Elementarna matematika 2

Nastavni materijal
Po predavanjima prof. Z. Bujanovića i prof. B. Muhe

Autor

Daniel Širola

Verzija: 8. 3. 2021.

Predgovor

Ovaj materijal nastao je za vrijeme pandemijskih okolnosti u ožujku 2020. godine kao dodatak svim postojećim službenim materijalima kolegija. Pošto je značajan dio obavezne literature kolegija nedostupan na internetu, a tokom pandemije koronavirusa sveučilišna je knjižnica bila zatvorena, ti materijali su bili nedostupni. Nakana autora bila je da ovim materijalom pruži kolegama objedinjenu literaturu kolegija Elementarna matematika 2, te se nada da je u tome barem dijelom uspio. Također se nada da će materijal biti od koristi i budućim generacijama.

Primarni izvor i literatura kolegija su redovita predavanja, te ovaj materijal **nije** zamjena za službena predavanja, već nadopuna ponuđenim materijalima koja je većinom nastala na temelju literature pod brojevima [1] i [5]. Na mjestima u navedenim literaturama gdje mi se učinilo da je moguće dodati komentar ili drugačiji dokaz koji će doprinijeti eleganciji i jasnoći, potrudio sam se da i učinim tako. Materijal je pisan s namjerom da svaki argument u njemu bude detaljno potkrijepljen prethodno dokazanim činjenicama i da bude jasan i lagan za čitanje. Neki su dokazi ipak izostavljeni iz izlaganja jer primjerice zahtijevaju veće predznanje, te je na tim mjestima razlog izostanka dokaza naveden.

Prva dva poglavlja, izuzev manjih iznimaka, prate literaturu [1] i predlažem da radi razumijevanja aksiomatike geometrije i apstraktnog mišljenja pročitate u detalje dokaze iskazanih tvrdnji. Treće poglavlje u pravilu prati literaturu [5] i obiluje nekim dokazima koji su poprilično mehanički i baziraju se na rastavljanju na slučajeve. U materijalu se često nalaze svi slučajevi, no preporučam da pročitate jedan od slučajeva i shvatite ideju dokaza, a ostale slučajeve možete i preskočiti. Četvrto poglavlje značajnije odudara od službenih materijala. Naime, s obzirom da je u literaturi [5] pretpostavljeno tek srednjoškolsko predznanje, većina ponuđenih dokaza je potpuno mehanička, no uz pomoć alata linearne algebre dokazi se mogu izvesti nešto elegantnije. Stoga četvrto poglavlje zahtijeva određeno predznanje kolegija *Linearna algebra 1.* Kao pomoć u praćenju istog predlažem literaturu [6].

Na nekoliko mjesta u ovom materijalu postoje naslovi označeni zvjezdicom (*). Takve teme blago izlaze iz gradiva kolegija i nisu nužne za razumijevanje samog kolegija, već se nalaze kao zanimljivosti za znatiželjne čitatelje.

Pred vama se nalazi ispravljena verzija u kojoj su pronađene i ispravljene neke greške i učinjene sitne preinake. Bit ću zahvalan svakome tko mi bude prijavio bilo kakvu grešku, nejasnoću ili prijedlog za poboljšanje teksta. Također ovim putem se zahvaljujem i kolegi Luki Šimeku koji je čitao materijal u nastajanju i pomogao mi pronaći veliku količinu greški.

Zadar, srpanj 2020.

Sadržaj

Poglavlje 1

Planimetrija

1.1 Aksiomatika

Prva aksiomatika geometrije se pripisuje Euklidu [1]. Iskazana je u prvoj knjizi djela *Elementi*, u obliku glasovitih pet Euklidovih postulata:

I Svake dvije točke mogu se spojiti dužinom.

II Svaka se dužina može produžiti proizvoljno.

III Možemo nacrtati kružnicu sa zadanim središtem i polumjerom.

IV Svi pravi kutovi su jednaki.

V Ako dužina siječe dvije dužine tako da je suma unutarnjih kutova manja od dva prava kuta, produžetci se tih dvaju dužina moraju sijeći na toj strani.

Godinama je predmet rasprave bio peti postulat. Pošto iskaz petog postulata značajno odudara od ostatka postulata postavilo se pitanje je li uopće dani sustav aksioma nezavisan, odnosno može li se peti postulat dokazati pomoću preostalih. Do 19. stoljeća bilo je mnogo neuspješnih pokušaja da se dokaže peti aksiom pomoću ostala četiri. Da je taj sustav aksioma uistinu nezavisan dokazao je Lobačevski[2] otkrivanjem geometrije u kojoj vrijede prva četiri aksioma, no zadnji ne vrijedi. Pošto su Euklidovi aksiomi nedorečeni i većinom ne sasvim precizni, s vremenom se pojavila potreba za ponovnom i preciznijom aksiomatikom geometrije. Nastalo je više sustava aksioma, no najintuitivniji su svakako Hilbertovi.[3] Mi ćemo proučavati blago pojednostavnjenu verziju Hilbertovog sustava aksioma.
Prije navođenja aksioma, definiramo osnovne pojmove koje ćemo koristiti.

