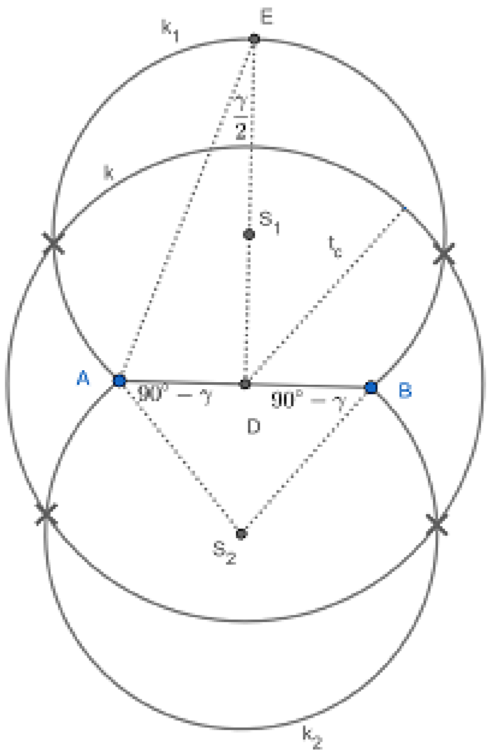
1 Metoda presjeka

Zadatak 1.1. Konstruirajte trokut ABC kojemu je duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka c, duljina težišnice iz vrha C jednaka t_c i mjera kuta u vrhu C jednaka γ, pri čemu je $\gamma < 90°$.

Analiza. Neka je D polovište dužine $\overline{AB}$. Tada znamo da se točka C nalazi na kružnici sa središtem u točki D i polumjerom t_c, nazovimo tu kružnicu k. Mjera kuta u vrhu C je γ, to znači da se dužina $\overline{AB}$ iz točke C vidi pod kutom γ. Geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dana dužina $\overline{AB}$ vidi pod danim kutom γ znamo odrediti, neka je to skup točaka Γ. Konačno, znamo da je $C \in k \cap \Gamma$.

Konstrukcija.

1. konstruiramo polovište dužine $\overline{AB}$ i označimo ga s D
2. konstruiramo kružnicu radijusa t_c sa središtem u točki D, neka je to kružnica k
3. u točki A konstruiramo pravce koji s pravcem AB zatvaraju kut mjere $90° - \gamma$, isto napravimo u točki B
4. ta 4 pravca sijeku se u 4 točke, neka su S_1 i S_2 one dvije različite od A i B
5. konstruiramo kružnicu radijusa $|S_1A|$ sa središtem u točki S_1 i označimo tu kružnicu s k_1 te isto napravimo za točku S_2 - kružnica k_2
6. geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dužina $\overline{AB}$ vidi pod kutom γ je unija većeg luka $\widehat{AB}$ na kružnici k_1 i većeg luka $\widehat{AB}$ na kružnici k_2, neka je ta unija skup Γ
7. točka C (treći vrh traženog trokuta) je bilo koja točka od najviše 4 točke presjeka kružnice k sa skupom Γ



Dokaz. Točka C je od točke D udaljena za t_c, što znači da je duljina težišnice iz vrha C jednaka upravo t_c. Dužina $\overline{AB}$ se iz vrha C vidi pod kutom γ. Dakle, svi uvjeti su ispunjeni.

Rasprava. Primijetimo da je jedino upitno je li presjek skupova k i Γ neprazan. Točnije, siječe li kružnica k kružnice k_1 i k_2 na odgovarajućim većim lukovima $\widehat{AB}$. Vidimo da je za to nužno da je $t_c > |DA| = \frac{c}{2}$ i da je $t_c \leq |DE|$, gdje je točka E presjek kružnice k_1 i polupravca DS_1. Naime, točka E je od svih točaka na kružnici k_1 najudaljenija od točke D. Iz toga dobivamo uvjete

$$\frac{c}{2} < t_c \leq \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Zadatak 1.2. Dane su duljine c, t_c i omjer $\dfrac{p}{q} > 1$. Konstruirajte trokut ABC tako da bude $|AB| = c$, $|CD| = t_c$, gdje je D poloviše dužine $\overline{AB}$ i $\dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{p}{q}$.

