

TURINGOVI STROJEVI

VEDRAN ŠEGO

Turingov stroj jedan je od najvažnijih objekata teorijskog računarstva. Riječ je o teorijskom konceptu pomoću kojeg se definiraju mnogi važni pojmovi: klase složenosti algoritama, izračunljivost,...

Definicija 1 (Turingov stroj). *Turingov stroj je uređena sedmorka $(Q, S, T, b, q_0, F, \delta)$, pri čemu je*

- $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_N\}$ konačan skup stanja,
- S konačan skup znakova s kojima stroj radi (abeceda trake),
- T konačan skup znakova koji se mogu naći na traci prije početka rada stroja (ulazna abeceda); $T \subsetneq S$,
- $b \in S \setminus T$ tzv. “prazan” simbol; oznaka da je polje prazno,
- $q_0 \in Q$ početno stanje rada stroja,
- $F \subseteq Q$ skup završnih stanja i
- $\delta : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{S, L, D\}$, gdje S označava “stani”, L “lijevo”, a D “desno”.

Iako formalna definicija djeluje zastrašujuće, interpretacija samog stroja je jednostavna i jako nalikuje na današnja računala. Stroj ima

...			2	+	2	=	4			...
-----	--	--	---	---	---	---	---	--	--	-----

TABLICA 1. Traka Turingovog stroja

beskonačnu traku i glavu koja se po toj traci kreće (za jedno mjesto lijevo ili desno) dok ne stane, te čita podatke s trake i zapisuje nove. Traka predstavlja hard disk (kojeg, praktički, na današnjim računalima imamo neograničeno jer je lako nadogradiv/zamjenjiv i relativno jeftin, a postoje i razni sistemi distribuiranog pristupa ogromnom broju diskova odjednom¹).

Stanja (kojih ima proizvoljno, ali **konačno mnogo**) predstavljaju radnu memoriju. Stanja (broj i ulogu) moramo odrediti prilikom “sastavljanja” stroja, dok se po traci možemo kretati koliko god želimo, bez da smo unaprijed predvidjeli koliko je duga u bilo kojem smjeru (zato jer je beskonačna).

Između stanja možemo “skakati” po potrebi (tj. iz svakog stanja možemo prijeći u svako drugo stanje ili ostati u istom stanju), što

¹Primjer distribuiranog računala je opće poznati Google, koji prema procjenama ima oko pola milijuna računala u tzv. računalnoj farmi; više možete naći na Wikipediji: http://en.wikipedia.org/wiki/Google_platform

pokazuje pristupačnost radne memorije. Traku moramo čitati po redu, tj. ne postoji način da odjednom skočimo na neko mjesto, nego glavu treba “pozicionirati” (što je u skladu s osnovnim ponašanjem diskova; oni samo imaju nešto više slobode prilikom kretanja glave, no to ne donosi nikakve konceptualne razlike).

Na početku rada stroja, na traci se nalazi nekakav zapis – analogon ulaznim podacima programa. Ti znakovi opisani su ulaznom abecedom, koja je očiti pandan tipova ulaznih podataka algoritma.

Analizirajmo definiciju funkcije:

$$\delta : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{S, L, D\}.$$

Turingov stroj nalazi se u stanju $q \in Q$, na nekoj poziciji na traci, odakle je pročitao znak $s \in S$. U ovisnosti o ta dva parametra (i samo ta dva parametra!), on prelazi u novo stanje $q' \in Q$, zapisuje novi znak $s' \in S$ na traku (na istu poziciju na kojoj se nalazi), te pomiče glavu za jedno mjesto u lijevo ili u desno (ili ostane stajati na istom mjestu), tj. obavi pomak iz skupa $\{S, L, D\}$.

Jedan korak rada Turingovog stroja možemo opisati petorkom

$$(q, s, q', s', m), \quad q, q' \in Q, \quad s, s' \in S, \quad m \in \{S, L, D\}$$

koja u potpunosti opisuje jedno pridruživanje funkcije δ :

$$(q, s) \xrightarrow{\delta} (q', s', m), \quad q, q' \in Q, \quad s, s' \in S, \quad m \in \{S, L, D\}$$

Proces rada Turingovog stroja (tj. funkcija δ) u potpunosti je određen konačnim skupom petorki opisanog oblika.

