Elementarna matematika 2

Matija Bašić

Ravninu možemo definirati kao skup $\mathbb{R}^2$, čije elemente zovemo točkama, zajedno s funkcijom udaljenosti

$$|-|\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

koja zadovoljava svojstva

1. $|AB| \geqslant 0$ za sve točke A i B;
2. $|AB| = 0$ ako i samo ako je $A = B$;
3. $|AB| = |BA|$ za sve točke A i B;
4. $|AB| \leqslant |AC| + |CB|$, za sve točke A, B, C.

Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je *izometrija* ako je bijekcija i vrijedi $|f(A)f(B)| = |AB|$ za sve točke A i B. Primjeri izometrija su: rotacije, identiteta, osna simetrija, translacija itd.

Paralelogram je četverokut koji ima dva para nasuprotnih paralelnih stranica. *Srednjica* u trokut je dužina koja spaja polovišta dviju stranica. *Transverzala* (presječnica) je pravac koji siječe par paralelnih pravaca.

Koristeći aksiom o paralelama možemo dokazati: Neka pravac q siječe pravce p_1 i p_2. Pravci p_1 i p_2 su paralelni ako i samo ako su kutovi između q i p_1, te q i p_2 jednaki.

1 Sukladnost i izometrije

Trokuti su sukladni ako postoji izometrija koja preslikava jedan trokutu u drugi. Podsjetite se na teoreme o sukladnosti trokuta, posebno na $SSK^{>}$.

1. Dokaži da je četverokut paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju. (ovakve tvrdnje zovemo *karakterizacije*)
2. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$ u trokutu ABC, te neka paralela s BC kroz P siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki Q. Dokažite da je Q polovište dužine $\overline{AC}$.
3. Neka je $ABCD$ četverokut te K, L, M, N redom polovišta njegovih stranica. Dokažite da je $KLMN$ paralelogram.
4. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Ako je P polovište dužine $\overline{AC}$ dokaži da je $|DM| = 2|BP|$.
5. Nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ konstruirani su izvana jednakostranični trokuti BPC i DCQ. Dokažite da je trokut APQ jednakostraničan.

6. Neka su $ABCO$ i $DEFO$ kvadrati takvi da se dužine $\overline{AD}$ i $\overline{CF}$ sijeku u vrhu O. Ako je $\overline{ON}$ visina trokuta CDO, dokažite da pravac ON siječe dužinu $\overline{AF}$ u njenom polovištu.

7. Dva okomita pravca sijeku stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ kvadrata $ABCD$ redom u točkama E, F, G, H. Dokažite da je $|EG| = |HF|$.

8. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut sa središtem O. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$, a L točka presjeka pravaca AM i BN. Dokažite:

   - $P(ABL) = P(DMLN)$.
   - $\sphericalangle ALO = \sphericalangle OLN = 60°$.
   - $\sphericalangle OLD = 90°$.

   (Uputa: Rotirajte četverokut $CMAB$ za $60°$ oko točke O.)

Zadaci za vježbu:

1. Ako u četverokutu jedna dijagonala raspolavlja pripadajuće nasuprotne kutove, dokažite da se njegove dijagonale sijeku pod pravim kutem.

2. Nad stranicama paralelograma $ABCD$ konstruirani su prema van jednakostranični trokuti ABE, BCF, CDG i DAH. Dokažite da je $EFGH$ paralelogram.

3. Dokažite sljedeću tvrdnju: Trapez je jednakokračan ako i samo ako mu je polovište jedne osnovice jednako udaljeno od krajeva druge osnovice.

4. Duljine kateta pravokutnog trokuta su a i b, a duljina njegove hipotenuze c. Ako je veličina jednog kuta $75°$, dokaži da vrijedi $c^2 = 4ab$.

5. U trokutu ABC kut kod vrha A je dvostruko veći od kuta kod vrha B. Neka simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Dokaži da vrijedi

$$|BC| = |AD| + |AC|.$$

6. U tupokutnom trokutu ABC, s tupim kutom u vrhu A, kut γ dva je puta veći od kuta β. Pravac koji prolazi vrhom A i okomit je na pravac AB siječe pravac BC u točki D. Pravac koji je usporedan s pravcem AD i prolazi polovištem stranice $\overline{AB}$ siječe pravac BC u točki E. Dokažite da je $|DE| = |AC|$.