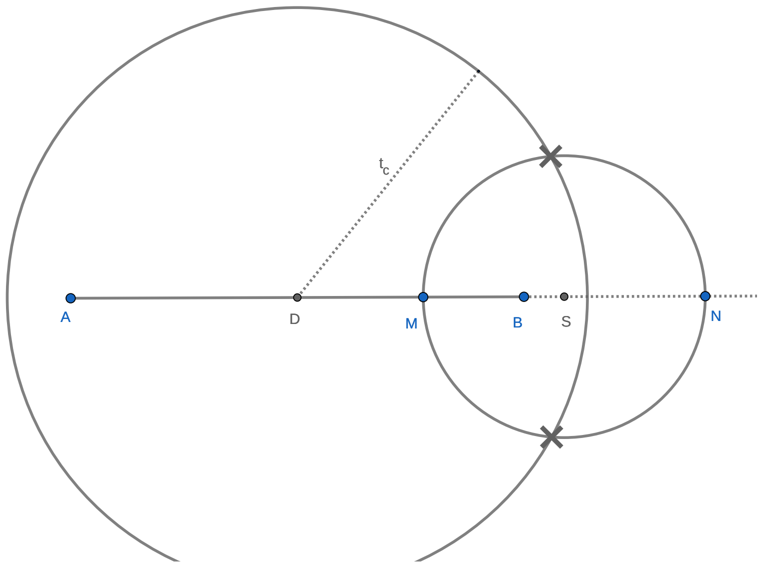
Analiza. Točka C se nalazi na kružnici sa središtem u točki D i polumjerom t_c, nazovimo tu kružnicu k. Nadalje, omjer $\dfrac{|AC|}{|BC|}$ je fiksan, stoga znamo da se točka C nalazi na Apolonijevoj kružnici dužine $\overline{AB}$.

Konstrukcija.

1. konstruiramo polovište dužine $\overline{AB}$ i označimo ga s D
2. konstruiramo kružnicu radijusa t_c sa središtem u točki D, neka je to kružnica k
3. konstruiramo točku M na dužini $\overline{AB}$ takvu da je $\dfrac{|AM|}{|BM|} = \dfrac{p}{q}$, kako je $\dfrac{p}{q} > 1$ vidimo da se točka M nalazi (strogo) između točaka B i D
4. na produžetku pravca AB preko točke B konstruiramo točku N takvu da je $\dfrac{|AN|}{|BN|} = \dfrac{p}{q}$, primijetimo

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{p}{q} \implies \frac{|AB| + |BN|}{|BN|} = \frac{p}{q} \implies \frac{c}{|BN|} = \frac{p}{q} - 1 \implies |BN| = \boxed{c \cdot \frac{q}{p-q}}$$

5. konstruiramo kružnicu s promjerom $\overline{MN}$, to je Apolonijeva kružnica
6. točka C se nalazi na presjeku kružnice k s Apolonijevom kružnicom



Dokaz. Slijedi direktno iz konstrukcije.

Rasprava. Kao i u prethodnom zadatku, jedino je upitno siječe li kružnica k Apolonijevu kružnicu. Primijetimo da će se te dvije kružnice sijeći ako i samo ako je

$$|DM| \leq t_c \leq |DN|.$$

Kako je $\dfrac{|AM|}{|BM|} = \dfrac{p}{q}$ i $|AM| + |BM| = c$, zaključujemo da je $|AM| = c \cdot \dfrac{p}{p+q}$. Nadalje, znamo da je $|AD| = \dfrac{c}{2}$, što znači da je $|DM| = c \cdot \dfrac{p-q}{2(p+q)}$. Računamo

$$|DN| = |DB| + |BN| = \frac{c}{2} + c \cdot \frac{q}{p-q} \implies |DN| = c \cdot \frac{p+q}{2(p-q)}.$$

Dakle, točka C koja zadovoljava dane uvjete postoji ako i samo ako je

$$c \cdot \frac{p-q}{2(p+q)} \leq t_c \leq c \cdot \frac{p+q}{2(p-q)}.$$

Zadatak 1.3. Konstruirajte kružicu koja dodiruje dva dana paralelna pravca i danu kružnicu.

Analiza. Neka su dani pravci p i q te neka je dana kružnica k i neka je njen polumjer r. Želimo konstruirati kružnicu koja dodiruje pravac p, to znači da je udaljenost središta te kružnice od pravca p jednaka polumjeru kružnice. Isto vrijedi i za pravac q. To znači da se središte tražene kružnice nužno nalazi na pravcu koji je jednako udaljen od pravac p i q. Također, znamo da će polumjer tražene kružnice biti jednak polovini udaljenosti pravac p i q. Neka je njihova udaljenost d. Dakle, tražena kružnica ima središte na pravcu t koji je jednako udaljen od pravaca p i q te ima radijus jednak $\frac{d}{2}$.

