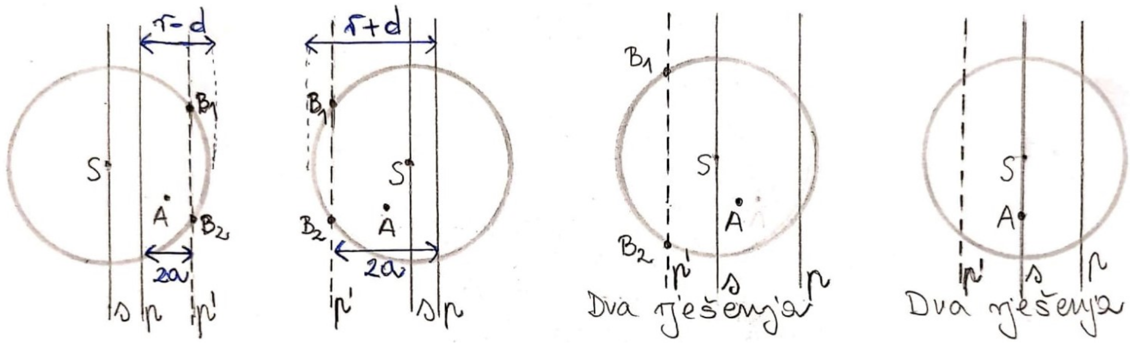
2) $d = r$, tj. pravac p je tangenta na kružnicu k.

Ako se pravci p i s nalaze s iste strane točke A, zadatak nema rješenje. U slučaju da se točka A nalazi između pravaca p i s, zadatak ima dva rješenja. U slučaju da točka A pripada pravcu s, imamo jedno rješenje.



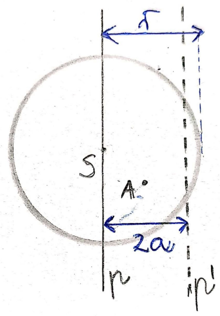
3) $d < r$, tj. pravac p siječe kružnicu k u dvije točke i $S \notin p$.

Ako se pravci p i s nalaze s iste strane točke A te je A bliže pravcu p, zadatak ima rješenje ako i samo ako je $2a \leq r - d$. U slučaju da se pravci p i s nalaze s iste strane točke A te je A bliže pravcu s, zadatak ima rješenje ako i samo ako je $2a \leq r + d$. U slučaju da se točka A nalazi između pravaca p i s, zadatak ima dva rješenja. U slučaju da točka A pripada pravcu s, imamo također dva rješenja.



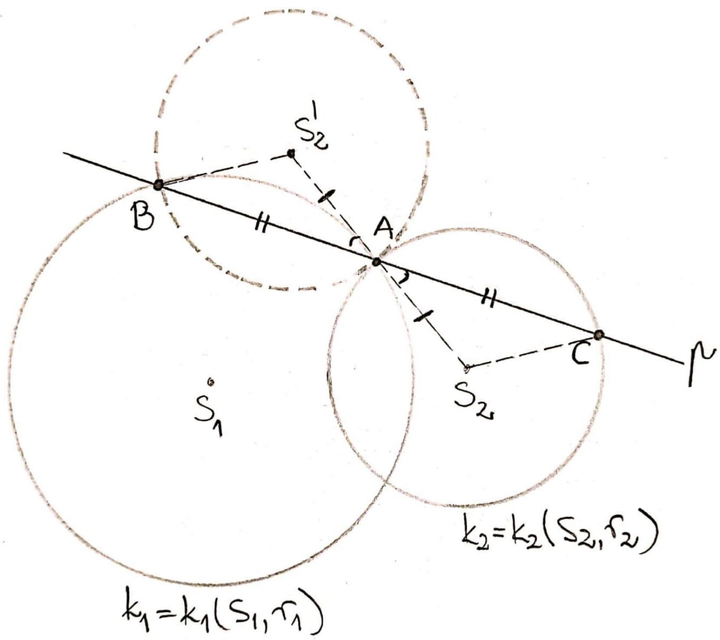
4) $S \in p$

Zadatak ima rješenje ako i samo ako je $2a \leq r$.



3.6. Dane su kružnice k_1 i k_2 sa zajedničkom točkom A. Kroz A konstruirajte pravac p kojemu tetive u kružnicama k_1 i k_2 imaju jednake duljine.

Analiza. Pretpostavimo da je konstruiran traženi pravac p. Tada je $|AB| = |AC|$ (slika ispod). Neka je S_2' točka centralnosimetrična točki S_2 obzirom na A, tj. $S_2' = s_A(S_2)$. Iz sukladnosti trokuta $\triangle BAS_2'$ i $\triangle AS_2C$ slijedi $|BS_2'| = r_2$, pa se B nalazi na presjeku kružnica k_1 i $k(S_2', r_2)$. Primijetimo da je $k(S_2', r_2) = s_A(k_2)$.

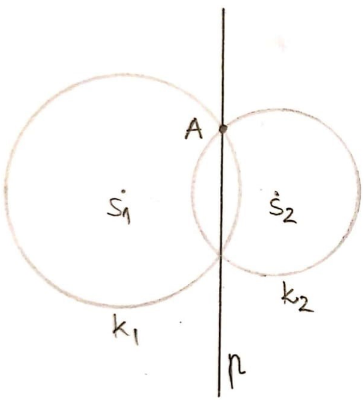


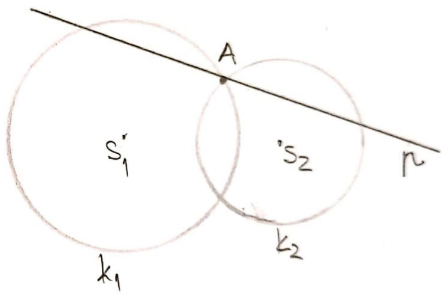
Konstrukcija.

1. Konstruiramo kružnicu k_2' centralnosimetričnu kružnici k_2 obzirom na točku A.
2. Točka B je presjek kružnica k_1 i k_2'.

Dokaz. Slijedi iz konstrukcije. Naime, pretpostavimo da su konstruirani svi elementi iz konstrukcije. Sjecište pravca AB s kružnicom k_2 označimo sa C. Zbog centralne simetrije trokuti $\triangle AS_2'B$ i $\triangle AS_2C$ su sukladni pa je $|BA| = |AC|$, što je i trebalo dokazati. Jedino bi još trebalo komentirati zašto se u slučaju da se kružnice k_1 i k_2 sijeku u dvije točke, onda i kružnice k_1 i k_2' sijeku u dvije točke (A i B). Međutim, to vrijedi jer je $|S_1S_2| = |S_1S_2'|$.

Rasprava. Ako se kružnice k_1 i k_2 sijeku u dvije točke, zadatak ima dva rješenja - jedno je pravac kroz te dvije točke, a drugo pravac dobiven gornjom konstrukcijom. (Slike ispod.)





Ako se kružnice k_1 i k_2 dodiruju, tj. ako im je A jedina zajednička točka, onda u slučaju $r_1 \neq r_2$ zadatak nema rješenja, a u slučaju $r_1 = r_2$ rješenje je svaki pravac kroz A osim tangente u A na kružnice k_1 i k_2. (Slike ispod.)