1 Euklidovi aksiomi, izometrije

Udaljenost $d\colon M \times M \to M$ je funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $d(A, B) \geqslant 0$, za sve točke Ai B
2. $d(A, B) = 0$ ako i samo ako je $A = B$
3. $d(A, B) = d(B, A)$, za sve točke A i B
4. $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$, za sve točke A, B i C

Izometrija $f\colon M \to M$ je funkcija koja je bijekcija i za koju vrijedi:

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \text{za sve točke } A \text{ i } B.$$

Primjeri izometrija su identiteta, rotacija, osna i centralna simetrija i translacija.

Neka pravac q siječe pravce p_1 i p_2. Pravci p_1 i p_2 su paralelni ako i samo ako su kutovi između q i p_1 te q i p_2 jednaki.

2 Sukladnost trokuta, izometrije

Teoremi o sukladnosti

1. **SKS** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut među njima.*
2. **KSK** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladni jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*
3. **SSS** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne sve tri stranice.*
4. **SSK**$^{>}$ *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot veće od njih.*

Paralelogram je četverokut koji ima dva para nasuprotnih paralelnih stranica.

Romb je paralelogram koji ima sve četiri stranice iste duljine.

Pravokutnik je paralelogram s pravim kutom. Ekvivaletno, pravokutnik je paralelogram kojemu su svi kutovi pravi.

Kvadrat je pravokutnik koji ima sve četiri stranice iste duljine.

Karakterizacije paralelograma

1. *Četverokut je paralelogram ako i samo ako su mu nasuprotne stranice jednake duljine.*
2. *Četverokut je paralelogram ako i samo ako su mu nasuprotni kutovi jednaki.*
3. *Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.*
4. *Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu za jedan par nasuprotnih stranica vrijedi da te stranice leže na paralelnim pravcima i jednake su duljine.*

Teorem o srednjici
Srednjica trokuta je paralelna trećoj stranici i jednaka je njenoj polovici.

Teorem o težištu
Težišnice trokuta ABC sijeku se u jednoj točki T koju zovemo težište trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha.

Zadatak 1. Dokažite da je četverokut paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.

Zadatak 2. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$, te neka paralela s BC siječe stranicu $\overline{AC}$u točki Q. Dokažite da je Q polovište dužine $\overline{AC}$.

Zadatak 3. Neka je $ABCD$ četverokut te neka su K, L, M, N redom polovišta njegovih stranica. Dokažite da je $KLMN$ paralelogram.

Zadatak 4. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Označimo s P polovište dužine $\overline{AC}$. Dokažite da je $|DM| = 2|BP|$.

Zadatak 5. Neka su $ABCO$ i $DEFO$ kvadrati sa zajedničkim vrhom O u takvom položaju da se dužine $\overline{AD}$ i $\overline{CF}$ sijeku u vrhu O. Ako je $\overline{ON}$ visina trokuta CDO, dokažite da pravac ON siječe dužinu $\overline{AF}$ u njenom polovištu.

Zadatak 6. Dva okomita pravca sijeku stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ kvadrata $ABCD$ redom u točkama E, F, G, H. Dokažite da je $|EG| = |HF|$.

Zadatak 7. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut sa središtem O. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$, a L točka presjeka pravaca AM i BN. Dokažite:

(a) $P(ABL) = P(DMLN)$

(b) $\sphericalangle ALO = \sphericalangle OLN = 60^\circ$

(c) $\sphericalangle OLD = 90^\circ$

Zadatak 8. Točke M, N, P, Q su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ kvadrata $ABCD$. Dokažite da pravci AN, BP, CQ i DM omeđuju kvadrat.

3 Površine, sličnost trokuta, karakteristične točke trokuta

Karakteristične točke trokuta

1. **Ortocentar H** je sjecište pravaca na kojima leže visine trokuta.

2. **Težište T** je sjecište pravaca na kojima leže težišnice trokuta.

3. **Sjecište simetrala stranica O**. Točka O je ujedno i središte trokutu opisane kružnice. Polumjer opisane kružnice iznosi
$$R = \frac{abc}{4P}, \quad \text{gdje je } P \text{ površina trokuta.}$$

4. **Sjecište simetrala kutova S**. Točka S je ujedno i središte trokutu upisane kružnice. Polumjer upisane kružnice iznosi
$$r = \frac{P}{s}, \quad \text{gdje je } s \text{ poluopseg.}$$

Teoremi o sličnosti

1. **KKK** *Dva trokuta su slična ako su im sukladna sva tri kuta.*

2. **SSS** *Dva trokuta su slična ako su im jednaki omjeri odgovarajućih stranica, odnosno vrijedi:*
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

3. **SKS** *Dva trokuta su slična ako su im jednaki omjeri dviju stranica i kut između tih stranica, odnosno vrijedi:*
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad i \quad \gamma = \gamma'.$$

4. **SSK$^>$** *Dva trokuta su slična ako su im jednaki omjeri dviju stranica i kut nasuprot veće stranice, odnosno vrijedi:*
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \alpha = \alpha' \quad i \quad a > b.$$

Zadatak 1. Dokažite da se simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki.