Definicija 1.1.1. Euklidska ravnina je skup M čiji element nazivamo **točka**, a podskup za koji vrijede Hilbertovi aksiomi nazivamo **pravac**.

Pošto su točke elementi skupa M, a pravci podskupovi, pravilno bi bilo govoriti da točka jest ili nije element pravca, no intuitivno kažemo da točka leži na pravcu ili da pravac prolazi tom točkom, odnosno da točka ne leži odnosno da pravac ne prolazi tom točkom.
Odnosi pravaca i točaka određeni su sljedećim aksiomima:

[1] Euklid Aleksandrijski (3. stoljeće pr. Kr.) - starogrčki matematičar
[2] Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1793. - 1856.) - ruski matematičar
[3] David Hilbert(1862.-1943.) - njemački matematičar

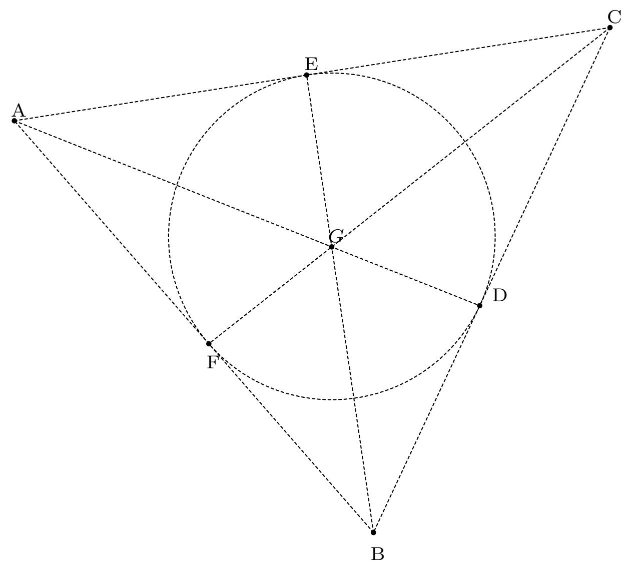
Aksiomi incidencije

(I1) Za svake dvije točke $A, B \in M$ postoji jedinstven pravac koji prolazi objema točkama i označavamo ga s AB.

(I2) Na svakom pravcu leže barem tri različite točke.

(I3) Postoje tri točke koje ne leže na istom pravcu.

Aksiomi incidencije nipošto nisu dovoljni za jedinstveno definiranje Euklidske ravnine. Primjer koji dokazuje suprotno je konačna geometrija pod imenom *Fanova ravnina*.



Fanova ravnina

Bitno je napomenuti da iscrtkane linije samo označavaju da točke povezane njima čine pravac, te služe samo ilustracije radi. U ovom slučaju ravnina je konačna i ne postoje točke osim onih označenih slovima. Pravci koji se pojavljuju su redom
$\{A, E, C\}, \{F, E, D\}, \{E, G, B\}, \{F, G, C\}, \{A, G, D\}, \{A, F, B\}, \{B, D, C\}$.

Aksiomi uređaja

(U1) Na svakom pravcu postoje dva međusobno suprotna totalna uređaja ($\leq$, $\geq$).

Sada ćemo definirati nekoliko pojmova koji su nam potrebni za iskazivanje sljedećeg aksioma.

Definicija 1.1.2. Skup $\overline{AB} = \{T \in M : A \leq T \leq B\}$ nazivamo **dužina**.

Definicija 1.1.3. **Polupravac** s početnom točkom $O \in M$ koji prolazi kroz $X \in M$ je skup:

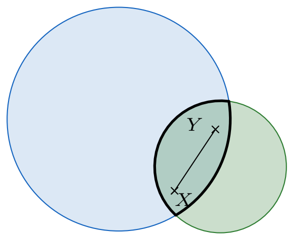
$$Ox := \{T \in M : (O \leq T \leq X) \vee (O \leq X \leq T)\}$$

Polupravac iz O koji prolazi točkom X možemo i označavati na sljedeći način: (OX).

Definicija 1.1.4. Skup $K \subseteq M$ je **konveksan** ako je dužina koja spaja neke dvije njegove točke također sadržana u njemu. Odnosno: $\forall A, B \in K, \overline{AB} \subseteq K$

Bitno je uočiti propoziciju koja daje dodatni smisao definiciji konveksnog skupa.

Propozicija 1.1.1. *Neka je dana proizvoljna familija konveksnih skupova $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ s indeksnim skupom I. Neka je $A = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$. Tada je i A konveksan skup.*



Primjer presjeka dva konveksna skupa

Dokaz. Neka su $X, Y \in A$ proizvoljne točke. Kako su $X, Y \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ vrijedi $X, Y \in A_i, \forall i \in I$.
Kako su A_i konveksni skupovi, vrijedi onda da je $\overline{XY} \subseteq A_i, \forall i \in I \implies \overline{XY} \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} A_i = A$.
Pošto je, za bilo koje točke X i Y iz A i dužina koja ih spaja sadržana u A, prema definiciji konveksnog skupa A je konveksan.

□

Definicija 1.1.5. **Konveksna ljuska** skupa S je presjek svih konveksnih skupova koji sadrže S. Označavamo ju s $\operatorname{conv} S$.