Definiramo da stroj staje s radom kada dođe u završno stanje i napravi pomak “S”, tj. kad funkcija δ izvrši preslikavanje

$$(q_i, x) \xrightarrow{\delta} (q_p, y, S), \quad x, y \in S, \quad q_i \in Q, \quad q_p \in F.$$

Postoji više ekvivalentnih modela Turingovih strojeva:

- nedeterministički: δ nije funkcija, nego samo relacija,
- višetračni: stroj u svakom trenutku “operira” na više traka,
- s poluograničenom trakom: traka stroja ograničena je s jedne strane.

Mi ćemo raditi s gore opisanim, determinističkim jednostranim Turingovim strojem s (obostrano) beskonačnom trakom.

Napomena 1 (Početna pozicija glave). *Ako u zadatku nije eksplicitno zadana početna pozicija glave stroja, morate ju sami odrediti (i napisati (opisno) koja je).*

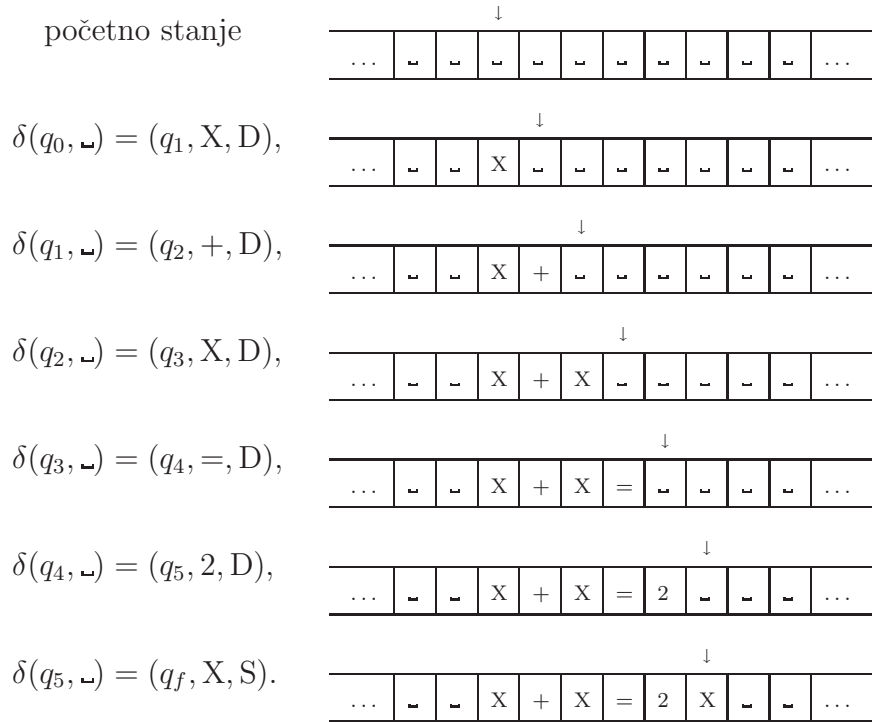
Zadatak 1. *Konstruirajte Turingov stroj koji na praznu traku zapisuje “X+X=2X”.*

Rješenje. Traka je na početku prazna, pa je potpuno svejedno gdje se glava nalazi. Zato, iznimno, preskačemo određivanje početnog položaja glave.

Napišimo prvo rješenje u skladu s definicijom 1:

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_f\}, \\ S &= \{\sqcup, X, +, =, 2\}, \\ T &= \emptyset, \\ b &= \sqcup, \\ q_0 &= q_0, \\ F &= \{q_f\}, \end{aligned}$$

Potrebno je definirati i funkciju δ , što ćemo napraviti popisivanjem svih stanja u koja stroj može doći i svih znakova koje može pročitati, te definiranjem novih stanja i zapisanih znakova za sve takve situacije (s desne strane je nacrtano stanje trake nakon svakog koraka):



U ovom zadatku potrebno je samo zapisati nekakve podatke na traku, bez obzira na to što na traci već piše. Zbog toga su sve definicije funkcije δ oblika $\delta(q, \sqcup) = \dots$ (jer znamo da je traka prazna), što općenito neće biti slučaj. Stanja nam ovdje služe samo da upamtimo koji znak idući treba zapisati.

