2 Algebarska metoda

2.1 Osnovne algebarske konstrukcije

Neka su zadane dužine duljina a, b i c, te brojevi $n, m \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo $a > b$. Znate konstruirati $x = a + b$, $x = a - b$, $x = \frac{a}{n}$, $x = \frac{m}{n}a$, $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, te $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ovdje ćemo još posebno opisati konstrukciju geometrijske sredine i četvrte proporcionale.

Konstrukcija geometrijske sredine

$$x = \sqrt{ab}$$

Opis konstrukcije:

1. proizvoljan pravac i neka točka O na pravcu
2. nanesemo na pravac duljine a i b od točke O s različitih strana i označimo krajeve s A i B, dakle imamo $|AO| = a$, $|OB| = b$, $|AB| = a + b$
3. kružnica k nad promjerom $\overline{AB}$ (konstruiramo polovište S od $\overline{AB}$, pa $k(S, |SA|)$)
4. okomica o na AB u točki O
5. k i o se sijeku u X
6. tražena duljina je duljina $|OX|$

Uvjerite se sami u ispravnost konstrukcije (nađite dokaz).

Konstrukcija četvrte proporcionale

$$x = \frac{ab}{c}$$

Zapišimo uvjet ovako: $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$. Jedna od konstrukcija je:

1. proizvoljan kut, označimo vrh s O, te krakove s p i q
2. nanesemo na krak p duljinu a i označimo krajnju točku s A, dakle $|OA| = a$
3. nanesemo na krak q duljine b i c te označimo krajnje točke s B i C, dakle $|OB| = b$, $|OC| = c$
4. paralela kroz B s pravcem AC siječe p u X
5. $|OX|$ je tražena duljina

Uvjerite se sami u ispravnost konstrukcije (nađite dokaz).

Sve slike je najbolje da skicirate sami kako proučavate rješenje zadatka po uputama. Na posljednje dvije stranice nalaze se neke slike.

2.2 Popis zadataka

Dobro je da ove zadatke prvo pokušate sami riješiti pa tek onda gledate rješenja.

1. Dane su dužine duljina a i b. Konstruirajte dužine duljina $a\sqrt{35}$, $\frac{4b}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{a^2+2ab+3b^2}$.

2. Dane su dužine duljina a i b. Konstruirajte kut β takav da vrijedi $\cos\beta = \frac{\sqrt{3a^2-2b^2}}{2a}$.

3. Dane su dvije koncentrične kružnice. Konstruirajte krug čija je površina jednaka površini prstena koji određuju te dvije kružnice.

4. Dan je trokut. Konstruirajte kvadrat iste površine.

5. Povucite paralelu s odabranom osnovicom trokuta koja dijeli trokut na dva dijela jednakih površina.

6. Dan je trokut ABC. Oko njegovih vrhova opišite kružnice koje se u parovima dodiruju izvana.

7. Konstruirajte pravokutan trokut ako su dane: duljina c njegove hipotenuze i duljina l onog dijela simetrale pravog kuta koji leži unutar trokuta.

Zadnji zadatak je dosta teži od ostalih.

2.3 Rješenja zadataka

Zadatak 2.1. Dane su dužine duljina a i b. Konstruirajte dužine sljedećih duljina.

(a) $a\sqrt{35}$

(b) $\dfrac{4b}{\sqrt{3}}$

(c) $\sqrt{a^2+2ab+3b^2}$

Rješenje. (a) Broj ne možemo konstruirati – konstruiramo dužinu određene duljine, lik određene površine. Zbog toga, uvijek nam u rješavanju zadatka pomaže kad pratimo dimenzije dijelova izraza. Izraz $\sqrt{35}$ je broj, a $a\sqrt{35}$ je duljina. Korijen broja ne možemo konstruirati, ali možemo konstruirati duljinu koja je korijen produkta duljina. Zbog toga ubacimo duljinu a pod korijen,

$$\sqrt{35}a = \sqrt{35a^2}$$

i sada možemo konstruirati izraz kao geometrijsku sredinu duljina $5a$ i $7a$, zbog