Konveksna ljuska je također i najmanji skup koji sadrži skup S. To je očita posljedica činjenice da je skup $\operatorname{conv} S$ konveksan radi prethodne propozicije, te da je sadržan u svakom konveksnom skupu koji sadrži S.
Uočimo i da je $\operatorname{conv}\{A, B\} = \overline{AB}, \forall A, B \in M$

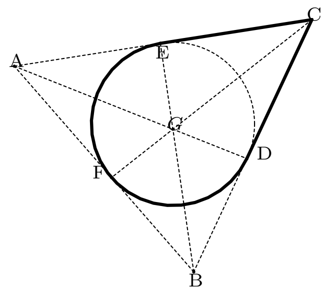
Definicija 1.1.6. **Trokut** $\triangle ABC$ je konveksna ljuska triju nekolinearnih točaka $A, B, C \in M$.

$$\triangle ABC := \operatorname{conv}\{A, B, C\}$$

Sada uvodimo aksiom koji, primjerice, eliminira Fanovu ravninu.

(U2) (**Paschov aksiom**) Ako pravac ne prolazi niti jednim vrhom trokuta i siječe jednu stranicu, onda siječe još barem jednu stranicu tog trokuta.

Paschov aksiom isključuje mogućnost Fanove ravnine. Naime, Fanova ravnina za neki uređaj ne zadovoljava Paschov aksiom.
Konkretno, neka su dani uređaji onako kako su intuitivno prikazani na slici (svaka točka koja je na pravcu sa druge dvije točke je u zadanom uređaju između te dvije točke ako i samo ako je na slici tako). Ostaje još definirati uređaj na pravcu DE. Neka za taj pravac vrijedi $D \leq F \leq E$.



Sada uočimo trokut $\triangle DCE$. Pravac AB ne prolazi niti točkama D, E ili C , presjeca $\overline{DE}$ u točki F, no ne presjeca niti jednu drugu stranicu.

Aksiomi metrike

Sada ćemo definirati metriku na ravnini M. Neka je zadano preslikavanje $d : M \times M \to \mathbb{R}$ za koje vrijede sljedeći aksiomi, uz napomenu da se prvi aksiom nerijetko razdvaja u dva aksioma:

(M1) $d(A, B) \geq 0$ i $d(A, B) = 0 \iff A = B, \forall A, B \in M$

(M2) $d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in M$

(M3) (**Nejednakost trokuta**) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C \in M$ i pritom vrijedi jednakost ako i samo ako $C \in \overline{AB}$.

(M4) Za svaki polupravac s vrhom u $O \in M$ i svaki pozitivni realni broj $x \in \mathbb{R}^+$ postoji jedinstvena točka T na polupravcu takva da je $d(O, T) = x$.

Za točke $A, B \in M$ vrijednost $d(A, B)$ nazivamo **udaljenost** točaka A i B, ili duljinom dužine $\overline{AB}$. Označavamo često i $|AB| := d(A, B)$.
Pojam udaljenosti inspirira uvođenje novog preslikavanja koje *čuva udaljenost*.

Definicija 1.1.7. Neka je dano preslikavanje $f : M \to M$. Kažemo da je f izometrija ravnine ako vrijedi

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B) \qquad \forall A, B \in M$$

Trivijalan primjer izometrije je **identiteta**. Označavamo ju s $1_M : M \to M$ i vrijedi

$$1_M(T) = T \qquad \forall T \in M$$

Uočimo da je izometrija injektivno preslikavanje. Kada bi se dvije različite točke A, B preslikale u istu točku $f(A) = f(B)$, onda bi vrijedilo $d(A, B) = d(f(A), f(B)) = 0$, a $d(A, B) > 0$.

Metrički prostori*

Definicija 1.1.8. **Metrika** na nepraznom skupu X je preslikavanje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tako da $\forall x, y, z \in X$ vrijedi:

I $d(x, y) \geq 0$

II $d(x, y) = 0 \iff x = y$

III $d(x, y) = d(y, x)$

IV $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Metrički prostor je uređeni par (X, d) skupa X i metrike d na X.
Ukoliko umjesto drugog uvjeta vrijedi $x = y \implies d(x, y) = 0$ dobivamo takozvanu **pseudometriku**, a (X, d) je **pseudometrički** prostor.

Primjer 1.1.1. ***Diskretna metrika*** *na X definirana je formulom:*

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ \\ 0, & x = y \end{cases}$$

pa je onda (X, d) ***diskretni metrički prostor****.*

Jedan, nama prihvatljiviji primjer je klasični euklidski prostor.

Primjer 1.1.2. *Promotrimo skup $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. Neka su $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementi $\mathbb{R}^n$. Definirajmo metriku:*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Takva se metrika zove ***euklidska****, a prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ nazivamo n-**dimenzionalni euklidski prostor**.*

Ovaj je metrički prostor vrlo važan i često ćemo se s njime susretati. Primjerice, za $n = 1$ dobivamo prostor $\mathbb{R}$ s metrikom $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Radi se naravno o realnom brojevnom pravcu, a metrika predstavlja naše standardno poimanje udaljenosti dvaju točaka. Detaljnije o metričkim prostorima možete pronaći u [3].