Funkciju prijelaza zapisali smo eksplicitno, funkcijski. Postoje i drugačiji načini zapisivanja istog Turingovog stroja:

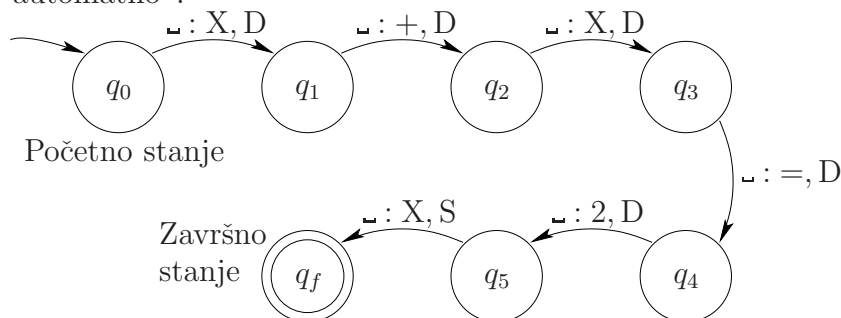
- tablično:

$Q \times S$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
□	q_1, X, D	$q_2, +, D$	q_3, X, D	$q_4, =, D$	$q_5, 2, D$	q_f, X, S

tj. općenito:

$Q \times S$...	q_i	...
\vdots		\vdots	
a_j	...	$\delta(q_i, a_j)$	
\vdots		\vdots	

- “automatno”:



pri čemu je:



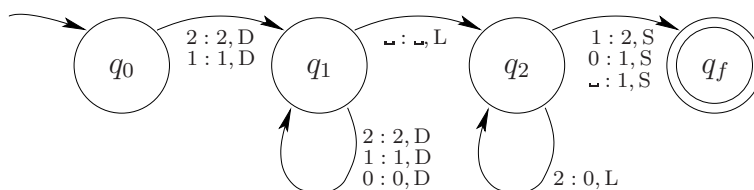
□

Na ispitu smijete koristiti bilo koji od opisanih zapisa (jer su međusobno ekvivalentni). Dapače, izbor zapisa ponekad može ovisiti i o samom zadatku (kao što ćemo vidjeti u zadacima).

Zadatak 2. Na inače praznoj traci zapisan je n -teroznamenasti broj, $n > 0$, u sustavu s bazom 3. Konstruirajte Turingov stroj koji tom broju dodaje 1. Glava stroja nalazi se na krajnjoj lijevoj znamenici broja, a sam broj ne može započinjati znamenkom 0.

Rješenje. Ideja: prvo trebamo glavu pomaknuti na najdesniju znamenku (pomicanjem na desno do prvog razmaka i onda jedno mjesto lijevo), a zatim zadnjoj znamenici treba dodati 1. Pri tome, ako je zadnja znamenka bila 2, pišemo 0, pomičemo glavu jedno mjesto u lijevo i ponavljamo postupak povećavanja znamenke. Ako u tom pomicanju na lijevo dođemo do razmaka, na njegovo mjesto treba zapisati jedinicu, jer to znači da je početni broj bio oblika $(22 \dots 2)_3$.

Ako želimo “čitati traku”, tj. proći po nekom dijelu trake bez pisanja, to radimo tako da čitamo i pišemo isti znak.



Objašnjenja stanja:

- $q_0 \equiv$ čitanje prve znamenke (smije se maknuti, tj. možemo uredno početi i od stanja q_1),
 $q_1 \equiv$ pomicanje iza najdesnije znamke (pri prelasku u stanje q_2 vraćamo se za jedno mjesto lijevo),
 $q_2 \equiv$ nadodajemo 1.

Općenito, dobro je napisati objašnjenja stanja, jer to pomaže u čitljivosti stroja.