Nadalje, želimo da kružnica dodiruje kružnicu k. To znači da su središta kružnica udaljena za

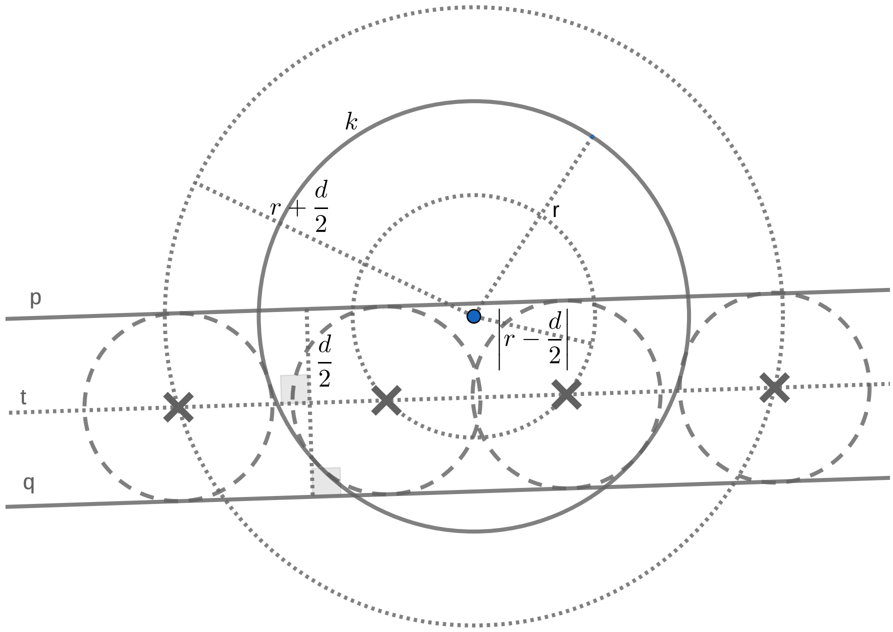
$$r + \frac{d}{2} \quad \text{ili} \quad \left| r - \frac{d}{2} \right|.$$

Konstrukcija.

1. konstruiramo pravac t, kroz bilo koju točku (nazovimo ju T) pravca p povučemo okomicu, neka ta okomica siječe pravac q u točki T', pravac t je simetrala dužine $\overline{TT'}$

2. sa središtem u točki S konstruiramo kružnice radijusa $r + \frac{d}{2}$ i $\left|r - \frac{d}{2}\right|$

3. središte tražene kružnice je bilo koja točka presjeka pravca t s dvjeme prethodno konstruiranim koncentričnim kružnicama



Dokaz. Slijedi direktno iz opisane konstrukcije.

Rasprava. Kako bi postojalo rješenje (barem jedno) nužno je i dovoljno da neka od dvije opisane koncentriče kružnice siječe pravac t. Neka je S središte dane kružnice k. Povucimo okomicu točkom S na pravce p i q. Neka je točka A točka presjeka pravca p s tom okomicom, a točka B presjek pravca q s tom okomicom. Nadalje, neka je točka C polovište dužine $\overline{AB}$. Duljina $|SC|$ je udaljenost točke S od pravca t. Sada možemo točno odrediti broj rješenja:

1. ne postoji niti jedno rješenje, tj. konstrukcija nije moguća ako je $|SC| > r + \frac{d}{2}$

2. postoji točno jedno rješenje ako je $|SC| = r + \frac{d}{2}$

3. postoje točno dva rješenja ako je $\left|r - \frac{d}{2}\right| < |SC| < r + \frac{d}{2}$

4. postoje točno tri rješenja ako je $|SC| = \left|r - \frac{d}{2}\right|$, osim u degeneriranom slučaju kada je $r = \frac{d}{2}$ i $S = C$ te u tom slučaju postoje točno 2 rješenja