Aksiomi simetrije

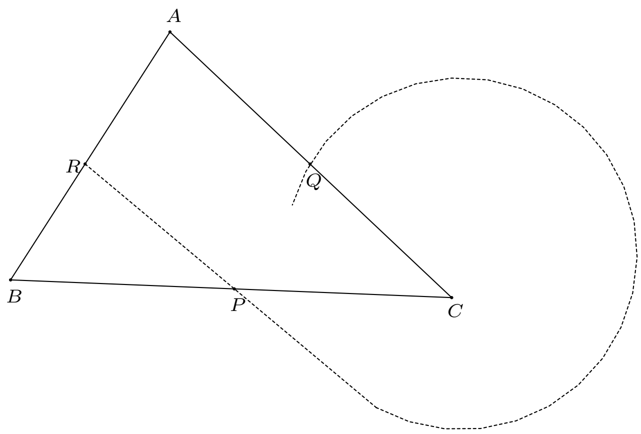
(S1) Za svaki pravac $p \subset M$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$, različita od identitete, za koju vrijedi $s_p(T) = T, \forall T \in p$. Ta se izometrija naziva **osna simetrija** s obzirom na pravac p. Pravac p zovemo **os simetrije**.

(S2) Za svaki par polupravaca iz istog vrha O postoji bar jedan pravac p takav da osna simetrija s obzirom na p preslikava jedan polupravac u drugi.

1.2 Posljedice aksioma uređaja

Propozicija 1.2.1. *Pravac u ravnini koji ne prolazi niti jednim vrhom trokuta $\triangle ABC$ ne siječe sve tri stranice tog trokuta.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $p \subset M$ pravac takav da je $p \cap \overline{BC} = \{P\}, p \cap \overline{CA} = \{Q\}, p \cap \overline{AB} = \{R\}$, te p ne prolazi niti jednim vrhom trokuta, odnosno: $\{A, B, C\} \cap p = \emptyset$. Tada su točke P, Q, R međusobno različite i možemo radi određenosti pretpostaviti da se na pravcu p točka P nalazi između Q i R.



Sada proučimo trokut $\triangle QAR$. Naime, pravac BC siječe stranicu $\overline{QR}$, no niti prolazi vrhovima A, Q, R, niti presjeca dužine $\overline{AR}, \overline{AQ}$. Pravac p ne siječe $\overline{AR}$ jer je R između, A i B na pravcu AB. Presjek dva različita pravca je najviše jedna točka (a pravci AB i p su različiti pošto $B \in AB, B \notin p$). Analogno se pokazuje da BC ne siječe $\overline{AQ}$. Na koncu dobivamo kontradikciju s Paschovim aksiomom za trokut $\triangle QAR$.

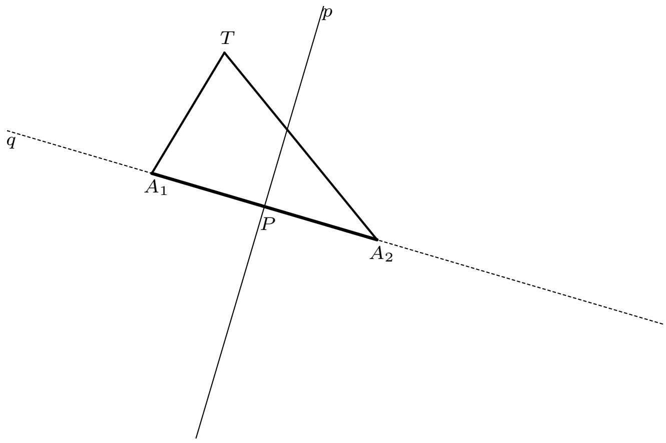
□

Propozicija 1.2.2. *Neka je p neki pravac u ravnini M. Definirajmo binarnu relaciju τ na $M \backslash p$ tako da vrijedi*

$$A \tau B \iff \overline{AB} \cap p = \emptyset, \forall A, B \in M \backslash p$$

Tada je relacija τ relacija ekvivalencije koja dijeli $M \backslash p$ na dvije klase ekvivalencije koje nazivamo ***poluravnine*** *definirane pravcem p.*

Dokaz. Refleksivnost relacije trivijalna je. Pošto $\overline{AB} = \overline{BA}$, dobivamo i simetričnost. Preostaje pokazati tranzitivnost relacije. Neka vrijedi $A\tau B \wedge B\tau C$. Želimo dokazati da to implicira $A\tau C$. Dokazat ćemo tvrdnju pretpostavljajući suprotno. Recimo $A \not\tau C$. Iz definicije relacije zaključujemo da ta tvrdnja znači da p siječe $\overline{AC}$, no prema pretpostavkama ne siječe niti $\overline{AB}$, niti $\overline{BC}$, a pošto A, B, C ne leže na pravcu p, ulazimo u kontradikciju s Paschovim aksiomom za trokut $\triangle ABC$. Dokazali smo dakle da se radi o relaciji ekvivalencije. Preostaje dokazati da se skup $M \backslash p$ dijeli u točno dvije klase.
Konstruirajmo točke $A_1, A_2 \in M \backslash p$ takve da p siječe $\overline{A_1 A_2}$. Uzmimo neku točku $P \in p$ i povucimo proizvoljan pravac q različit od p kroz P. Sada možemo, pomoću aksioma $(M4)$, konstruirati točke A_1, A_2 s različitih strana točke P takve da vrijedi $d(A_1, P) = d(A_2, P) = 1$.