Umjesto pobrajanja svih znakova, smijemo zapisati i simbolički:

$$\begin{array}{l} 2 : 2, D \\ 1 : 1, D \\ 0 : 0, D \end{array} \equiv x : x, D, \quad x \in \{0, 1, 2\}$$

i

$$\begin{array}{l} 1 : 2, S \\ 0 : 1, S \\ _ : 1, S \end{array} \equiv \begin{array}{l} x : x + 1, S \\ _ : 1, S \end{array}, \quad x \in \{0, 1\}$$

Pri takvoj pokrati mora biti jednoznačno određeno što se čita i što se piše. Između ostalog, to znači da je nužno navesti iz kojeg skupa su eventualno korištene varijable (u prikazanom primjeru $x \in \{0, 1, 2\}$ i $x \in \{0, 1\}$). Pazite da ne obuhvatite preveliki raspon varijabli, jer greškom možete dobiti nedeterministički Turingov stroj! Također, nemojte koristiti varijable čiji naziv upada u neku od abeceda (stroja ili trake), jer se time gubi jednoznačnost oznake.

Ako niste potpuno sigurni da je neka pokrata u redu, napišite cjelokupno rješenje, bez pokrata! \square

Zadatak 3. *Konstruirajte Turingov stroj koji prepoznaje da li je na traci zapisano*

$$\underbrace{aa \dots a}_{m+2} \underbrace{bb \dots b}_{n+1}$$

za neke $m, n \in \mathbb{N}_0$, odnosno riječ jezika

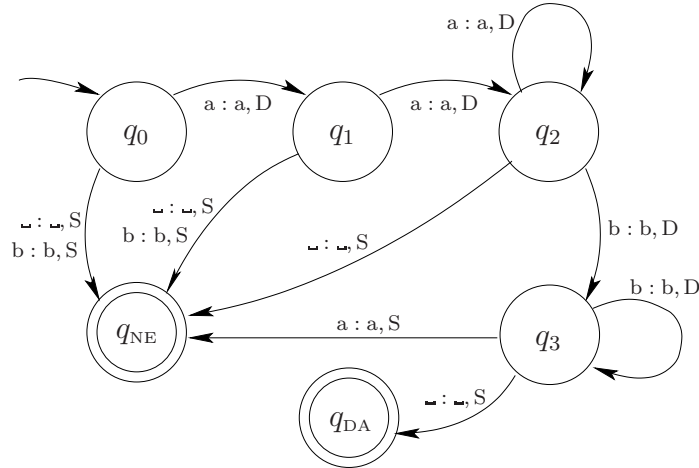
$$L = \{a^{m+2}b^{n+1}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Poznato je da je na traci zapisana točno jedna riječ.

Rješenje. Potrebno je provjeriti nalazi li se na traci riječ koja se sastoji samo od slova “a” i “b”, s time da su svi “a” ispred svih “b”, te ima barem dva slova “a” i barem jedno “b”. Kada stroj treba pružiti neku informaciju (npr. je li zapisana riječ nekakava ili ne), to se radi tako da se kreira više završnih stanja. Pri tome treba zapisati koje stanje označava koju informaciju.

Mi ćemo stanje “riječ je traženog oblika” zvati q_{DA} , a stanje “riječ nije traženog oblika” ćemo zvati q_{NE} . U ovakvim zadacima je nužno navesti objašnjenja završnih stanja!

U zadatku nije zadano gdje se nalazi glava stroja, pa za početni položaj glave određujemo krajnji lijevi znak zapisane riječi, ako je riječ uopće zapisana (tj. ako pročitamo razmak, znači da na traci nije zapisano ništa).



Stanje q_0 je početno. Ako u njemu pročitamo išta osim slova “a”, riječ nije oblika kakav tražimo (jer smo pročitali ili razmak, što znači praznu riječ, ili slovo “b”, što znači da ispred svih slova “b” nema niti jednog “a”). U stanju q_1 smo pročitali jedno slovo “a”, što nije dovoljno, pa je logika jednaka kao za stanje q_0 .

U stanju q_2 nalazimo se ako smo od početka riječi pročitali barem dva slova “a”. Svako iduće slovo “a” vraća nas u isto stanje, jer je nebitno koliko ima slova “a” dok god ih ima barem dva i sva su prije slova “b”. Pročitamo li razmak u stanju q_2 , znači da smo došli do kraja riječi bez i jednog pročitano slova “b”, što opet znači da riječ nije dobra.