$$\sqrt{35a^2} = \sqrt{5a \cdot 7a}.$$

Možemo ga konstruirati i kao duljinu katete pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $6a$ i drugom katetom duljine a, zbog

$$\sqrt{35a^2} = \sqrt{36a^2 - a^2} = \sqrt{(6a)^2 - a^2}.$$

(b) Slično kao pod (a) neku duljinu ćemo ubaciti pod korijen. Možemo upotrijebiti duljinu b iako nije u nazivniku gdje je korijen,

$$\frac{4b}{\sqrt{3}} = \frac{4b \cdot b}{\sqrt{3}b} = \frac{4b \cdot b}{\sqrt{3b^2}}.$$

U brojniku je umnožak duljina, a u nazivniku duljina, dakle, taj izraz je oblika $\frac{x \cdot b}{y}$ pa ćemo ga dobiti konstrukcijom četvrte proporcionale

$$z = \frac{x \cdot b}{y},$$

nakon što konstruiramo duljinu y u nazivniku kao geometrijsku sredinu $3b$ i b,

$$y = \sqrt{3b^2} = \sqrt{3b \cdot b}$$

i duljinu $x = 4a$ u brojniku nižući duljinu a na polupravac četiri puta.

Jedan drugačiji način je ubaciti duljinu b pod korijen u brojniku,

$$\frac{4b}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{\frac{b^2}{3}} = 4\sqrt{\frac{b}{3} \cdot b},$$

pa konstruirati izraz redoslijedom

$$x = \frac{b}{3}, \quad y = \sqrt{x \cdot b}, \quad z = 4y.$$

(c) Prvo zamijetimo da je izraz

$$\sqrt{a^2 + 2ab + 3b^2}$$

korijen zbroja nekoliko kvadrata duljina. Zaista, $2ab = x^2$ za $x = \sqrt{2a \cdot b}$ i $3b^2 = y^2$ za $y = \sqrt{3b \cdot b}$. Kad konstruiramo x i y kao geometrijske sredine duljina, preostane nam konstruirati

$$\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}.$$

To je pak korijen zbroja dva kvadrata duljina, jer je $x^2 + y^2 = z^2$ za $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Konstruiramo z kao duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta i preostane nam konstruirati

$$\sqrt{a^2 + z^2},$$

što je opet duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, sada s katetama duljina a i z.

Izrazi se naravno mogu konstruirati na razne načine. Ovdje naprimjer možemo i ovako razložiti izraz:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + 3b^2} = \sqrt{a^2 + b(2a + 3b)}$$

te ga konstrurati ovim redoslijedom:

$$x = 2a + 3b, \quad y = \sqrt{b \cdot x}, \quad z = \sqrt{a^2 + y^2}.$$

Zadatak 2.2. Dane su dužine duljina a i b. Konstruirajte kut β tako da vrijedi

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{3a^2 - 2b^2}}{2a}.$$

Rješenje. Uočimo da u brojniku trebamo konstruirati duljinu i u nazivniku također duljinu. Slično kao prije, u brojniku umnoške duljina možemo zamijeniti s kvadratima duljina,

$$\sqrt{3a^2 - 2b^2} = \sqrt{x^2 - y^2},$$

za $x = \sqrt{3a \cdot a}$ i $y = \sqrt{2b \cdot b}$, pa ga konstruirati kao duljinu katete pravokutnog trokuta $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ nakon što konstruiramo x i y kao geometrijske sredine duljina. Duljinu u nazivniku lako konstruiramo, $w = 2a$. Sada kut β možemo dobiti konstrukcijom pravokutnog trokuta čija je jedna kateta duljine z, a hipotenuza duljine w. Kut β je kut između te katete i hipotenuze.

Zadatak 2.3. Dane su dvije koncentrične kružnice. Konstruirajte krug čija je površina jednaka površini prstena koji određuju te dvije kružnice.