Sasvim očito, $\overline{A_1A_2} \cap p = \{P\}$. Dakle te dvije točke nisu u relaciji. Neka je sada $T \in M \backslash p$ proizvoljna točka ravnine. Ukoliko je T na q ostaje trivijalan slučaj za ispitati. Ako pak T ne leži na q, onda p siječe najviše dvije stranice trokuta $\triangle A_1A_2T$, a kako siječe $\overline{A_1A_2}$, ne siječe $\overline{TA_1}$ ili $\overline{TA_2}$, po prethodnoj propoziciji. Neka je to, bez smanjenja općenitosti A_1, pa vrijedi $T\tau A_1$. To znači da je svaka točka ravnine u relaciji s jednom od konstruirane dvije točke, što znači da uistinu postoje točno dvije klase čiji su reprezentanti A_1 i A_2.

□

Sada ćemo dokazati da je svaki pravac izometričan brojevnom pravcu.
Pravac nazivamo **orijentiranim** ako smo odabrali jedan od dva uređaja na njemu.

Propozicija 1.2.3. *Za svaki orijentirani pravac p i točku $O \in p$ postoji jedinstvena rastuća bijekcija $f : p \to \mathbb{R}$ za koju je $f(O) = 0$ i vrijedi*

$$|f(B) - f(A)| = d(A, B) \qquad \forall A, B \in p$$

Dokaz. Neka su (Ox) i (Ox') polupravci s početkom u O čije točke leže na pravcu p prije, odnosno poslije O, u zadanom uređaju. Definirajmo preslikavanje

$$f(T) = \begin{cases} d(O,T), & T \in (Ox) \\ -d(O,T), & T \in (Ox') \end{cases}$$

Sasvim je jasno da je $f(O) = d(O, O) = 0$. Po slučajevima provjerimo da zaista vrijedi:

$$|f(B) - f(A)| = d(A, B) \qquad \forall A, B \in p$$

Primjerice, kada je $B \in (Ox), A \in (Ox')$, vrijedi

$$|f(A) - f(B)| = |d(A, O) - (-d(B, O))| = d(A, O) + d(B, O)$$

prema nejednakosti trokuta, jer je $O \in \overline{AB}$. Takvo preslikavanje očito zadovoljava uvjete propozicije. Jedinstvenost preslikavanja jednostavno se pokazuje pretpostavljajući suprotno. □

Za proizvoljnu točku T, vrijednost $f(T)$ zove se **apscisa** točke T na orijentiranom pravcu p.

Korolar 1.2.1. *Za svaki par različitih točaka $A, B \in M$ postoji jedinstvena točka C na pravcu AB takva da vrijedi $d(A, C) = d(C, B)$. Ta točka leži između A i B i naziva se* ***polovište dužine*** $\overline{AB}$.

Dokaz. Zbog nejednakosti trokuta sasvim je jasno da se C nalazi između A i B. Ako orijentiramo pravac AB, onda je točka C definirana zbog prethodne propozicije jednakošću.

$$d(A, C) = \frac{1}{2} d(A, B)$$

Primjerice, orijentirajmo pravac tako da je A ishodište, te je polupravac na kojem B leži *pozitivan smjer*. Neka je $b = f(B)$. Pošto je f bijekcija, onda je $C = f^{-1}(\frac{1}{2}b)$ određena točka na pravcu AB i to upravo ona koju tražimo.

□

Spomenimo i slučaj u kojem $A = B$, tada kažemo da je A polovište dužine $\overline{AA}$.

1.3 Osnovna svojstva izometrija

Definicija 1.3.1. Fiksna točka preslikavanja $f : M \to M$ je točka T za koju vrijedi da ju preslikavanje f preslika u samu sebe, odnosno $f(T) = T$.

Ponovimo definiciju osne simetrije navedenu u aksiomu (S1).

Definicija 1.3.2. Osna simetrija s obzirom na pravac p je izometrija ravnine koja nije identiteta, a sve točke pravca p su joj fiksne točke. Označavamo ju s $s_p : M \to M$.

Propozicija 1.3.1. *Svaka izometrija ravnine M preslikava pravac na pravac. Drugim riječima, slika pravca je dio pravca.*

Dokaz. Dokažimo da je izometrična slika pravca ponovo pravac. Neka je dana izometrija, $f : M \to M$, te neka su $A, B, C \in M$ tri kolinearne točke. Neka B leži između A i C. Tada vrijedi $|AC| = |AB| + |BC|$, te zbog svojstva izometrije da očuva udaljenost:

$$|f(A)f(C)| = |f(A)f(B)| + |f(B)f(C)|$$

Zbog nejednakosti trokuta, očito su $f(A), f(B), f(C)$ kolinearne.