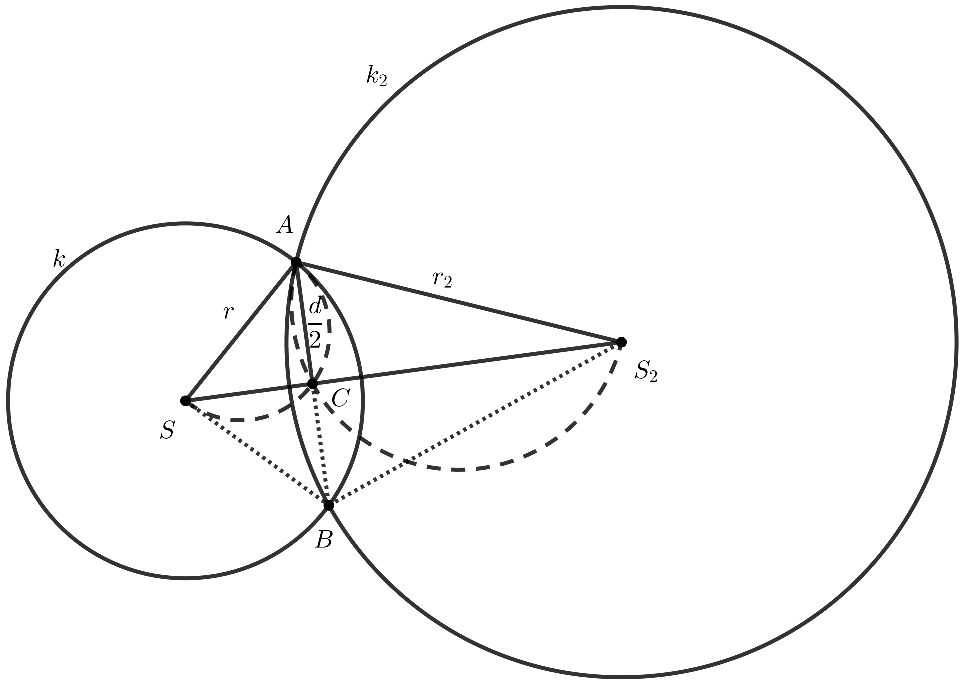
5. postoje točno četiri rješenje ako je $|SC| < \left|r - \frac{d}{2}\right|$

Zadatak 1.4. Konstruirajte kružnicu danog radijusa r koja dira danu kružnicu k_1 i s danom kružicom k_2 ima zajedničku tetivu dane duljine d.

Analiza. Neka je S_1 središte dane kružnice k_1 i neka je njen radijus jednak r_1. Analogno, neka je S_2 središte kružnice k_2 te neka je r_2 njen radijus. Neka je S središte kružnice k koju trebamo konstruirati.

Očito je da se točka S nalazi ili na kružnici radijusa $|r - r_1|$ sa središtem u S_1 ili na kružnici radijusa $r+r_1$ sa središtem u S_1. Naime, to je ekvivalentno uvjetu da se kružnice k i k_1 dodiruju.

Kružnice k i k_2 se sijeku te je njihova zajednička tetiva duljine d. Moramo pripaziti da postoje dvije mogućnosti, ovisno o tome je li $|SS_2|$ veće od $\max\{r, r_2\}$ ili pak manje (ili jednako). Promotrimo iduću sliku (za slučaj kada je veće).



Vidimo da duljina tetive ovisi o radijusima r i r_2 te o duljini dužine $|SS_2|$. Preciznije, ako želimo da tetiva ima duljinu d, točno znamo kolika mora biti duljina dužine $|SS_2|$. Nju je lako izračunati, no nas zanima kako ju konstruirati. Jednom kada konstruiramo dužinu te duljine, točka S se mora nalaziti na kružnici radijusa duljine te dužine sa središtem u točki S_2.

Kako konstruirati dužinu $\overline{SS_2}$? Konstruirati ćemo dužine $\overline{SC}$ i $\overline{S_2C}$ (uz oznake kao na slici). Konstruiramo kružnicu s promjerom r (na slici je to polukružnica s promjerom $\overline{SA}$). U točki A nanesemo tetivu duljine $\frac{d}{2}$, tražena točka C je drugi presjek te kružnice s tom tetivom. Sada smo spremni opisati sve korake konstrukcije.

Sliku kada je $|SS_2|$ manje od $\max\{r, r_2\}$ nacrtajte sami i zaključite sami gdje se nalazi točka C? Lako se vidi da u ovoj situaciji imamo razliku duljina koje smo u prethodnoj opciji zbrajali.

Konstrukcija.