Rješenje. Iz danih kružica očitamo duljine r i R njihovih radijusa, $r < R$. Površine dvaju krugova su $r^2\pi$ i $R^2\pi$, a površina kružnog vijenca je njihova razlika,

$$R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi.$$

Traženi krug ima površinu jednaku tome pa za njegov polumjer x vrijedi

$$x^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$$

$$x^2 = R^2 - r^2$$

dakle, polumjer možemo konstruirati kao duljinu katete pravokutnog trokuta,

$$x = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Nakon toga konstruiramo kružnicu radijusa x.

Zadatak 2.4. Dan je trokut. Konstruirajte kvadrat iste površine.

Rješenje. Odaberimo neku stranicu trokuta i označimo njenu duljinu s a. Povlačenjem okomice iz nasuprotnog vrha na tu stranicu konstruiramo v_a, duljinu visine na tu stranicu. Površina trokuta je određena tim dvjema duljinama,

$$P = \frac{av_a}{2}.$$

Kvadrat je određen duljinom x svoje stranice. Da bi kvadrat imao istu površinu kao trokut mora biti

$$x^2 = \frac{av_a}{2},$$

to jest

$$x = \sqrt{\frac{av_a}{2}}.$$

Taj izraz možemo konstruirati kao geometrijsku sredinu duljina $\frac{a}{2}$ i v_a,

$$x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot v_a}.$$

Nakon toga konstruiramo kvadrat stranice duljine x.

Zadatak 2.5. Povucite paralelu s odabranom osnovicom trokuta koja dijeli trokut na dva dijela jednakih površina.

Rješenje. Označimo duljinu odabrane stranice s a, a povlačenjem okomice na nju iz nasuprotnog vrha A odredimo duljinu visine v_a. One određuju površinu cijelog trokuta,

$$P = \frac{av_a}{2}.$$

Paralelno toj stranici treba povući pravac p tako da pravac odsječe trokut dvostruko manje površine. Čime je određen položaj tog pravca? Položaj tog paralelnog pravca određen je udaljenošću pravca od točke A, zasad nepoznatom duljinom x. Kako konstruirati x? Jedan uvjet koji mora biti zadovoljen je taj da je površina odsječenog trokuta dvostruko manja od površine cijelog trokuta. Da bismo izrazili površinu manjeg trokuta, treba nam još jedna duljina: uzmimo duljinu y odsječka paralele p koji je unutar trokuta. Imamo dakle taj uvjet izražen algebarski jednadžbom

$$\frac{xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{av_a}{2},$$

to jest

$$xy = \frac{av_a}{2}.$$

To je jedna jednadžba s dvije nepoznanice. Potrebna nam je još jedna. Znamo da je položaj pravca p određen s x, dakle, y sigurno možemo izraziti pomoću x. Položaj pravca je određen s x jer je pravac paralelan odabranoj stranici, pa zaključujemo da pomoću x koristeći to svojstvo paralelnosti sigurno možemo izraziti y. Uočimo da je manji trokut zbog paralelnosti pravaca sličan većem, dakle, duljine odgovarajućih stranica i visina odnose im se u istom omjeru. Tako dobivamo još jednu jednadžbu,

$$\frac{x}{v_a} = \frac{y}{a}.$$

Riješimo sustav dvije jednadžbe. Iz druge jednadžbe imamo

$$y = \frac{a}{v_a}x$$

što uvrstimo u prvu

$$x \cdot \frac{a}{v_a}x = \frac{av_a}{2}$$

pa dobijemo

$$x^2 = \frac{v_a^2}{2}.$$

Dakle, x konstruiramo kao geometrijsku sredinu

$$x = \sqrt{\frac{v_a}{2} \cdot v_a}.$$

Nakon toga povučemo pravac paralelan s odabranom stranicom na udaljenosti x od A.

Nakon što smo riješili zadatak zamjećujemo da se duljine x i v_a odnose u omjeru $\frac{1}{\sqrt{2}}$. To je koeficijent sličnosti ta dva trokuta, pa vidimo da smo mogli do rješenja lakše doći izračunavši taj koeficijent k iz omjera dviju površina:

$$P_x = k^2 P \Longrightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} v_a \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{v_a}{2} \cdot v_a}$$

ili ovako, uzevši y kao nepoznanicu koja određuje paralelu,

$$P_y = k^2 P \Longrightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} a \Longrightarrow y = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot a}$$

te u drugom slučaju trokut konstruirati tako da na odabranu osnovicu nanesemo y iz jednog vrha i dobijemo točku Y, pa paralelom sa drugom stranicom iz tog vrha kroz Y presječemo treću stranicu trokuta i dobijemo točku Z. Paralela s osnovicom kroz Z je traženi pravac. Uvjerite se u ispravnost ove konstrukcije (pronađite dokaz).