Stanje q_3 označava stanje u kojem smo pročitali barem dva slova “a” i barem jedno slovo “b”. Nakon toga, svako čitanje slova “b” vraća nas u isto stanje. Čitanje slova “a” nas šalje u stanje q_{NE} jer to znači da postoji slovo “a” koje se nalazi iza slova “b”. Ako u stanju q_3 pročitamo prazan znak, to znači da smo došli do kraja riječi i da je ona točno onakva kakva se traži, pa stroj odlazi u stanje q_{DA} . \square

Zadatak 4. *Riješite prethodni zadatak:*

- uz početni položaj glave na krajnjem desnom znaku zapisane riječi i*
- uz dodatni zahtjev da glava stroja mora završiti iza zadnjeg znaka riječi, bez obzira zadovoljava li ta riječ uvjet zadatka ili ne.*

Uputa. Zadatak a) možete riješiti na dva načina: invertiranjem prethodnog rješenja (tj. provjerom da prvo idu slova “b”, pa tek onda slova “a“, uz micanje na lijevo) ili pomicanjem glave na krajnji lijevi znak i primjenom prethodnog rješenja. Probajte riješiti na oba načina!

Zadatak b) rješava se dodavanjem još jednog stanja koje će biti zamjena za stanje q_{NE} . To dodatno stanje služi za slanje glave iza riječi, te se tek nakon dolaska do kraja riječi ide u stanje q_{NE} . Stanje q_{DA} ne treba mijenjati jer u njemu završavamo isključivo iza zadnjeg znaka riječi. \square

Zadatak 5. *Konstruirajte Turingov stroj koji pronalazi ostatak pri dijeljenju sa 7 broja zapisanog na traci u sustavu s bazom 8. Glava stroja je pozicionirana na najdesnijoj znamenici broja. Ostatak treba zapisati negdje na traci.*

Rješenje. U zadatku se traži da rješenje bude zapisano “negdje na traci”, što znači da možemo sami odabrati gdje će to biti, ali je potrebno napisati gdje se rezultat nalazi. Kako s čitanjem broja krećemo s najdesnije znamenke, mi ćemo rezultat zapisati lijevo od najlijeviije znamenke.

Poznato je (v. vježbe iz Programiranja 1) da je ostatak dijeljenja sa 7 broja zapisanog u bazi 8 jednak ostatku pri dijeljenju sumi znamenaka broja sa 7. Induktivno, na tu sumu možemo primijeniti isti kriterij. To znači da računamo sumu znamenaka modulo 7. Uvest ćemo stanja kojima ćemo pamtit i trenutni ostatak sume znamenaka početnog broja pri dijeljenju sa 7:

$$q_i = \left(\left(\sum_{j=0}^k a_j \right) \bmod 7 = i \right), \quad i \in \{0, 1, \dots, 6\}$$

pri čemu je $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ korak u kojem se stroj nalazi (tj. indeks zadnje pročitane znamenke), $(a_n a_{n-1} \dots a_0)_8$ je broj koji je bio zapisan na traci, a s $x \bmod y$ označavamo ostatak pri dijeljenju x s y .

Ako se stroj nalazi u stanju q_i i pročita znamenku z , on odlazi u stanje $q_{(i+z) \bmod 7}$. Kad pročitate razmak, znači da smo pročitali cijeli broj, pa je potrebno samo zapisati rezultat (tj. index stanja u kojem se nalazimo).

Primijetite: u svakom stanju (njih 7) možemo pročitati bilo koju znamenku (njih 8) ili razmak, što je ukupno $7 \cdot 9 = 63$ mogućnosti. Tablični i automatni prikaz su očito nepraktični, ali – zbog pravilnosti u formulama – možemo pribjeći funkcijskom zapisu:

$$\begin{aligned} \delta(q_i, z) &= (q_{(i+z) \bmod 7}, z, L), \quad i \in \{0, 1, \dots, 6\}, \quad z \in \{0, 1, \dots, 7\}, \\ \delta(q_i, \sqcup) &= (q_f, i, S), \quad i \in \{0, 1, \dots, 6\}, \end{aligned}$$

ili

$$\delta(q_i, z) = \begin{cases} (q_{(i+z) \bmod 7}, z, L), & z \in \{0, 1, \dots, 7\} \\ (q_f, i, S) & , z = \sqcup \end{cases}, \quad i \in \{0, 1, \dots, 6\}.$$