1. sa središtem u točki S_1 konstruiramo kružnice radijusa $|r - r_1|$ (kružnica c_1) i $r+r_1$ (kružnica c_2)

2. konstruiramo kružnicu promjera $|AB| = r$ sa središtem u polovištu dužine $\overline{AB}$, u točki S'

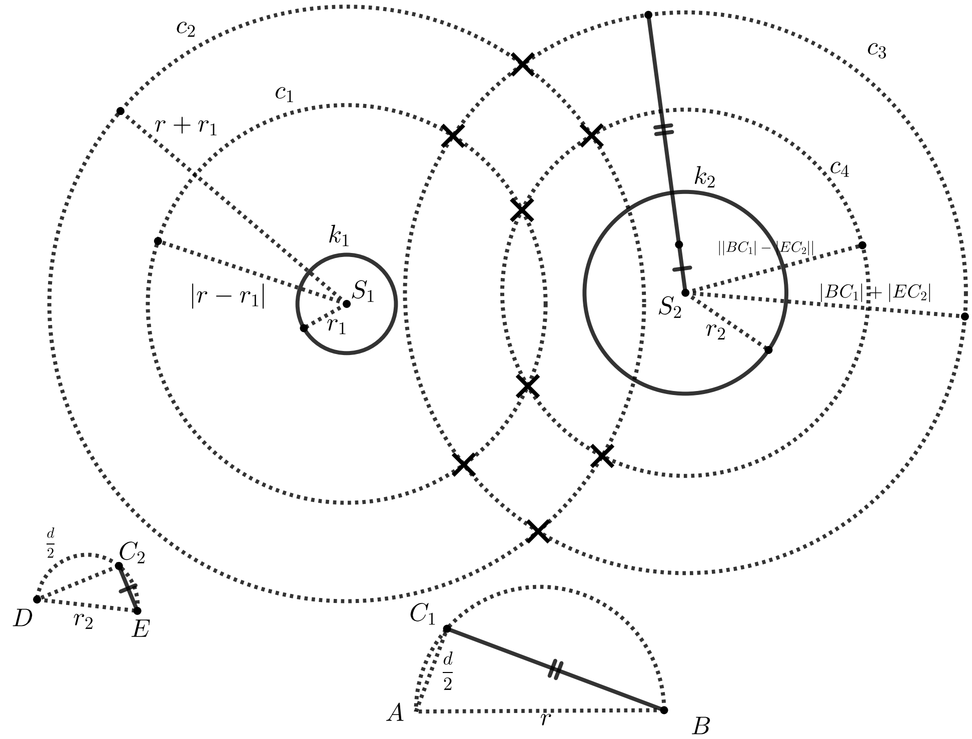
3. u točki A nanesemo tetivu duljine $\frac{d}{2}$ te neka ta tetiva siječe kružnicu u točki C_1

4. konstruiramo kružnicu promjera $|DE| = r_2$ sa središtem u polovištu dužine $\overline{DE}$, u točki S_2'

5. u točki D nanesemo tetivu duljine $\frac{d}{2}$ te neka ta tetiva siječe kružnicu u točki C_2

6. sa središtem u točki S_2 konstruiramo kružnice radijusa $|BC_1| + |EC_2|$ (kružnica c_3) i $||BC_1| - |EC_2||$ (kružnica c_4)

7. točka S (tj. središte tražene kružnice) je bilo koja točka presjeka $c_1 \cap c_3$, $c_1 \cap c_4$, $c_2 \cap c_3$, $c_2 \cap c_4$



Dokaz. Točka S može biti bilo koja točka označeno s $\times$ na gornjoj slici. Za svaku točku na kružnicama c_1 i c_2 vrijedi da kružnica radijusa r sa središtem u nekoj od tih točki dodiruje kružnicu k_1. Sve točke $\times$ imaju to svojstvo.

Nadalje, za bilo koju točku koja leži na kružnici c_3 ili na kružnici c_4 vrijedi da kružnica radijusa r sa središtem u toj točki s kružnicom k_2 ima zajedničku tetivu duljine d. To slijedi direktno iz radijusa tih kružnica.

Dakle, svaka točka $\times$ uistinu zadovoljava uvjete zadatka.