Zadatak 2.6. Dan je trokut ABC. Oko njegovih vrhova opišite kružnice koje se u parovima dodiruju izvana.

Rješenje. Središta traženih kružnica su poznata, pa će kružnice biti određene čim konstruiramo njihove polumjere, koji su sada nepoznanice x, y, z. Dodir dviju kružnica je uvijek na spojnici njihovih središta, dakle, kružnice $k(A, x)$ i $k(B, y)$ dodiruju se točno onda kad je $x + y = c$, udaljenost središta A i B. Trokut je određen duljinama svojih stranica a, b, c i one su poznate. Sve tri kružnice se dodiruju ako je

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases}$$

gdje je z radijus treće kružnice, $k(C, z)$. Riješimo li taj sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice, dobivamo

$$x = \frac{-a + b + c}{2}, \quad y = \frac{a - b + c}{2}, \quad z = \frac{a + b - c}{2}.$$

Dovoljna nam je duljina x za konstrukciju. Opis konstrukcije je:

1. duljina $-a + b + c$, pa njena polovina x
2. kružnica $k(A, x)$
3. $k(A, x)$ siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama P i Q
4. $k(B, |BP|)$, $k(C, |CQ|)$

Slijedi rasprava. U prvom koraku moramo dobiti duljinu, $x > 0$, dakle, mora biti $-a + b + c > 0$, to jest $b + c > a$. Zatim u trećem koraku kružnica mora presjeći unutrašnjost stranica, dakle mora biti $x < b$ i $x < c$, što se svodi na $c < a + b$ i $b < a + c$. Dakle, konstrukciju je moguće provesti i rješenje je jedinstveno točno onda kad stranice trokuta zadovoljavaju nejednakosti trokuta, što je uvijek istina.

Sada slijedi dokaz. Iz konstrukcije je jasno da se kružnice $k(B, |BP|)$ i $k(C, |CQ|)$ dodiruju izvana s $k(A, x)$. Treba dokazati da se i kružnice $k(B, |BP|)$ i $k(C, |CQ|)$ međusobno dodiruju. Njihovi radijusi su, na temelju koraka konstrukcije:

$$|BP| \overset{3.}{=} c - x \overset{1.}{=} c - \frac{-a + b + c}{2} = \frac{a - b + c}{2}$$

$$|CQ| \overset{3.}{=} b - x \overset{1.}{=} b - \frac{-a + b + c}{2} = \frac{a + b - c}{2}$$

pa je

$$|BP| + |CQ| = \frac{a - b + c}{2} + \frac{a + b - c}{2} = a = |BC|,$$

dakle, kružnice se dodiruju izvana (jer je zbroj njihovih radijusa jednak udaljenosti njihovih središta).

Zadatak 2.7.* Konstruirajte pravokutan trokut ako su dane: duljina c njegove hipotenuze i duljina l onog dijela simetrale pravog kuta koji leži unutar trokuta.

Rješenje. Skicirajmo trokut ABC s pravim kutom u vrhu C, simetralu njegovog pravog kuta i označimo na slici duljinu odsječka simetrale s l, te duljinu hipotenuze s c. Označimo sjecište simetrale i hipotenuze s M. Označimo na skici da simetrala raspolavlja kut, $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB$, te da su duljine c i l zadane (npr. zaokružimo oznake).

Zadatak je konstruirati pravokutan trokut. On je određen duljinama svojih kateta i možemo ga lako konstruirati ako odredimo te duljine, pa odlučujemo označiti duljine kateta s $x = |BC|$, $y = |AC|$. To su nepoznanice koje želimo izraziti pomoću poznatih veličina c i l koristeći činjenicu da je CM simetrala i da je kut u vrhu C pravi kut. Kut u vrhu C je pravi, dakle, po Pitagorinom poučku imamo

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{1}$$

Time dobivamo prvu jednadžbu. Potrebna nam je još jedna.

