Elementarna matematika 2 - Analitička geometrija

1 Pravci i ravnine u prostoru

1. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem i siječe pravce s jednadžbama
$$\frac{2x-7}{10}=\frac{y}{3}=\frac{2z-5}{2}, \qquad \frac{x+3}{1}=\frac{y-12}{1}=\frac{z+9}{1}.$$

2. Odredite sjecište pravaca kojima su jednadžbe
$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}, \qquad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

3. Na pravcu čija jednadžba glasi
$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-3}{1}$$
odredite sve točke koje s točkama $A(-2,1,1)$ i $B(0,-7,4)$ čine pravokutan trokut. Koliko rješenja očekujete?

4. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $A(1,0,0), B(1,1,1), C(0,0,-1)$.

5. Zadan je pravac p kao presjek ravnina čije jednadžbe su $x-2z-3=0$ i $y-2z=0$. Odredite sjecište pravca p i ravnine s jednadžbom $x+3y-z+4=0$.

6. Odredite parametar $D\in\mathbb{R}$ tako da pravac koji je presjek ravnina $x-y-z+1=0$ i $2x-3y-z+D=0$ siječe z-os.

7. Opišite što više načina na koje možete odrediti jednadžbu ravnine čija parametrizacija glasi
$$f(t,s)=(1+t+s,t-s,2-t+2s), \qquad t,s\in\mathbb{R}.$$

8. Odredite parametar t takav da je presjek ravnina s jednadžbama
$$x-y+z=0, \qquad 3x-y-z+2=0, \qquad 4x-y-2z+t=0$$
pravac.

9. U ravnini je dan pravac p formulom $3x-2y+5=0$ i točke $A(1,4), B(5,2)$. Odredite udaljenost točke B do pravca p, kut između pravca p i pravca AB, te presjek pravaca p i AB.

10. Odredite pravac p koji je paralelan s ravninama $3x+12y-3z-5=0$ i $3x-4y+9z+7=0$ te siječe pravce

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}, \qquad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

11. Odredite zajedničku normalu pravaca

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}, \qquad \frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0}.$$

12. Odredite ortogonalnu projekciju pravca

$$p\ldots\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

na ravninnu $2x+2y+z=5$.

13. Izvedite formulu za udaljenost točke (x_0, y_0, z_0) od pravca

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C},$$

te zatim odredite udaljenost točke $T(2,3,1)$ od pravca

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-2}.$$

14. Izvedite formulu za udaljenost pravaca

$$\frac{x-x_1}{A_1}=\frac{y-y_1}{B_1}=\frac{z-z_1}{C_1}, \qquad \frac{x-x_2}{A_2}=\frac{y-y_2}{B_2}=\frac{z-z_2}{C_2}$$

te zatim odredite udaljenost između pravaca

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}, \qquad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

15. Odredite jednadžbe simetrala kutova koje zatvaraju pravci

$$\frac{x+5}{-3}=\frac{y-14}{6}=\frac{z+3}{2}, \qquad \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{6}.$$

Zadaci za samostalan rad

1. Napišite kanonski oblik jednadžbe pravca koji je paralelan s ravninom $x + 2y + 3z = 8$, leži u ravnini $2x - y + z = 3$ i prolazi točkom $(1, 2, 3)$.

2. Odredite jednadžbu ravnine paralelne s vektorom $\vec{s} = (2, 1, -1)$ koja x-os siječe u točki $(3, 0, 0)$, a y-os u točki $(0, -2, 0)$.

3. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T(2, 3, 1)$ na ravninu $x+y-z-7 = 0$ i simetričnu točku točki T s obzirom na tu ravninu.

4. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T(2, 3, 1)$ na pravac

$$p \ldots \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = -2t + 4. \end{cases}$$

5. Odredite točku jednako udaljenu od ravnina $16x - 12y + 15z = 9$ i $12x + 9y - 20z = 19$.

6. ODredite udaljenost paralelnih pravaca

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}, \qquad \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{1}.$$

7. Dana je ravnina π formulom $x + y - z + 1 = 0$ i pravac $p \ldots \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

   (a) Odredite sjecište pravca i ravnine i kut između njih.

   (b) Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac p i okomita je na ravninu π.

   (c) Odredite jednadžbu projekcije pravca p na ravninu π.

8. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži os x i koja s ravninom $y = x$ zatvara kut od $60°$.

2 Krivulje drugog reda u ravnini

1. Dana je točka $C(2,4)$ u ravnini. Točkom C prolaze dva međusobno okomita pravca. Prvi siječe os x u točki A, drugi siječe os y u točki B. Odredite geometrijsko mjesto polovišta dužina $\overline{AB}$ ako pravci rotiraju oko točke C ostajući međusobno okomiti.

2. Neka su A i B točke u ravnini i konstanta $2a < |AB|$. Odredite geometrijsko mjesto svih točaka X takvih da je $|AX| - |BX| = 2a$. Postavite koordinatni sustav i izvedite jednadžbu te krivulje u što jednostavnijem obliku.

3. Neka je $A(-3,0)$ i $B(3,0)$. Među svim točkama X takvim da je $|AX| + |BX| = 10$ odredite onu koja je najbliža pravcu koji prolazi točkama $(-3,4)$ i $(-8,1)$.

4. Navedite barem tri načina za određivanje jednadžbe kružnice koja prolazi kroz točke $(-2,-1)$, $(0,3)$, $(6,5)$.

5. Odredite o kojoj krivulji je riječ i njen(e) fokus(e):

   - $x^2 - 6x - y - 3 = 0$,
   - $2x^2 + 60 = 3y^2 + 12x + 24y$,
   - $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$,
   - $4x^2 - 4xy + 7y^2 - 24 = 0$,

6. (Optičko svojstvo parabole) Neka je P točka na paraboli sa žarištem F i neka je P' ortogonalna projekcija točke P na ravnalicu parabole. Dokažite da je tangenta na parabolu u točki P simetrala kuta $\sphericalangle P'PF$.

7. Elipsa i hiperbola imaju ista žarišta. Dokažite da su tangente na te krivulje u sjecištima okomite.

8. Elipsa sa žarištima $(9,20)$ i $(49,55)$ dira x-os. Odredite duljinu veće poluosi te elipse.

9. Televizijska kuća za vrijeme prijenosa utakmice koristi parabolički reflektor koji u žarištu ima mikrofon kojim se snima razgovor između igrača. Ako je reflektor dubok 20 cm i širok 60 cm, gdje treba biti mikrofon?

10. Bubrežni kamenac može se razbiti koristeći ultrazvučni litotriptor. Litotriptor je bazen u obliku elipsoida i emitira podvodne valove u jednom žarištu elipse. Ako su duljine poluosi liptotriptora 120 i 50 cm, koliko daleko od središta treba pozicionirati (bubreg) pacijenta?

11. Komet prolazi kroz Sunčev sustav prateći hiperboličku putanju. U trenutku u kojem se nalazi najbliže Suncu, komet je udaljen 90 Gm od Sunca. U trenutku u kojem je pravac koji prolazi kroz Sunce i komet okomit na žarišnu os hiperbolne putanje, komet je udaljen 281.25 Gm od Sunca. Odredite jednadžbu kometove putanje u koordinatnom sustavu za koji je jednadžba u kanonskom obliku.

Zadaci za samostalan rad

1. (DZ) Koristeći geometrijsku definiciju elipse i parabole izvedite kanonske jednadžbe tih krivulja.

2. (DZ) Dane su kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ (koje se ne sijeku). Odredite geometrijsko mjesto središta kružnica koje diraju zadane kružnice. Obratite pažnju na sve slučajeve.

3. (DZ) Neka su A i B točke u ravnini i k pozitivna konstanta. Odredite geometrijsko mjesto svih točaka X takvih da je $|AX| = k \cdot |BX|$.

4. (DZ) Zadane su točke A i B u ravnini i konstanta k. Dokažite da je geometrijsko mjesto svih točaka X takvih da je $|AX|^2 - |BX|^2 = k$ pravac okomit na AB.

5. (DZ) Presjek plašta stošca i ravnine je zatvorena krivulja. Koristeći Dandelinove sfere (tj. sfere koje diraju stožac i ravninu) pokažite da je ta krivulja elipsa.

6. (DZ) Dana je elipsa čija je jednadžba $x^2 + 4y^2 = 36$. Kružnica k ima središte u točki $(0, 3)$ i prolazi žarištima dane elipse. Odredi sva sjecišta kružnice k s elipsom.