Rasprava. Zanima nas kada uopće postoji (barem jedna) točka $\times$. Vidimo da je to ekvivalentno pitanju je li barem jedan od presjeka $c_1 \cap c_3$, $c_1 \cap c_4$, $c_2 \cap c_3$ i $c_2 \cap c_4$ neprazan. Na to pitanje znamo odgovoriti, potrebno nam je poznavanje udaljenosti $|S_1S_2|$ i radijusa svake od ovih kružnica. Primijetimo da iz tih podatak možemo odrediti i puno više, naime, možemo odrediti točno koliko točaka $\times$ postoji. Također, trebamo biti oprezni, postoje li uopće kružnice c_3 i c_4? (Naravno, moguće je i da je kružnica c_1 degenerirana, tj. jednaka jednoj točki.)

Kružnice c_3 i c_4 postoje (istovremeno!) ako i samo ako je $\boxed{\frac{d}{2} \leq \min\{r, r_2\}}$ te ne smije biti $\frac{d}{2} = r = r_2$. To nam je prvi uvjet da bi konstrukcija bila moguća.

- radijus kružnice c_1 je $\rho_1 = |r - r_1|$
- radijus kružnice c_2 je $\rho_2 = r + r_1$
- radijus kružnice c_3 je $\rho_3 = |BC_1| + |EC_2| = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}} + \sqrt{r_2^2 - \frac{d^2}{4}}$
- radijus kružnice c_4 je $\rho_4 = ||BC_1| - |EC_2|| = \left|\sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{r_2^2 - \frac{d^2}{4}}\right|$

Konačno, barem jedna točka $\times$ postoji (tj. konstrukcija je moguća) ako i samo ako je

$$\boxed{|\rho_i - \rho_j| \leq |S_1S_2| \leq \rho_i + \rho_j},$$

za barem jedan par indeksa $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{3, 4\}$.

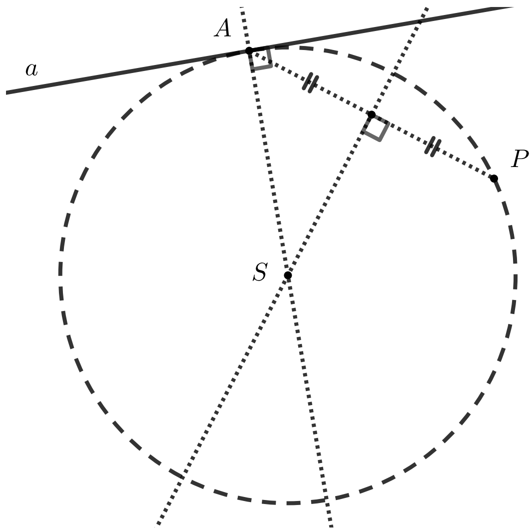
Pokušajte za vježbu (i bolje razumijevanje!) sami popisati slučajeva kada imamo točno n rješenja, za svaki $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$.

Zadatak 1.5. Dana je točka A na pravcu a i točka P izvan pravca a. Konstruirajte kružnicu koja prolazi točkom P i dira pravac a u točki A.

Analiza. Neka je S središte tražene kružnice. Ta kružnica prolazi točkama A i P, to znači da je točka S jednako udaljena od točaka A i P, odnosno da točka S leži na simetrali dužine $\overline{AP}$. Nadalje, kružnica dira pravac a i to u točki A. To znači da je pravac a tangenta na traženu kružnicu, odnosno da je pravac SA okomit na pravac a. Dakle, točka S leži na presjeku simetrale dužine $\overline{AP}$ i pravca okomitog na pravac a koji prolazi točkom A.

Konstrukcija.

1. konstruiramo simetralu dužine $\overline{AP}$
2. konstruiramo pravac točkom A okomit na pravac a
3. odredimo presjek prethodno dva konstruirana pravaca
4. tražena kružnica je kružnica polumjera $|SA| = |SP|$ sa središtem u točki S



Dokaz. Slijedi direktno iz konstrukcije. Naime, radijus konstruirane kružnice je jednak udaljenosti središta od točaka A i P pa obje te točke nužno leže na kružnici. Dodatno, radijus u toči A je okomit na pravac a, koji prolazi točkom A. Dakle, pravac a je uistinu tangenta s diralištem u točki A.

Rasprava. Kako točka P ne leži na pravcu a simtrala dužine $\overline{AP}$ sigurno nije okomita na pravac a. To znači da sigurno nije paralelna s okomicom na pravac a. Odnosno, traženi presjek će uvijek postojati. Štoviše, tražena kružnica je uvijek jedinstvena.