Iz skice zamjećujemo da duljine x i y možemo dovesti u vezu s duljinom c preko Teorema o simetrali kuta u trokutu. Naime, duljine odsječaka na hipotenuzi odnose se kao duljine odgovarajućih stranica x i y, a zajedno u zbroju daju duljinu hipotenuze c,

$$\frac{|BM|}{|AM|} = \frac{x}{y} \tag{2}$$

$$|BM| + |AM| = c \tag{3}$$

Sada imamo tri jednadžbe s četiri nepoznanice, dakle, nismo se pomaknuli značajno jer potrebna nam je opet još jedna jednadžba. Moramo iskoristiti činjenicu da je duljina odsječka simetrale kuta jednaka l, koju još nigdje nismo koristili.

Po kosinusovom poučku, u trokutu BMC je $|BM|^2 = x^2 + l^2 - 2xl\cos 45°$, dakle

$$|BM|^2 = x^2 + l^2 - \sqrt{2}xl \tag{4}$$

i analogno u trokutu AMC

$$|AM|^2 = y^2 + l^2 - \sqrt{2}yl. \tag{5}$$

To su još dvije jednadžbe, dakle sada imamo ukupno četiri nepoznanice, x, y, $|BM|$ i $|AM|$, a pet jednadžbi. To je dovoljno i jedna od njih se sigurno može dobiti kao kombinacija preostale četiri (ako četiri od njih čine nezavisan skup jednadžbi, što je ovdje vrlo vjerojatno istina).

Sada samo trebamo pronaći neki što kraći način da riješimo sustav.

Za početak iz jednadžbi (2) i (3) možemo izraziti $|BM|$ i $|AM|$ pomoću x i y, pa uvrstiti u jednadžbe (4) i (5), da se riješimo te dvije nepoznanice. Iz jednadžbe (2) izrazimo $|BM| = \frac{x}{y}|AM|$ i uvrstimo u jednadžbu (3) $\frac{x}{y}|AM| + |AM| = c$ pa dobivamo

$$|AM|\,\frac{x+y}{y} = c, \text{ to jest } |AM| = \frac{y}{x+y}\,c,$$

a iz toga

$$|BM| = \frac{x}{x+y}\,c.$$

Sada to uvrstimo u preostale jednadžbe u kojima se pojavljuju $|BM|$ i $|AM|$,

$$\left(\frac{x}{x+y}\,c\right)^2 = x^2 + l^2 - \sqrt{2}xl,$$

$$\left(\frac{y}{x+y}\,c\right)^2 = y^2 + l^2 - \sqrt{2}yl.$$

Eto dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, i još imamo jednadžbu $x^2 + y^2 = c^2$.

Uredimo malo te jednadžbe.

$$\frac{c^2}{(x+y)^2}\,x^2 = x^2 + l^2 - \sqrt{2}xl$$

$$\frac{c^2}{(x+y)^2}\,y^2 = y^2 + l^2 - \sqrt{2}yl$$

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s y^2 i drugu s x^2, pa ih oduzmemo, dobivamo:

$$0 = l^2(y^2 - x^2) - \sqrt{2}xyl(y - x),$$

pa imamo

$$0 = l(y - x)(ly + lx - \sqrt{2}xy).$$

Dakle, vrijedi (a) $y = x$ ili (b) $ly + lx - \sqrt{2}xy = 0$ iz čega dobivamo

$$y = \frac{lx}{\sqrt{2}x - l}, \quad \sqrt{2}x \neq l.$$

U slučaju (a) vrijedi dakle $x^2 + x^2 = c^2$, to jest $x = y = \frac{c}{\sqrt{2}}$ i uvrštavanjem u druge jednadžbe vidimo da tada mora biti

$$\frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2} + l^2 - \sqrt{2}\,\frac{c}{\sqrt{2}}\,l$$

to jest

$$l^2 - cl + \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\left(l - \frac{c}{2}\right)^2 = 0$$

što vrijedi točno kad je

$$l = \frac{c}{2}.$$

To vrijedi samo u slučaju kad je traženi trokut jednakokračan, pa mu je odsječak simetrale kuta ujedno i težišnica, koja je u pravokutnom trokutu uvijek duljine $\frac{c}{2}$. Dakle, u posebnom slučaju, ako je $l = \frac{c}{2}$, rješenje je jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom duljine c.