□

Dokažimo sada bijektivnost restrikcije na pravac p.

Propozicija 1.3.2. *Restrikcija izometrije na pravac p je bijektivna.*

Dokaz. Neka je $f : M \to M$ izometrija. Nadalje, neka je q pravac takav da je $f(p) \subseteq q$, koji postoji zbog prethodne propozicije. Uzmimo točku $O \in p$. Neka je $O' = f(O)$, po prethodnoj propoziciji $O' \in q$. Pošto je preslikavanje injektivno, preostaje pokazati surjektivnost. Naime, pretpostavimo da ne postoji točka na p koja se slika u točku $T \in Q$. Neka je $r = d(O', T)$. Prema aksiomu (M4) postoje točno dvije točke na pravcu p koje su za r udaljene od O, recimo A i B. Analogno, postoje točno dvije točke koje su na q za r udaljene od O'. Neka su to T i U. Pošto vrijedi $d(A, O) = d(f(A), O') = r = d(B, O) = d(f(B), O')$, zaključujemo da se skup $\{A, B\}$ preslika u $\{T, U\}$, a pošto se radi o injektivnom preslikavanju i konačnom skupu, jedna od točaka A, B se preslika u T što je kontradikcija.

□

Uočimo također da zbog aksioma (M3) izometrija čuva *poredak* točaka, odnosno relaciju "biti između".
Iz navedenih propozicija direktno slijedi teorem:

Teorem 1.3.1. *Svaka izometrija ravnine M preslikava bijektivno pravac na pravac. Također, odaberemo li orijentacije ta dva pravca, preslikavanje je monotono.*

Iz tog teorema proizlazi idući korolar. Jedina neočita točka je (c) koja zapravo proizlazi primjenom razmišljanja iz dokaza da pravac dijeli ravninu na dvije poluravnine. Naime, ako su X i Y u istoj klasi, onda je $p \cap \overline{XY} = \emptyset$. Kada $f(X)$ i $f(Y)$ ne bi bili u istoj klasi nakon preslikavanja, onda bi se preslika dužine $\overline{XY}$ sijekla sa slikom pravca p, odnosno neka točka T bi bila sjecište tih dvaju slika. Onda bi postojala njena praslika $f^{-1}(T)$ koja se nalazi i na pravcu i dužini, što je kontradiktorno s pretpostavkom.

Korolar 1.3.1. *Neka je $f : M \to M$ izometrija. Tada vrijedi:*

(a) Slika dužine $\overline{AB}$ je dužina $\overline{f(A)f(B)}$.

(b) Slika polupravca s početkom u O je polupravac s početkom u $f(O)$.

(c) Slika poluravnine određene pravcem p je poluravnina određena pravcem $f(p)$.

Propozicija 1.3.3. *Neka je $f : M \to M$ izometrija. Tada vrijedi:*

(a) Ako su A i B neke fiksne točke od f, onda je i svaka točka pravca AB fiksna.

(b) Ako je $f(A) = B$ i $f(B) = A$, onda je polovište dužine $\overline{AB}$ fiksna točka.

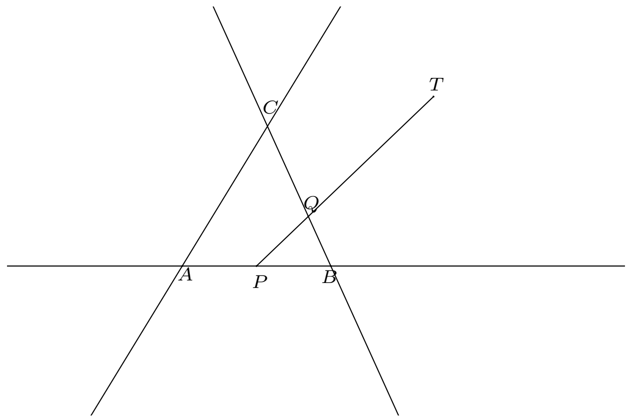
(c) Ako su $A, B, C \in M$ tri nekolinearne fiksne točke od f, preslikavanje f je identiteta.

(d) $s_p = s_q \implies p = q$

Dokaz. (a) Neka je točka T na pravcu AB. Ona je sasvim određena udaljenostima od točaka A i B. To se dade lako provjeriti pretpostavljanjem položaja točke T na pravcu (recimo $A \leq T \leq B$). Neka je (Bx) polupravac na kojem se nalaze točke A i T. Prema prethodnoj propoziciji, slika tog polupravca je isti taj polupravac, pošto je A fiksna točka. Na tom polupravcu postoji jedinstvena točka U udaljena od B za $d(T, B)$, pa je očito $T = U$.

(b) Slično kao u prethodnom dijelu, definirajmo C polovištem $\overline{AB}$. Onda sa sličnim argumentom dobivamo da je dakle polovište $\overline{AB}$ jednako polovištu slike $\overline{f(A)f(B)}$.