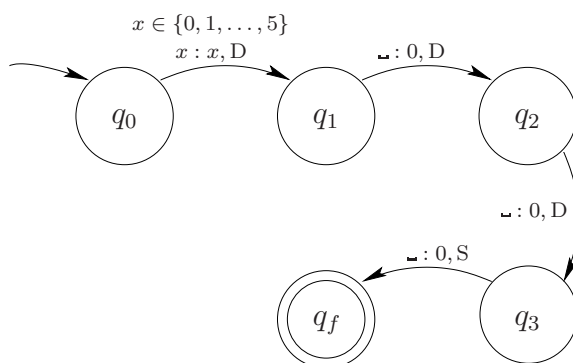
\square

Zadatak 6. *Na traci Turingovog stroja zapisan je broj u sustavu s bazom 6. Konstruirajte Turingov stroj koji dani broj množi s $(216)_{10}$.*

Rješenje. Primijetite: $(216)_{10} = ((6)_{10})^3 = ((10)_6)^3 = (1000)_6$. To znači da je množenje broja zapisanog u bazi 6 brojem $(216)_{10}$ ekvivalentno dopisivanju tri nule na kraj broja, tj.

$$\begin{aligned} (a_n a_{n-1} \dots a_0)_6 \cdot (216)_{10} &= (a_n a_{n-1} \dots a_0)_6 \cdot (1000)_6 \\ &= (a_n a_{n-1} \dots a_0 000)_6. \end{aligned}$$

Početni položaj glave na traci nije zadan, pa ga određujemo sami: krajnja desna znamenka broja.



□

Zadatak 7. Na inače praznoj traci Turingovog stroja nalazi se zapisan simbol “ x ”. Konstruirajte Turingov stroj koji pronalazi simbol “ x ” na traci, odnosno pozicionira glavu stroja na njega. Pozicija glave stroja na početku nije poznata (ali ju ne smijete sami zadati).

Uputa. Dodajte pomoćni simbol, pa “šećite” s glavom lijevo-desno (u svakom prolazu za jedno mjesto dalje nego u prošlom prolazu, a dodatnim simbolom označite kuda ste prošli) dok ne pronađete simbol.

Česta greška u ovakvim zadacima je “pomaknimo glavu skroz lijevo/desno”, što je besmisleno jer je traka beskonačna! □

Zadatak 8. Na traci Turingovog stroja nalazi se broj zapisan u sustavu s bazom 7. Konstruirajte Turingov stroj koji dani broj na traci množi sa $(49)_{10}$ ako

- na početku rada stroja sami pozicioniramo glavu i
- stroj mora raditi neovisno o početnom položaju glave.

Uputa. Primijetite: $(49)_{10} = (100)_7$.

Zadatak b) kombinira množenje s b^k i prethodni zadatak. □

Zadatak 9. Na traci Turingovog stroja nalazi se broj zapisan u sustavu s bazom 4. Konstruirajte Turingov stroj koji dani broj na traci množi sa $(64)_{10}$, te mu dodaje broj $(101)_2$.

Uputa. Kako je $(64)_{10} = (1000)_4$ i $(101)_2 = (11)_4$, zadatak se svodi na dopisivanje znakova “011” na kraj broja. □

Zadatak 10. Na inače praznoj traci Turingovog stroja nalaze se dva znaka “ x ” odvojena barem jednim praznim poljem. Konstruirajte Turingov stroj koji prostor između ta dva znaka popunjava znakovima “ y ”. Stroj mora raditi za svaki početni položaj glave.

Zadatak 11. Na traci Turingovog stroja nalazi se broj zapisan u sustavu s bazom 5. Konstruirajte Turingov stroj koji broju dodaje $(22)_5$.

Uputa. Za početni položaj glave uzmite krajnju desnu znamenku, te pomoću stanja pamтите “jedan dalje” (odnosno “nula dalje”). \square

Zadatak 12. Na traci Turingovog stroja nalazi se broj zapisan u sustavu s bazom 3. Konstruirajte Turingov stroj koji broju dodaje $(22)_3$.