Uvrštavanjem slučaja (b) u jednadžbu $x^2 + y^2 = c^2$, dobivamo

$$x^2 + \frac{l^2x^2}{(\sqrt{2}x - l)^2} = c^2$$

što daje jednadžbu četvrtog stupnja u nepoznanici x,

$$(x^2 - c^2)(\sqrt{2}x - l)^2 + l^2x^2 = 0.$$

Što ćemo sada? Vratimo se na jednadžbe u slučaju (b)

$$ly + lx - \sqrt{2}xy = 0 \tag{6}$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{7}$$

i pokušajmo drugačije, tako da iskoristimo simetriju koja se pojavljuje u rješenjima zadatka (naime, u svakom sustavu koji smo dosad imali vrijedi sljedeće: ako u svakoj jednadžbi zamijenimo x i y, dobijemo isti sustav jednadžbi). Prva jednadžba je

$$l(x + y) = \sqrt{2}xy$$

pa kvadriranjem dobivamo

$$l^2x^2 + l^2 2xy + l^2y^2 = 2x^2y^2.$$

Iskoristimo drugu jednadžbu, pa imamo

$$l^2c^2 + l^2 2xy = 2x^2y^2,$$

čime dobivamo kvadratnu jednadžbu u xy,

$$(xy)^2 - l^2(xy) - \frac{c^2}{2}l^2 = 0.$$

Diskriminanta je $l^4 + 2c^2l^2 = l^2(l^2 + c^2) > 0$, dakle moguća su dva rješenja:

$$(xy)_{1,2} = \frac{l^2 \pm l\sqrt{l^2 + c^2}}{2},$$

no, jedno od njih otpada jer mora biti $(xy) > 0$. Dakle,

$$xy = \frac{l^2 + l\sqrt{l^2 + c^2}}{2}. \tag{8}$$

Sada možemo iz (8) i (6) dobiti jednadžbu sa $(x + y)$,

$$x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}(l + \sqrt{l^2 + c^2}) \tag{9}$$

te onda rješavati sustav (8), (9),

$$xy = \frac{l}{2}(l + \sqrt{l^2 + c^2})$$

$$x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}(l + \sqrt{l^2 + c^2})$$

i za y dobiti kompliciran izraz. (Pokušajte.) To je jedan način. Drugi način je da sada uočimo da zapravo ne moramo računati x ili y zasebno, već je umnožak duljina xy dovoljan da konstruiramo trokut. Zaista, površina trokuta je $\frac{xy}{2} = \frac{cv_c}{2}$ pa možemo iz toga dobiti duljinu visine v_c,

$$v_c = \frac{xy}{c} = \frac{l^2 + l\sqrt{l^2 + c^2}}{2c} = \frac{l(l + \sqrt{l^2 + c^2})}{2c},$$

a to nam je dovoljno da konstruiramo trokut. Slučaj (a) također je uključen ovdje, što se može provjeriti uvrštavanjem $l = \frac{c}{2}$. Opis konstrukcije:

1. $f = \sqrt{l^2 + c^2}$
2. $g = l + f$
3. $h = 2c$
4. $v_c = \frac{l \cdot g}{h}$

Sada preostaje konstrukcija pravokutnog trokuta kojemu je poznata duljina hipotenuze c i duljina visine na hipotenuzu v_c.

