PLANIMETRIJA - Zadaci za vježbu

1. Pokažite da kompozicija dvije osne simetrije ne može biti osna simetrija.
2. Neka je $ABCD$ kvadrat. Odredite sliku trokuta ABC pri izometriji $s_{AB} \circ s_D$, gdje je s_{AB} osna simetrija s obzirom na pravac AB, a s_D centralna simetrija s ozirom na točku D.
3. Neka su p i q dva različita pravca ravnine M. Dokažite da su pravci p i q okomiti ako i samo ako vrijedi da je $s_p \circ s_q = s_q \circ s_p$. ($s_p$, odn. s_q je osna simetrija u odnosu na pravac p, odn. q).
4. Iz vrha A paralelograma $ABCD$ spuštene su okomice $\overline{AM}$ i $\overline{AN}$ na pravce BC i CD. Dokažite da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle AMN$ slični.
5. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$. Dokažite da su kružnice opisane trokutima $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BCH$ i $\triangle CAH$ sukladne (tj. da imaju jednake polumjere).
6. Kroz vrh A trokuta ABC konstruiran je pravac p okomit na simetralu AD kuta BAC ($D \in \overline{BC}$). Odredite točku M na pravcu p tako da je opseg trokuta MBC minimalan.

   (Uputa: Neka je $C' = s_p(C)$. Tada je $|CM| = |C'M|$. Uočite za koji M je $|C'M|+|MB|$ minimalno.)
7. Dan je trokut sa stranicama $|AB| = 16$, $|AC| = 12$ i $|BC| = 20$. Na stranici $\overline{AB}$ nalaze se točke M, P, a na stranici $\overline{BC}$ točke N, Q takve da je $MN \parallel PQ \parallel AC$ i $|CN| = |BQ| = 5$. Odredite duljine stranica trapeza $MPQN$.
8. Krakovi i kraća osnovica trapeza tangente su kružnice sa središtem na dužoj osnovici. Dokažite da je duljina duže osnovice jednaka zbroju krakova.
9. Unutar trokuta $\triangle ABC$ dana je točka P takva da su kutevi $\angle PAC$ i $\angle PBC$ jednaki. Nožišta okomica iz P na AC i BC su M i N. Ako je D polovište od $\overline{AB}$ dokažite da vrijedi $|DM| = |DN|$.
10. Dokažite da polovišta stranica četverokuta čine paralelogram.
11. Dokažite Teorem o simetrali kuta: Simetrala kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.
12. Koristeći teorem o simetrali kuta, dokažite da središte trokutu upisane kružnice dijeli simetralu kuta trokuta u omjeru zbroja susjednih stranica prema trećoj stranici.
13. Neka je D točka na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC takva da je kut BAD jednak $(\alpha-\beta)/2$, uz pretpostavku da je $\alpha - \beta \geq 0$. Pokažite da vrh C leži na simetrali dužine $\overline{AD}$.
14. Pokažite da za polumjer upisane kružnice, r, pravokutnom trokutu vrijedi da je $2r = a + b - c$, gdje su a, b katete, a c hipotenuza.
15. U četverokutu $ABCD$ točke E, F, G, H su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Dokažite da je $EFGH$ paralelogram.
16. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Točka A_1 je simetrična točki H s obzirom na stranicu BC. Pokažite da A_1 leži na opisanoj kružnici tom trokutu.
17. U pravokutnom trokutu ABC nožište visine iz vrha C (pri kojem je pravi kut) je točka D. Iz D su na katete spuštene okomice duljine x i y. Ako je v duljina visine na hipotenuzu, dokažite da vrijedi $cxy = v^3$.
18. Neka je $\overline{AB}$ zajednička tetiva dviju kružnica. Pravac kroz A siječe jednu kružnicu u C, a drugu u D. Tangente u točkama C i D sijeku se u točki M. Dokažite da je četverokut $BCMD$ tetivni.

    (Uputa: Prvo dokažite da je kut između tetive nad lukom kružnice i tangente u jednom od krajeva tetive jednak obodnom kutu nad tim lukom.)