7. Točke P_1 i P_2 su polovišta nasuprotnih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelograma $ABCD$. Dužine $\overline{DP_1}$ i $\overline{DP_2}$ sijeku dijagonalu $\overline{AC}$ redom u točkama M i N. Dokažite da točke M i N dijele dijagonalu $\overline{AC}$ na tri jednaka dijela.

8. Točke M, N, P, Q su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ kvadrata $ABCD$. Dokažite da pravci AN, BP, CQ i DM omeđuju kvadrat.

9. U pravilnom šesterokut $ABCDEF$ točka K je polovište dijagonale $\overline{BD}$, a točka L polovište stranice $\overline{EF}$. Dokažite da je trokut AKL jednakostraničan.

2 Karakteristične točke trokuta, površine i sličnost

1. Dokažite da se simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki.

2. Dan je trokut sa stranicama duljina a, b, c. Ako vrijedi $a - b = b - c$, dokažite da je duljina visine na stranicu duljine b trostruko veca od polumjera tom trokutu upisane kružnice. (Uputa: $P = r \cdot s$)

3. Dokažite da težište dijeli težišnicu trokuta u omjeru $1 : 2$ i da težišnice dijele trokut na šest trokuta jednakih površina.

4. Težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ trokuta ABC imaju duljine $|AA_1| = 6$ i $|BB_1| = \frac{9}{2}$, i međusobno su okomite. Izračunajte duljine stranica tog trokuta.

5. Dijagonala $\overline{AC}$ jednakokračnog trapeza $ABCD$ duga je $12\,\text{cm}$ i zatvara s duljom osnovicom kut od 45°. Kolika je površina tog trapeza?

6. Dijagonale četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki O. Dokažite da vrijedi
$$|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO| \quad \Leftrightarrow \quad AD \parallel BC.$$

7. Neka je ABC trokut cije su stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednake duljine. Označimo s P polovište stranice $\overline{AB}$ i s N nožište okomice iz P na stranicu $\overline{AC}$.
Pokažite da je trokut PBC sličan trokutu NAP.

   Označimo s Q polovište dužine $\overline{NP}$. Dokažite da je trokut CQP sličan trokutu ANB.

8. Visina dijeli osnovicu trokuta na dijelove duljina 36 i 14. Pravac p raspolavlja površinu trokuta i okomit je na tu osnovicu. Na koje dijelove pravac p dijeli osnovicu trokuta?

9. Neka je ABC trokut te A_1, B_1, C_1 tocke na njegovim stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom, takve da pravci AA_1, BB_1 i CC_1 prolaze istom tockom T. Ako vrijedi
$$|BA_1| : |A_1C| = 1 : 3 \quad \text{i} \quad |CB_1| : |B_1A| = 2 : 1,$$
odredite $|AC_1| : |C_1B|$ i $|AT| : |TA_1|$.

Zadaci za vježbu:

1. Dan je trokut ABC sa stranicama duljina $a = |BC| = 20$, $b = |AC| = 12$, $c = |AB| = 16$. Na stranici $\overline{AB}$ nalaze se točke M i P, a na stranici $\overline{BC}$ točke N i Q takve da je $MN \parallel PQ \parallel AC$ i $|CN| = |BQ| = 5$. Odredite duljine stranica trapeza $MPQN$.

2. Iz vrha A paralelograma $ABCD$ spuštene su okomice $\overline{AM}$ i $\overline{AN}$ na pravce BC i CD. Dokažite da su trokuti ABC i AMN slični.

3. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa središtem O i neka su točke P i Q na dijagonali $\overline{AC}$ takve da je $|AP| = |PQ| = |QC|$. Ako pravac PB siječe stranicu $\overline{AD}$ u točki M, a pravac BQ siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki N, dokaži da su površine trokuta MPO i NQO jednake.

4. Točke P i Q leže na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ tako da vrijedi $|AP| = |PQ| = |QB|$. Pravac DQ siječe pravce AC i CP redom u točkama K i L, a pravac DB siječe pravce AC i CP redom u točkama N i M. Odredi omjer površina četverokuta $KLMN$ i pravokutnika $ABCD$.

