1. Dane su dužine duljina a i b $(a > b)$. Konstruirajte dužinu duljine $\dfrac{5a^2 - 4b^2}{2a - b}$.

Napišite opis konstrukcije i skicirajte glavne korake.

Skica rješenja. Postoji pregršt načina, navodimo jedan od njih:

$$\frac{5a^2 - 4b^2}{2a - b} = 5 \cdot \frac{a \cdot a}{2a - b} - 4 \cdot \frac{b \cdot b}{2a - b}.$$

Najprije konstruiramo $c = 2a - b$, zatim je $d = \dfrac{a \cdot a}{c}$ i $e = \dfrac{b \cdot b}{c}$. Konačno rješenje je $5d - 4e$.

2. Dane su duljine p i d te šiljasti kut α. Konstruirajte jednakokračni trapez s kutom α, opsegom p i jednom osnovicom duljine d.

Napišite opis konstrukcije i provedite raspravu.

Skica rješenja. Načina za konstrukciju ima mnogo. Navest ćemo jedan.

Pogledajmo najprije slučaj kada želimo da dulja osnovica trapeza bude duljine d. To je slučaj u kojem se (šiljasti) kut α nalazi uz tu osnovicu duljine d.

Konstruiramo jednakokračni trokut ABC s osnovicom $|AB| = d$ i kutovima uz osnovicu veličine α.

Konstruirajmo vanjske simetrale kutova trokuta ABC pri vrhovima A i B. Povucimo proizvoljnu paralelu na stranicu $\overline{AB}$ koja siječe dužinu $\overline{BC}$ u točki D', a dužinu $\overline{CA}$ u točki E'. Pravac $E'D'$ neka siječe spomenute simetrale vanjskih kutova u točkama X i Y.

Primijetimo da je $|XY| = |BD'| + |D'E'| + |E'A|$, to je zato što su trokuti $AE'X$ i BYD' jednakokračni. Želimo odrediti takve točke D i E da je pripadajući $|XY| = p - d$. To sada možemo na više načina, npr. sličnost.

Što se rasprave tiče, vidimo da rješenje (u slučaju kada je kraća osnovica duljine d) postoji ako i samo ako je

$$d < p - d < |AC| + |BC| = \frac{d}{\cos\alpha}, \quad \text{tj.} \quad 2d < p < d + \frac{d}{\cos\alpha}.$$

Ukoliko tražimo rješenje u kojem je dulja osnovica duljine d, postupamo slično, samo "na drugu stranu".

Napomena. Navedeno rješenje je u slučaju da je d veća osnovica, tj. u slučaju kada su kutovi uz osnovicu duljine d šiljasti i time jednaki α. Slična konstrukcija se radi u slučaju kada su kutovi uz osnovicu duljine d tupi, tj. u slučaju kada je d kraća osnovica.

3. Dan je šiljasti kut $\sphericalangle pOq$ i točka T unutar njega. Konstruirajte točke P i Q, $P \in p$, $Q \in q$, tako da trokut PQT bude jednakostraničan.

Napišite opis konstrukcije i dokažite njenu ispravnost.

Skica rješenja. Zarotirajmo pravac p oko točke T za 60°. Na taj način dobijemo pravac p'. Neka je točka Q presjek pravaca p' i q. Konačno, točka P je presjek kružnice $(T, |TQ|)$ i pravca p. Postoje dva takva presjeka, biramo onaj za koji je kut $\sphericalangle PTQ$ šiljast.

Primijetimo da će kružnica $(T, |TQ|)$ uvijek sijeći pravac p. Zašto? Zato što je $|TQ| \geq d(T, p') = d(T, p)$. Jedino je pitanje hoće li pravac p' sijeći pravac q. Uistini je moguće da neće, no onda je sigurno "dobra" rotaciju u drugom smjeru. Dakle, uvijek ćemo imati barem jednom rješenje, a uglavnom dva, jedno "lijevo" od točke T, a drugo "desno".

6. Dani su točka F, duljina a te pravci t_1 i t_2. Neka je $\mathcal{E}$ elipsa kojoj je F jedan fokus, a duljina velike poluosi, a pravci t_1 i t_2 tangente.
Konstruirajte drugi fokus F' elipse $\mathcal{E}$ i dirališta T_1 i T_2 tangenata t_1 i t_2 s elipsom.

Napišite opis konstrukcije. Kada, u ovisnosti o F, t_1, t_2 i a, postoji rješenje?

Skica rješenja. Konstruiramo suprotišta od F (točke simetrične točki F u odnosu na dane tangente t_1 i t_2). Neka su to točke G i H. Točke G i H leže na kružnici $(F', 2a)$, što znači da točka F' leži na simetrali dužine $\overline{GH}$. Kako točka G leži na kružnici $(F', 2a)$, to znači da točka F' leži na kružnici $(G, 2a)$. Super! Našli smo točku F', tj. našli smo drugi fokus.

Sada lako nalazimo i dirališta, jedno je presjek tangente t_1 s $F'G$, a drugo je presjek tangente t_2 s $F'H$.

Da bi konstrukcija bila moguća, bitno nam je da se simtrala dužine $\overline{GH}$ siječe s kružnicom $(G, 2a)$.