



Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

ITERATIVNE METODE

Vježbe 02 - SVD

11. listopada 2021.

Sastavio: Zvonimir Bujanović



Zadatak 1: Numerički rang i pseudoinverz

- 1 Generirajte 100×75 matricu ranga 50 i nacrtajte graf njezinih singularnih vrijednosti. Što ispisuje MATLAB funkcija `rank`?
- 2 Opišite postupak određivanja numeričkog ranga matrice.
- 3 Napišite funkciju `B = mypinv(A)` koja vraća pseudoinverz matrice `A`. Usporedite rezultat s MATLAB funkcijom `pinv`.
- 4 Koristeći funkciju `mypinv` riješite problem najmanjih kvadrata s matricom `A` iz prve točke i slučajnim vektorom `b`. Usporedite rješenje sa `A\b`, te s MATLAB funkcijom `lsqminnorm`.

Napomena: MATLAB i Octave daju različita rješenja pomoću `A\b` kada `A` nije punog ranga!

Zadatak 2: Kompresija slike

- 1 Napišite funkciju `kompres(r)` koja učitava podatke iz `clown.mat` ili `mandrill.mat`, te nalazi najbližu aproksimaciju ranga r matrice iz te datoteke. Pomoću funkcije `image` nacrtajte originalnu matricu i aproksimiranu matricu. Kolika je greška u aproksimaciji (u 2-normi i F-normi)?
- 2 Usporedite količinu memorije potrebne za pohranjivanje originalne slike i slike komprimirane na rang r .
- 3 MATLAB može učitavati i slike s ekstenzijom `png` ili `jpg`, te se iz njih za svaki od r/g/b kanala boje mogu napraviti odgovarajuće matrice. Napišite funkciju `kompres2(filename, r)` koja učitava sliku iz datoteke `filename`, te crta njezinu aproksimaciju ranga r . Aproksimaciju napravite zasebno za svaki od r, g i b kanala.

Zadatak 3: Kriptogrami

- 1 U datoteku `tekst.txt` spremite neki dulji tekst. U MATLABu učitajte tu datoteku pomoću
`f=fopen('tekst.txt');` `str=fscanf(f,'%c');`
- 2 Napravite 26×26 matricu A tako da je $A(x,y)$ jednak broju pojavljivanja slova y iza slova x u tekstu.
- 3 Neka su u i v lijevi i desni singularni vektori vezani uz drugu po veličini singularnu vrijednost. Ispišite sva slova i za koja je $u(i) > 0$ i $v(i) < 0$, te zatim ona za koja je $u(i) < 0$ i $v(i) > 0$.
- 4 Nacrtajte sliku na kojoj je slovo i napisano na koordinatama $(u(i), v(i))$.

 C.Moler, D.Morrison
Singular Value Analysis of Criptograms, The American
Mathematical Monthly, Vol.90, No.2, pp. 78-87

Dokažite sljedeće tvrdnje:

- (a) Skup svih matrica punog ranga gust je u prostoru svih matrica $\mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$. Drugim riječima, za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji matrica B ranga n takva da je $\|A - B\|_2 \leq \varepsilon$.
- (b) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regularna matrica. Kondicija od A se definira kao $\kappa_2(A) := \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$. Dokažite da je

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n},$$

gdje je σ_1 najveća, a σ_n najmanja singularna vrijednost od A .