7. (DZ) Izvedite da kut φ za koji treba rotirati koordinatni sustav tako da zapis jednadžbe

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

u novim koordinatama ima koeficijent 0 uz xy zadovoljava

$$\cot 2\varphi = \frac{A - C}{2B}.$$

8. (DZ) Odredite o kojoj krivulji je riječ i njen(e) fokus(e):

   - $3x^2 - 2xy - 5x + 6y - 10 = 0$,
   - $12x^2 - 4y^2 - 72x - 16y + 44 = 0$,
   - $y^2 - 6x - 4y - 13 = 0$,
   - $-3x^2 + 7xy - 2y^2 - x + 20y - 15 = 0$.

9. (DZ) Iskažite i dokažite optičko svojstvo elipse i hiperbole.

10. (DZ) Tetiva $\overline{PQ}$ elipse sadrži fokus F_1, a R je sjecište tangenti u P i Q na tu elipsu. Dokažite da je R središte pripisane kružnice trokutu F_2PQ i da je točka F_1 točka u kojoj ta kružnica dira $\overline{PQ}$. (Uputa: koristiti optičko svojstvo elipse)

11. (DZ) Neka je P točka izvan elipse s fokusima F_1 i F_2, te neka tangente iz P diraju elipsu u točkama X i Y. Dokažite $\sphericalangle F_1PX = \sphericalangle F_2PY$.

12. (DZ) Dokažite da slika žarišta parabole pri osnoj simetriji obzirom na tangentu leži na ravnalici te parabole.

13. (DZ) Dokažite da ortocentar trokuta kojeg tvore tri tangente parabole leži na ravnalici te parabole.

14. (DZ) Ulaz u tunel ima oblik poluelipse. Ulaz je širok 50 m, a visok je 15 m. Odredi visinu ulaza 2.5 m od ruba tunela.

15. (DZ) U teleskopima se često koriste hiperbolička ogledala. Žarište takvog ogledala ima koordinate $(12, 0)$. Odredi tjeme ogledala ako je jedan njegov rub u točki $(12, 12)$.

16. (DZ) S litice visoke 48 m teče vodopad u obliku parabole. Točka u kojoj voda udara u tlo je udaljena od podnožja litice za $10\sqrt{3}$ m. Odredite kanonsku jednadžbu litice u koordinatnom sustavu kojem je ishodište u podnožju litice.

    Sljedeće zadatke riješite pogodnim uvođenjem koordinatnog sustava.

17. (DZ) Zadan je jednakokračan trokut ABC, pri čemu je točka M polovište osnovice $\overline{AB}$. Na kraku $\overline{BC}$ odabrana je točka N takva da je $MN \perp BC$, a točka S je polovište dužine $\overline{MN}$. Dokažite da je $AN \perp CS$.

18. (DZ) Prethodni zadatak riješite planimetrijski, te koristeći vektore. Usporedite tri načina rješavanja te za svaki navedite koje su prednosti i mane tog pristupa.

19. (DZ) Neka je dan kvadrat $ABCD$ i točka E polovište stranice $\overline{AB}$. Točke F i G leže na BC i CD tako da su pravci AG i EF paralelni. Dokažite da dužina FG dira kružnicu upisanu u kvadrat $ABCD$. (Uputa: izvedite i iskoristite uvjet tangencijalnosti pravca na kružnicu.)

20. (DZ) Dokažite da se težišnice iz vrhova A i B trokuta ABC međusobno okomite ako i samo ako za duljine stranica vrijedi $|AC|^2 + |BC|^2 = 5|AB|^2$.

21. (DZ) Neka su p i q realni brojevi. Graf funkcije $f(x) = x^2 + px + q$ siječe koordinatne osi u tri različite točke A, B i C. Dokažite da kružnica opisana trokutu ABC siječe os y u točki s ordinatom 1.

22. (DZ) U jednakokračni pravokutni trokut ABC upisan je pravokutnik $CDEF$ tako da mu vrhovi D, E, F leže redom na stranicama $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Iz vrha C spuštena je visina $\overline{CM}$ na AB i ona siječe stranicu pravokutnika u točki K. Dokažite da je četverokut $AKFD$ paralelogram.