Uputa. Uz realizaciju zbrajanja (kao u prethodnom zadatku), ovaj zadatak možete riješiti kombiniranjem dodavanja i oduzimanja jedinice, jer je $(22)_3 = (100)_3 - (1)_3$. \square

Zadatak 13. Na traci Turingovog stroja nalazi se niz znakova iz skupa $S = \{a, b, c\}$, pri čemu se svaki znak može pojaviti nula ili više puta. Konstruirajte Turingov stroj koji ispred najlijevijeg znaka “ b ” dodaje znak “ x ”. Pri tome, originalne znakove treba pomaknuti (tj. niti jedan ne smije biti izbrisan).

Rješenje. Sami biramo položaj glave stroja. Kako nas zanima najlijeviji znak “ b ”, za početni položaj glave biramo prvi (s lijeva) znak u zapisanom nizu.

Najprije je potrebno pronaći prvi znak “ b ”, što radimo čitanjem i micanjem u desno (slično pozicioniranju glave na najdesniji kraj riječi, samo što ovdje tražimo “ b ”, a ne razmak). To radimo u početnom stanju (q_t) , koje nam označava “traženje prvog znaka b ”.

Nakon što pronađemo znak “ b ”, na njegovo mjesto upisujemo znak “ x ”, te odlazimo u stanje q_b . Dalje čitamo znakove (pomičući glavu prema desno) dok ne dođemo do razmaka. Pri tome, u stanju $q_{z'}$ zapisujemo znak z' (što označava prethodni pročitani znak), te prelazimo u stanje z , pri čemu je z znak koji se nalazio na traci prije zapisivanja znaka z' . Drugim riječima, taj dio rada Turingovog stroja opisuje funkcija:

$$\delta(q_{z'}, z) = (q_z, z', (D)), \quad z, z' \in S.$$

Kad pročitamo razmak (tj. dođemo do kraja niza znakova), na njegovo mjesto zapisujemo znak koji odgovara stanju stroja.

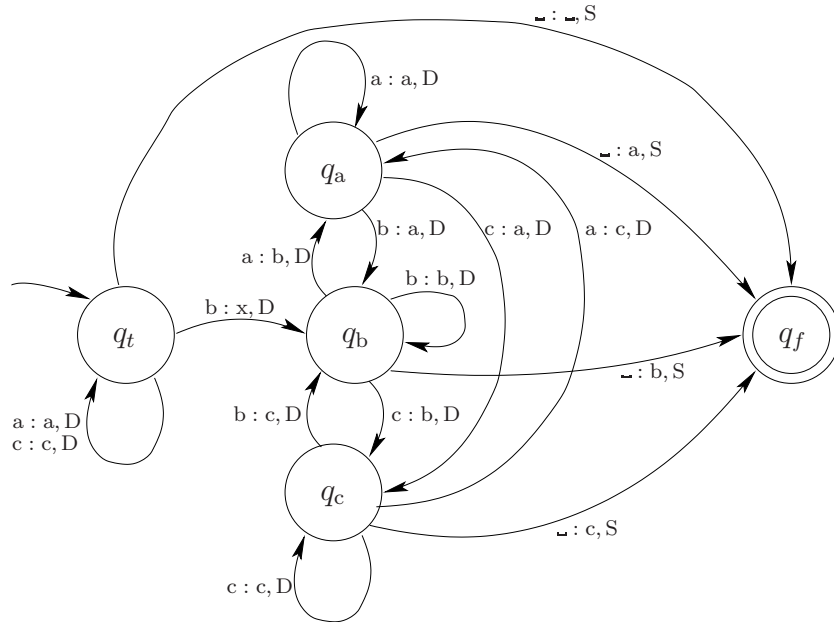
Ako znak “ b ” uopće ne nađemo, tj. dođemo do razmaka u (početnom) stanju q_t , riječ ostaje nepromijenjena (tj. zapisujemo razmak i zaustavljamo stroj).