Zadatak 2. Dokažite koristeći teoreme o sličnosti trokuta da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru 1 : 2. Dokažite zatim da težišnice dijele trokut na šest trokuta istih površina.

Zadatak 3. Težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ trokuta ABC imaju duljine $|AA_1| = 6$ i $|BB_1| = \frac{9}{2}$ i međusobno su okomite. Izračunajte duljine stranica tog trokuta.

Zadatak 4. Dijagonala $\overline{AC}$ jednakokračnog trapeza $ABCD$ duga je 12cm i zatvara s duljom osnovicom kut od 45°. Kolika je površina tog trapeza?

Zadatak 5. Dijagonale četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki O. Dokažite da vrijedi:

$$|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO| \Leftrightarrow AD \parallel BC.$$

Zadatak 6. Neka je ABC trokut čije su stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednake duljine. Označimo s P polovište stranice $\overline{AB}$ i s N nožište okomice iz P na stranicu $\overline{AC}$. Pokažite da je trokut PBC sličan trokutu NAP. Označimo s Q polovište dužine $\overline{NP}$. Dokažite da je trokut CQP sličan trokutu ANB.

Zadatak 7. Visina dijeli osnovicu trokuta na dijelove duljina 36 i 14. Pravac p raspolavlja površinu trokuta i okomit je na tu osnovicu. Na koje dijelove pravac p dijeli osnovicu trokuta?

4 Kružnica

Talesov teorem o kutu nad promjerom

Ako je $\overline{AB}$ dijametar kružnice, a T bilo koja točka kružnice različita od A i B, onda je ATB pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha T.

Obrat Talesovog teorema

Neka je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina. Tada je skup svih točaka T takvih da je $\sphericalangle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$.

Teorem o obodnom i središnjem kutu

Središnji kut nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim lukom.

Teorem. *Obodni kutovi nad istim lukom kružnice su jednaki. Obodni lukovi nad suprotnim lukovima su suplementarni.*

Teorem. *Kut između tangente kružnice kojoj je diralište u krajnjoj točki tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

Potencija točke na kružnicu

Teorem. *Neka je k kružnica, a T točka ravnine. Neka je p bilo koji pravac koji prolazi točkom T i siječe kružnicu k u točkama A i B. Tada je vrijednost izraza $|TA| \cdot |TB|$ konstantna, tj. ne ovisi o izboru pravca p.*

Za T, k, A, B kao u prethodnom teoremu, **potencija točke T obzirom na kružnicu k** je

- $|TA| \cdot |TB|$, ako je T izvan kružnice k;

- $-|TA| \cdot |TB|$, ako je T unutar kružnice k;
- 0, ako je T na kružnici k.

Tangencijalni četverokut je četverokut kojem se može upisati kružnica, tj. stranice su mu tangente iste kružnice.

Teorem. *Četverokut je tangencijalan ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih stranica jednak.*

Tetivni četverokut je četverokut kojem se može opisati kružnica, tj. stranice su mu tetive iste kružnice.

Teorem. *Četverokut je tetivan ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih (unutarnjih) kutova jednak* $180°$.

Zadatak 1. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

Zadatak 2. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutem pri vrhu C. Dokažite da su polovišta stranica, vrh C i nožište visine iz vrha C konciklički (tj. da leže na istoj kružnici).

Zadatak 3. Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Dokažite da je kut između tangente t i tetive $\overline{AB}$ jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Zadatak 4. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina trokuta ABC. Dokažite da je ortocentar trokuta ABC središte kružnice upisane trokutu $A_1B_1C_1$.

Zadatak 5. Dokažite da je duljina visine trapeza kojemu se može upisati i opisati kružnica jednaka geometrijskoj sredini duljina njegovih osnovica.

Zadatak 6. Dokažite da točke osnosimetrične ortocentru s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici trokuta.

Zadatak 7. Zadane su kružnica k i točka M unutar nje. Ako se točkom M povuku dvije međusobno okomite tetive kružnice k, dokažite da je zbroj kvadrata duljina tih tetiva konstantan.

Zadatak 8. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC i neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ABC$. Točkom E povučena je paralela s $\overline{BC}$ koja siječe $\overline{AD}$ u točki F. Dokažite da je $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$.