23. (DZ) Neka su M i N polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$. Dužine $\overline{BN}$ i $\overline{CM}$ sijeku se u točki P. Dokažite da su pravci BN i CM okomiti i da je duljina dužine $\overline{AP}$ jednaka duljini stranice kvadrata.

24. (DZ) Na dijagonali $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$ dana je točka T takva da je $|AT| = 3|CT|$. Ako je P polovište dužine $\overline{AB}$, dokažite da je trokut DPT jednakokračan i pravokutan.

25. (DZ) Dan je trokut ABC u kojem je $|AB| > |AC|$. Simetrala vanjskog kuta $\angle BAC$ siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točki E, a točka F je ortogonalna projekcija točke E na pravac AB. Dokažite da je $|AF| = |AB| - |AC|$.

    (Uputa: koordinatni sustav uvedite tako da su vanjska i unutarnja simetrala kuta koordinatne osi.)

26. (DZ) Dan je trokut ABC u kojem je $\angle CBA = 60^\circ$ i $|AB| > |BC|$. Točka I je središte upisane kružnice trokuta ABC, a točka E sjecište njegove opisane kružnice sa središtem O i simetrale vanjskog kuta $\sphericalangle BAC$. Dokažite da je $|IO| = |AE|$.

3 Razni koordinatni sustavi, krivulje i plohe u prostore

1. Skicirajte krivulju čija jednadžba u polarnim koordinatama glasi $r = \varphi$.
2. Skup S skicirajte i parametrizirajte u polarnim koordinatama:
   - $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$,
   - $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}$,
   - $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.
3. Odredite jednadžbu u Kartezijevim koordinatama krivulje čija jednadžba u polarnim koordinatama glasi $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$. Odredite fokuse i direktrisu te krivulje.
4. Odredite jednadžbu sfere kojoj je središte na z-osi i koja prolazi kroz točke $(2, 1, 3)$ i ishodište.
5. Skicirajte plohu a) $4 - z = x^2 + y^2$, b) $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, c) $x^2 + y^2 = (z-2)^2$, d) $(x-1)^2 + 4(y-1)^2 + 4z^2 = 16$.
6. U cilindričnim koordinatama parametrizirajte skup omeđen plohama $x^2 + y^2 = 5 - z$ i $x^2 + y^2 = z^2 - 1$. Nacrtajte taj skup.
7. U sfernim koordinatama parametrizirajte skup koji je omeđen sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i ravninama $x = y$, $x = 0$ i $z = 0$.

Zadaci za samostalan rad

1. Odredite ekscentricitet i direktrisu krivulje kojoj polarna jednadžba glasi a) $\dfrac{6}{1 + 2\cos\varphi}$, b) $\dfrac{2}{4 - \cos\varphi}$, c) $\dfrac{21}{5 - 2\cos\varphi}$, d) $\dfrac{12}{3 + 3\cos\varphi}$.
2. Definirajte elipsu i hiperbolu koristeći fokus i direktrisu, te diskutirajte izgled krivulje u ovisnosti u parametrima jednadžbe u polarnim koordinatama $r = \dfrac{ke}{1 + e\cos\varphi}$.
3. Neka je $A(0, 0, 1)$ i $B(0, 2, 3)$. Odredite geometrijsko mjesto svih točaka P za koje je AP okomito na BP.
4. Parametrizirajte skup omeđen plohama $z = x^2 + y^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ u cilindričnim koordinatama.
5. Neka je $\varphi = \frac{\pi}{6}$ jednadžba plohe u sfernim koordinatama. Odredite jednadžbu te plohe u Kartezijevim i cilindričnim koordinatama.
6. Odredite parametrizaciju krivulje koja je presjek eliptičkog paraboloida $z = 4x^2 + y^2$ i paraboličkog cilindra $y = x^2$. U kojim točkama ta krivulja siječe ravninu $x + 2y = 3$?
7. U kojim točkama zavojnica s parametrizacijom $f(t) = (\sin t, \cos t, t)$ siječe sferu čija je jednadžba $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?
8. Odredite tangentu na krivulju s parametrizacijom $f(t) = (\ln t, 2\sqrt{t}, t^2)$ u točki $(0, 2, 1)$.
9. Odredite točku na sferi $(x-7)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$ koja je najbliža ravnini $2x - 3y - z + 7 = 0$.