(c) Prema tvrdnji (a), sve su točke pravaca AB, BC, CA fiksne točke od f. Neka je sada T neka točka koja ne leži niti na jednom od navedenih pravaca. Želimo dokazati da je i ta točka fiksna. Uzmimo da je točka P polovište dužine $\overline{AB}$. Ukoliko pravac PT ne prolazi niti jednim vrhom trokuta, po Paschovom aksiomu on siječe još barem jednu stranicu u, recimo, točki Q.



Kako je ta točka na nekom od tih pravaca, ona je fiksna. Kako su i P i Q fiksne, onda je prema (a) i $T \in PQ$ fiksna. Ostaje još uočiti slučaj kada pravac TP prolazi vrhom C (ostalim vrhovima ne može jer bi inače bio na pravcu AB što je protivno pretpostavci). U tom slučaju, C je fiksna pa vrijedi isti argument.

(d) Pretpostavimo suprotno: neka su p i q raličiti pravci, no njihove osne simetrije su jednake. Neka su $A, B \in p$ i $C \in q$ točke koje nisu sjecište (ako ono postoji). Onda su te tri točke nekolinearne. Također, kako je s_p osna simetrija, A i B su joj fiksne točke, pa vrijedi $A = s_p(A) = s_q(A)$, te $B = s_p(B) = s_q(B)$. To znači da su i A i B i C fiksne točke preslikavanja s_q što prema (c) daje da je s_q identiteta, što je u direktnoj kontradikciji s definicijom osne simetrije.

□

Propozicija 1.3.4. *Svaka osna simetrija s_p je* ***involucija****, odnosno vrijedi $s_p \circ s_p = 1_M$. Odnosno, s_p je bijekcija koja preslikava poluravnine jednu u drugu i $s_p^{-1} = s_p$.*

Dokaz. Kompozicija izometrija je izometrija, što znači da je i $s_p \circ s_p$ izometrija, i to različita od s_p, jer bi u suprotnom moralo vrijediti $s_p = 1_M$. Možemo zaključiti i da su jedine fiksne točke s_p na pravcu p jer bi u suprotnom zbog (c) dijela prethodne propozicije s_p bila identiteta. Dakle, $s_p \circ s_p$ je izometrija s fiksnim točkama različita od s_p, pa po aksiomu (S1) mora biti identiteta.
Neka je sada $T \notin p$ i $T' = f(T)$, te još $f(T') = T$. Zbog (b) dijela prethodne propozicije, polovište dužine $\overline{TT'}$ je fiksna točka, što znači da leži na pravcu p. Dakle $\overline{TT'} \cap p \neq \emptyset$, što znači da osna simetrija svaku točku neke poluravnine slika u neku točku druge poluravnine. □

Propozicija 1.3.5. *Neka su $A, B \in M, A \neq B$. Tada postoji jedinstveni pravac p tako da vrijedi*

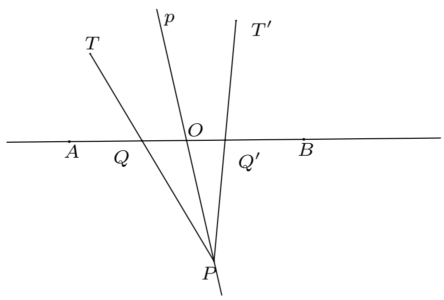
$$s_p(A) = B$$

Dokaz. Egzistencija: Neka je O polovište $\overline{AB}$ i neka Ox i Oy polupravci iz O koji sadrže točke A i B, redom. Sada po aksiomu (S2) postoji pravac p takav da je $s_p(Ox) = Oy$. Pošto je $d(O, A) = d(O, B)$, ta osna simetrija slika A u točku B.

Jedinstvenost: Pretpostavimo da postoje dva takva pravca p i q za koje vrijedi $s_p(A) = B$ i $s_q(A) = B$. Pošto svaka od tih simetrija zamijeni točke A i B, obje za fiksnu točku imaju O. Nadalje promatrajmo kompoziciju $f = s_p \circ s_q$ koja ima fiksne točke A i B, pa su i sve točke na pravcu AB fiksne. Želimo dokazati da je f identiteta.
Kada bi f imala još barem jednu fiksnu točku izvan pravca, bila bi identiteta. Pretpostavimo da nema. Onda je f osna simetrija s obzirom na pravac AB, prema (S1). Dokažimo sada da, ako je $T \in M \backslash AB$, vrijedi da su $T, s_p(T), s_q(T)$ s iste strane ravnine. Uzmimo neku točku P na pravcu p u suprotnoj poluravnini od T. Neka je Q presjek AB i TP. Ta točka postoji jer su P i T sa suprotnih strana AB. Neka je $T' = s_p(T)$, onda je

$$s_p(\overline{TP}) = \overline{s_p(T)s_p(P)} = \overline{T'P}$$

Točka Q se nalazi na $\overline{TP}$ pa je $s_p(Q) \in f(\overline{T'P}) \wedge s_p(Q) \in AB$.