Funkcijski, stroj možemo zapisati ovako:

$$\delta(q, z) = \begin{cases} (q_t, z, D), & q = q_t \text{ i } z \in \{a, c\} \\ (q_b, x, D), & q = q_t \text{ i } z = b \\ (q_F, \sqcup, S), & q = q_t \text{ i } z = \sqcup \\ (q_z, z', D), & q = q_{z'} \text{ i } z, z' \in S \\ (q_F, z', S), & q = q_{z'}, z = \sqcup \text{ i } z' \in S \end{cases},$$

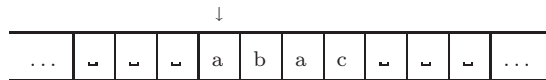
pri čemu je početno stanje stroja q_t , a završno stanje stroja q_f .

Primijetimo da postoji skok između svaka dva stanja q_a , q_b i q_c , što znači da su ta stanja povezana s $3 \cdot 3 = 9$ strelica, pa slika može djelovati nezgrapnije od funkcijskog zapisa:

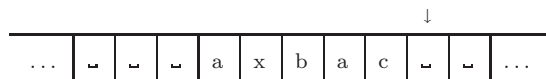


□

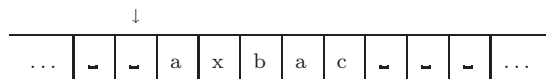
Zadatak 14. Riješite prethodni zadatak tako da znakove pomaknete u lijevo, a ne u desno, tj. da početno stanje trake



umjesto u



stroj pretvori u



Zadatak 15. *Riješite zadatak 13 tako da stroj ispred svakog znaka "b" ubaci znak "x".*

Uputa. Zadatak je najlakše riješiti modificiranjem rješenja originalnog zadatka na način da se nakon stanja q_F glava stroja vraća na najdesniji "x", te se pomiče dva mjesta udesno (iza pripadajućeg "b"), jer je svim znakovima "b" lijevo od najdesnijeg "x" već dodan "x". Nakon toga se postupak dodavanja znaka "x" ispred najljevijeg znaka "b" ponavlja.

Dodatno, treba uvesti novo završno stanje (jer stari q_F više nije završno stanje), u koje će stroj doći isključivo onda kad u stanju q_t naiđe na razmak. \square

Zadatak 16. *Na traci Turingovog stroja nalazi se niz znakova iz skupa $S = \{a, b, c\}$, pri čemu se svaki znak može pojaviti nula ili više puta. Konstruirajte Turingov stroj koji briše najlijeviji znak "b". Pri tome, originalne znakove treba pomaknuti (tj. u nizu ne smije ostati "rupa").*

Uputa. Kopiranje rješenja zadatka 13 neće polučiti dobar rezultat (zašto?). To rješenje je moguće donekle prilagoditi, ali je poprilično komplicirano.

Jednostavniji pristup je:

1. Stroj pronalazi znak "b".
2. Znak "b" zamjenjuje se praznim znakom.
3. Glava stroja pomiče se na krajnji lijevi ili desni kraj niza znakova (svejedno).
4. Niz znakova se pomiče za jedno mjesto u željenom smjeru do prvog razmaka (to je onaj na čijem mjestu je bio znak "b"), na način na kojem je to napravljeno u rješenju zadatka 13.

\square

Zadatak 17. *Riješite prethodni zadatak na način da stroj obriše sva pojavljivanja znaka "b".*

Uputa. Ovdje je moguće rješenje originalnog zadatka modificirati kao i u slučaju zadatka 15, dakle ponavljanjem postupka za sve znakove "b".

Drugi način je da stroj lijevo ili desno od niza znakova zapiše neki znak kojeg nema na traci (npr. znak "x"), te sve "b" zamijeni praznim znakom. Nakon toga, preostali komadići niza pomiču se za jedno mjesto jedan po jedan (svako pomicanje će spojiti dva susjedna niza) dok glava stroja ne dođe do znaka "x" (koji predstavlja početak/kraj originalnog niza znakova). Pomoćni znak je nužan da bi smo razlikovali kraj jednog djelića niza (tj. mjesto gdje je obrisan znak "b") od kraja originalnog niza ("pravo" prazno mjesto).

Treći način je jednostavno pomicanje komadića niza do prvog "b" (njega se prepíše zadnjim pomaknutim znakom). To ponavljamo dok god ne dođemo do praznog znaka. Takvo rješenje rezultirat će pomicanjem svakog znaka barem za jedno mjesto. \square