ANALITIČKA GEOMETRIJA - zadaci za vježbu

1. Leže li točke

   a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 1, 1)$ i $C = (1, 0, -1)$ na istom pravcu,

   b) $A = (3, 2, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 0, 0)$ i $D = (-1, -2, -3)$ u istoj ravnini?

2. Odredite jednadžbu ravnine koja:

   (a) prolazi točkom $T(2, 3, -1)$ i paralelna je ravnini $5x - 3y + 2z - 10 = 0$,

   (b) prolazi točkom $T(2, 3, -1)$ i okomita je na pravac $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{0}$,

   (c) prolazi točkom $T(2, 3, -1)$ i okomita je na pravac $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-1}{6} = \frac{4z-1}{0}$,

   (d) odsijeca odsječke -3, 2, 1 na koordinatnim osima x, y, z redom,

   (e) prolazi točkama $T_1(1, 2, 3), T_2(-1, 2, 3)$ i $T_3(0, 2, 3)$,

   (f) prolazi točkom $T(2, 3, -1)$ i odsijeca odsječke -3 na osi apscisa i 2 na osi aplikata,

   (g) prolazi točkom $T(2, 3, -1)$ i okomita je na ravnine $3x-2y+z+7 = 0$ i $5x-4y+3z+1 = 0$,

   (h) prolazi točkom $T(2, 3, -1)$ i paralelna je vektorima $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$,

   (i) sadrži pravac $p \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ i okomita je na ravninu $2x + 3y - z = 4$.

3. Odredite udaljenost

   (a) točke $T = (-1, -1, 2)$ i pravca $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{2}$.lo

   (b) točke $M = (4, 3, 0)$ od ravnine određene točkama $T_1 = (1, 3, 0)$, $T_2 = (4, -1, 2)$ i $T_3 = (3, 0, 1)$.

   (c) ravnina $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ i $-2x + 3y - 6z - 28 = 0$.

   (d) pravca $x = y - 1 = z + 1$ od ravnine $2x + y - 3z + 4 = 0$.

4. Odredite (ako postoji) vrijednost parametra a tako da ravnina

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + (3 - a)z = a^2 - 4a - 5$$

   a) sadrži ishodište,

   b) bude okomita na os x,

   c) bude paralelna s osi x.

5. Pokažite da pravci $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ i $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$ leže u istoj ravnini. Odredite jednadžbu te ravnine.

6. Napišite jednadžbu pravca koji leži u $y - z$ ravnini, prolazi ishodištem i okomit je na pravac određen presjekom ravnina $2x - y = 2$, $y + 2z = -2$.

7. Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca koji prolazi točkom $(3, 2, 0)$, siječe pravac $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-3}{2}$ i okomit je na njega.

8. Odredite udaljenost i zajedničku normalu pravaca

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1} \text{ i } \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

9. Pravac $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ siječe koordinatne ravnine xy, yz i zx u točkama T_1, T_2 i T_3. Odredite površinu trokuta $T_1T_2T_3$ i volumen paralelepipeda određenog vektorima $\overrightarrow{OT_1}$, $\overrightarrow{OT_2}$ i $\overrightarrow{OT_3}$.

10. Vrhovi trokuta su $A = (4, 1, -2)$, $B = (2, 0, 0)$ i $C = (-2, 3, -5)$. Odredite duljinu visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ i jednadžbu pravca na kojem ona leži.

11. U ravninama $12x + 4y + 3z - 5 = 0$ i $3x + y + \frac{3}{4}z + 2 = 0$ leže dvije strane neke kocke. Koliki je volumen te kocke?

12. Dani su točka $T = (15, -6, 6)$ i pravac p određen jednadžbom $\frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-1}{5}$ i ravnina π određena jednadžbom $13x + y - 5z + 4 = 0$. Izračunajte udaljenosti točke T od pravca p, točke T od ravnine π i pravca p od ravnine π. U kojem su položaju dani objekti?

13. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T = (3, 2, 0)$ na

   a) pravac $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-3}{2}$,

   b) ravninu $x + 2y + z = 1$.

   Nađite koordinate točke T_0 koja je simetrična točki T s obzirom na dani pravac, odnosno ravninu.

14. Odredite točku Q simetričnu točki $P = (3, -4, -6)$ s obzirom na ravninu koja prolazi kroz toke $M_1 = (-6, 1, -5)$, $M_2 = (7, -2, -1)$ i $M_3 = (10, -7, 1)$.

15. Neka su T' i p' ortogonalne projekcije točke $T = (-8, 2, -3)$ i pravca

$$p \ldots \ \frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

   na ravninu $\pi \ldots x - y + 3z + 8 = 0$. Odredite udaljenost točke T' i pravca p'.

16. Odredite ortogonalnu projekciju pravca $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ na ravninu $x - y + 3z + 8 = 0$.

17. Dan je pravac p_1 jednadžbom $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$ te pravac p_2 jednadžbom $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{1}$. Odredite točke $T_1 \in p_1$ i $T_2 \in p_2$ takve da je $d(T_1, T_2) = d(p_1, p_2)$.

18. Odredite kut

    (a) između pravaca $x = 2t, y = 3t, z = t$ i $x = 3t, y = -t, z = 2t$. Odredite i jednadžbe simetrala kuteva koje određuju ovi pravci.

    (b) između ravnina $x + y + z = 3$ i $z = 0$.

    (c) između pravca $x = 5 + t, y = -3 + t, z = 4 - 2t$ i ravnine $4x - 2y - 2z = 7$.