5. dužina $\overline{AB}$ duljine c
6. kružnica k nad dijametrom $\overline{AB}$
7. pravac p paralelan s AB na udaljenosti v_c
8. p siječe k u točki C
9. trokut ABC

Obično ne opisujemo posebno konstrukcije za posebne slučajeve, ali ovdje ćemo to napraviti. U slučaju (a) $l = \frac{c}{2}$ trokut lako dobijemo konstrukcijom:

1. dužina $\overline{AB}$ duljine c
2. simetrala dužine $\overline{AB}$, označimo polovište s P
3. kružnica k nad dijametrom $\overline{AB}$
4. k i s sijeku se u A
5. trokut ABC

Uvjerite se da je ova konstrukcija ispravna.

Moguće je da bi rješenje bilo kraće da smo odmah na početku odabrali v_c kao nepoznanicu i krenuli od neke jednadžbe s površinom

$$\frac{cv_c}{2}.$$

Nacrtajte novu skicu i pokušajte sami riješiti zadatak jednostavnije. Postoje razne jednadžbe koje možete odabrati u sustav koji ćete rješavati. Naprimjer, jednadžbe s površinama likova, jednadžbe koje izražavaju sinusov poučak ili kosinusov poučak, jednadžbe s omjerima duljina iz sličnosti trokuta, Teorem o simetrali kuta u trokutu, Euklidov teorem, Pitagorin poučak, formule za radijus opisane i upisane kružnice.

Slijedi rasprava. Sjecište (ili dodir) u osmom koraku postoji točno onda kad je $v_c \leq \frac{c}{2}$. Dakle, da bi rješenje postojalo, mora biti

$$\frac{l^2 + l\sqrt{l^2 + c^2}}{2c} \leq \frac{c}{2}$$

$$l^2 + l\sqrt{l^2 + c^2} \leq c^2.$$

To je ekvivalentno $l\sqrt{l^2 + c^2} \leq c^2 - l^2$ iz čega vidimo da mora biti $c > l$, te nakon kvadriranja

$$l^2(l^2 + c^2) \leq (c^2 - l^2)^2$$

imamo

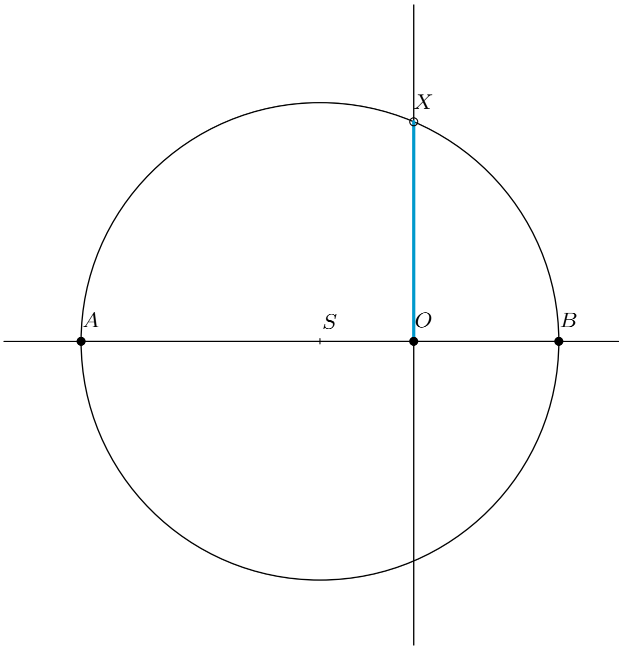
$$0 \leq c^4 - 4c^2l^2, \text{ to jest } l^2 \leq \frac{c^2}{4}$$

što daje upravo

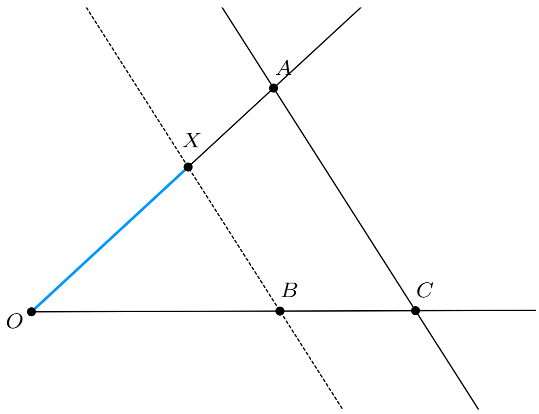
$$l \leq \frac{c}{2}.$$

Dakle, rješenje postoji ako i samo ako je $l \leq \frac{c}{2}$. Rješenje je jedinstveno ako je $l = \frac{c}{2}$, a ako je $l < \frac{c}{2}$ imamo dva rješenja – dva sukladna trokuta.

