Vektori

1 Uvod

1. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut. Izrazite $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AF}$ pomoću $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

2. Neka je T težište trokuta ABC. Dokažite da je $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{0}$.

3. Neka je $ABCDE$ peterokut, K, L, M, N polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, P i Q polovišta stranica $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$. Pokažite da su $\overline{AE}$ i $\overline{PQ}$ paralelni i $|PQ| = \frac{1}{4}|AE|$.

4. Odredite radijvektor polovišta dužine $\overline{AB}$ preko radijvektora točaka A i B.

5. Odredite radijvektor težišta trokuta ABC, ako su zadani radijvektori vrhova A, B i C.

6. Dokažite da je $ABCD$ paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.

7. Neka je $ABCD$ paralelogram, M i N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, P sjecište pravaca BN i CM, T sjecište pravaca AP i BC. U kojem omjeru točka T dijeli $\overline{BC}$?

8. Neka je $ABCDA'B'C'D'$ paralelepiped. Dokažite da $\overline{AC'}$ siječe trokut BDA' u težištu.

9. Neka je $ABCD$ trapez. Dokažite da polovišta osnovica i sjecište produžetaka krakova leže na istom pravcu.

10. Koristeći vektore dokažite da se težišnice trokuta sijeku u istoj točki.

11. Neka je $ABCD$ paralelogram, $T \in \overline{AB}$, $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$, $P = \overline{AC} \cap \overline{TD}$. U kojem omjeru P dijeli $\overline{AC}$?

2 Skalarni produkt

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je definiran sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Svojstva skalarnog produkta:

$\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$	nenegativnost
$\vec{a}^2 = 0$ ako i samo ako $\vec{a} = \vec{0}$	definitnost
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	komutativnost
$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$	kvaziasocijativnost
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	distributivnost prema zbrajanju

1. Zadani su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ tako da je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$. Odredite $|\vec{p} - 2\vec{q}|$.

2. U trokutu OAB je zadano $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (-6, 3, -3)$. Izračunajte duljinu težišnice i simetrale kuta iz vrha 0.

3. Dan je trokut ABC s koordinatama $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 4, 3)$ i $C = (1, 0, 4)$. Odredite duljinu visine na stranicu $\overline{AB}$.

4. Koristeći vektore dokažite formulu

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

5. a) Izvedite formulu za ortogonalnu prjekciju vektora $\vec{x}$ na vektor $\vec{a}$.

   b)Odredite ortogonalnu projekciju vektora $\vec{x} = (8, -4, 3)$ na ravninu razapetu vektorima $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$.

6. U pravokutnom trokutu ABC duljine stranica trokuta se odnose kao $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Dokažite da su dvije njegove težišnice okomite.

3 Vektorski produkt

Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ takav da vrijedi:

- ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, onda je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, onda je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ okomit na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, njegov modul je
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$
a orijentacija vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je takva da $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ čine desnu bazu.

Svojstva vektorskog produkta:

$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$	
$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	antikomutativnost
$(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$	kvaziasocijativnost
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	distributivnost prema zbrajanju

Uočimo da je modul vektorskog produkta vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak površini paralelograma razapetog tim vektorima.

1. Izračunajte duljine vektora:

   a) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$,

   b) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$, ako je $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$.

2. Odredite omjer površine trokuta $\triangle ABC$ i trokuta razapetog težišnicama trokuta $\triangle ABC$.

3. Točka S je unutar trokuta $\triangle ABC$. Neka su P_1, P_2 i P_3 površine trokuta $\triangle SBC$, $\triangle SCA$ i $\triangle SAB$, redom. Dokažite da vrijedi:
$$P_1\overrightarrow{SA} + P_2\overrightarrow{SB} + P_3\overrightarrow{SC} = \vec{0}.$$

4 Mješoviti produkt

Za vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, mješoviti produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Svojstva mješovitog produkta:

- Za $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vrijedi: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3. \end{vmatrix}$
- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$
- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ ako i samo ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

Dokažite da plošne dijagonale koje izlaze iz jednog vrha zadanog paralelepipeda volumena V razapinju novi paralelepiped volumena $2V$.