5. Dan je kvadrat $ABCD$ i točka S unutar njega, takva da je trokut ABS jednakostraničan. Izračunajte površinu trokuta ADS i CSD te kut $\sphericalangle CSD$.

6. Zadan je trapez $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Nožište okomice iz polovišta M kraka $\overline{AD}$ na pravac BC je točka N. Dokažite da je površina trapeza $ABCD$ jednaka $|BC| \cdot |MN|$.

7. U trokutu su dvije težišnice duljina 18 i 24 međusobno okomite. Kolika je površina trokuta?

8. Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC dane su točke A_1, B_1, C_1 takve da je $|BA_1| = k|BC|$, $|CB_1| = k|CA|$, $|AC_1| = k|AB|$, za neki $k \in \langle 0, 1 \rangle$. Označimo sa P, S, P_1, P_2, P_3 redom površine trokuta ABC, $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C.

   (a) Dokažite da je $P_1 = P_2 = P_3$.

   (b) Odredite k ako vrijedi $S = kP$.

9. Dan je pravokutan trokut ABC kojem su duljine kateta $|AC| = 7$ i $|BC| = 4$. Na hipotenuzi je odabrana točka D. Odredite, ako je moguće, površinu trokuta CMN.

10. Dokažite Cevin i Menelajev teorem.

3 Kružnica

1. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

2. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Koje točke leže na njegovoj Feuerbachovoj kružnici? Dokažite to ne pozivajući se na teorem o Feuerbachovoj kružnici.

3. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina trokuta ABC. Dokažite da je ortocentar trokuta ABC središte kružnice upisane trokutu $A_1B_1C_1$.

4. Jednakokračni trokut ABC ($|AB| = |AC|$) upisan je u kružnicu k. Neka je D točka na osnovici $\overline{BC}$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokaži da vrijedi $|EG| = |GF|$.

5. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Dokažite da su kružnice opisane trokutima ABC, HBC, AHB i ABH međusobno sukladne.

6. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ u trokutu ABC siječe nasuprotnu stranicu u točki S. Točka T je polovište stranice $\overline{BC}$. Kružnica opisana trokutu AST siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Dokažite da je $|BD| = |CE|$.

7. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC i neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ABC$. Točkom E povučena je paralela s $\overline{BC}$ koja siječe $\overline{AD}$ u točki F. Dokažite da je $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$.

8. Neka je $ABCD$ kvadrat i neka je M točka na manjem luku $\widehat{AB}$ kružnice opisane tom kvadratu. Dokažite da
$$\frac{|AM| + |BM|}{|CM| + |DM|}$$
ne ovisi o položaju točke M.

Zadaci za vježbu:

1. Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Dokažite da je kut između tangente t i tetive $\overline{AB}$ jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

2. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem O. Na kružnici je dana točka C takva da je OC okomito na AB. Na kraćem luku $\widehat{BC}$ odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na pravac AB.

   Dokažite da je $|BQ| = |QR|$.

3. Dokažite da je duljina visine trapeza kojemu se može upisati i opisati kružnica jednaka geometrijskoj sredini duljina njegovih osnovica.

4. Neka je $\overline{AB}$ zajednička tetiva dviju kružnica. Pravac kroz A siječe jednu kružnicu još u točki C, a drugu još u točki D. Tangente u točkama C i D (na odgovarajuće kružnice) sijeku se u točki M. Dokažite da je $BCMD$ tetivni četverokut.

5. Zadane su kružnica k i točka M unutar nje. Ako se točkom M povuku dvije međusobno okomite tetive kružnice k, dokažite da je zbroj kvadrata duljina tih tetiva konstantan.

6. Na kružnici polumjera r, s različitih strana njezina promjera $\overline{AB}$ dane su točke C i D takve da je $\sphericalangle DAB = 30^\circ$ i $\sphericalangle CAB = 45^\circ$. Odredite $|CD|$.

7. Dan je trokut ABC. Simetrale kutova $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ sijeku njegovu opisanu kružnicu u točkama P, Q, R redom. Dokažite da je $|AP| + |BQ| + |CR|$ veće od opsega trokuta.