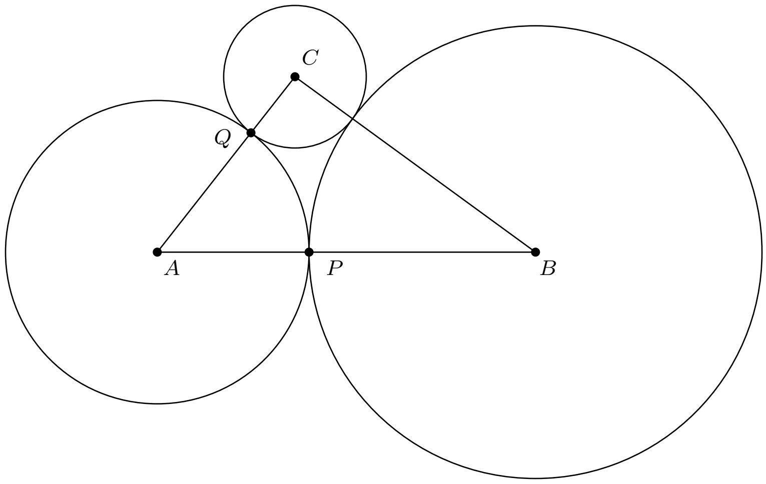
2.4 Neke slike



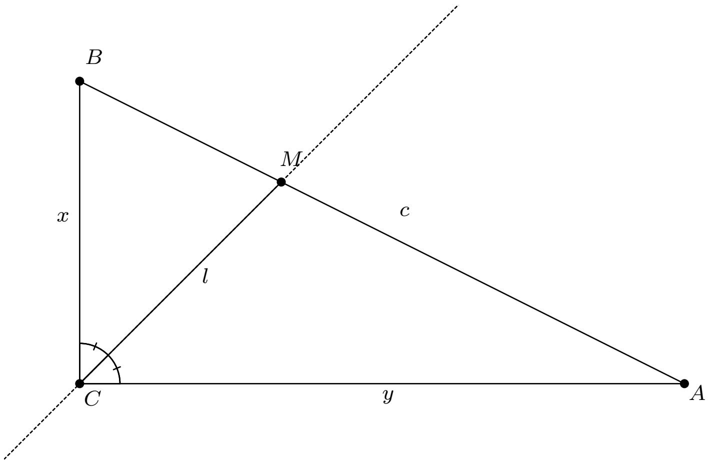
Slika 1: Konstrukcija geometrijske sredine



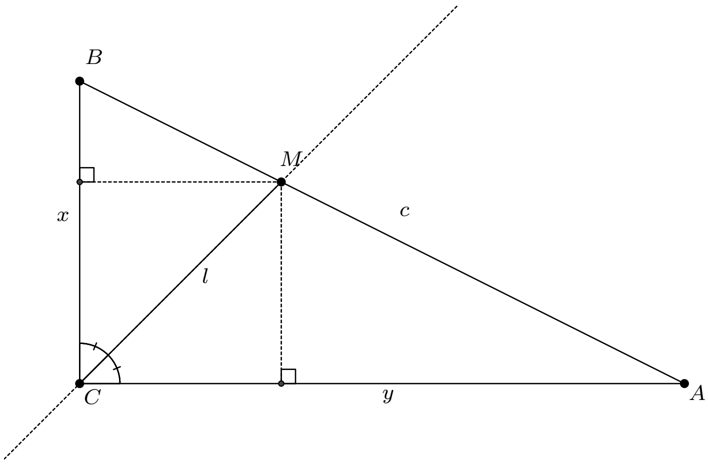
Slika 2: Konstrukcija četvrte proporcionale



Slika 3: Zadatak 2.6.



Slika 4: Zadatak 2.7.



Slika 5: Ideja za drugačije rješenje zadatka 2.7.