Zadnji argument je baziran na činjenici da smo uzeli s_p takav da preslikava polupravac Ox na Oy. Zaključujemo da $\overline{PT'}$ siječe AB, odnosno P i T' su s različitih strana pravca AB. Znači da su T i T' s iste strane. Uzmimo sada neku točku N na pravcu q. Onda vrijedi:

$$f(N) = s_p(s_q(N)) = s_p(N)$$

Dakle, N i $f(N)$ su s iste strane pravca AB što je kontradikcija s pretpostavkom da je f osna simetrija i prethodnom propozicijom koja tvrdi da svaka simetrija oko nekog pravca preslikava točku koja nije na tom pravcu u neku točku u drugoj poluravnini.
Zaključujemo da je f identiteta, te zbog jedinstvenosti inverzne funkcije, po prethodnoj propoziciji mora vrijediti

$$s_q = s_p^{-1} = s_p \implies p = q$$

Time je tvrdnja dokazana. □

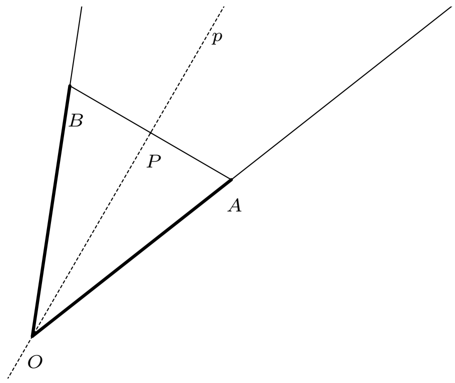
Korolar 1.3.2. *Neka su Ox i Oy dva polupravca sa zajedničkim početkom u O. Tada postoji jedinstveni pravac p takav da je $s_p(Ox) = Oy$. Taj pravac prolazi vrhom O i zove se* ***simetrala polupravaca*** *Ox i Oy.*

Dokaz. Egzistencija: Aksiom (S2).

Jedinstvenost: Neka je p jedan takav pravac. Za osnu simetriju s obzirom na njega vrijedi:

$$s_p(Ox) = Oy \implies s_p(O) = O \implies O \in p$$

Uzmimo sada točke $A \in Ox$ i $B \in Oy$ takve da je $d(O, A) = d(O, B) > 0$. Pošto je osna simetrija izometrija, vrijedi $s_p(A) = B$.



Kada bi vrijedila jednakost $A = B$, onda bi ti polupravci bili jednaki, A fiksna točka od s_p, pa bi $p = OA$ bio traženi, jedinstveni, pravac simetrije.

U slučaju $A \neq B$ pravac p je os simetrije koja zamjenjuje A i B pa je on po prethodnoj propoziciji jedinstven. □

Teorem 1.3.2. *Neka su $A, B \in M, A \neq B$. Skup točaka u ravnini M jednako udaljenih od A i od B je os jedinstvene osne simetrije koja zamjenjuje A i B. Taj pravac se naziva **simetrala dužine** $\overline{AB}$.*

Dokaz. Neka je p os simetrije takve osne simetrije s_p za koju vrijedi $s_p(A) = B$. Ako je $T \in p$ tada je T fiksna točka izometrije pa vrijedi

$$d(T, A) = d(f(T), f(A)) = d(T, B)$$

Dokažimo sada drugi smjer. Neka je T neka točka za koju vrijedi $d(T, A) = d(T, B)$. Uzmimo onda polupravce Tx i Ty koji sadrže A i B, redom. Prema prethodnom korolaru postoji jedinstvena simetrija s_q oko nekog pravca q koja preslikava Tx u Ty, te $T \in q$. Onda $s_q(A) = B$, a vrijedi da je $p = q \implies T \in p$. □

Definicija 1.3.3. Kažemo da je pravac q **okomit** ili **ortogonalan** na pravac p i to označavamo s $q \perp p$, ako je $q \neq p$ i vrijedi $s_q(p) = p$.

Teorem 1.3.3. *Relacija ortogonalnosti je simetrična.* $q \perp p \implies p \perp q$. *Također, p i q se sijeku.*

Dokaz. Neka je $A \in p$ takva da $A \notin q$. Tada $s_q(p) = p$ implicira da je točka $B = s_q(A)$ na pravcu p, različita od A. Neka je O polovište dužine $\overline{AB}$. O je, dakle, fiksna točka od s_q, pa je $O \in q$. Znači da p i q imaju neprazan presjek i to je točka O. Također, q je simetrala dužine $\overline{AB}$. Dakle q je skup točaka jednako udaljenih od A i od B. To znači, preslikamo li ravninu preko p, vrijedi $s_p(A) = A$, $s_p(B) = B$. Kako su sve udaljenosti očuvane,

$$d(X, A) = d(X, B) \implies d(s_p(X), A) = d(s_p(X), B) \qquad \forall X \in q$$

Vidimo da su i točke iz skupa $s_p(q)$ jednako udaljene od A i od B pa zaključujemo $s_p(q) = q$. Na koncu,

$$q \perp p \implies p \perp q$$

□

Jednostavna posljedica dokaza tog teorema jest činjenica da je simetrala dužine $\overline{AB}$ okomica na pravac AB koja prolazi polovištem dužine $\overline{AB}$.

Propozicija 1.3.6. *Neka je p pravac i* $A \in M$ *bilo koja točka u ravnini. Tada postoji točno jedan pravac kroz A okomit na p.*

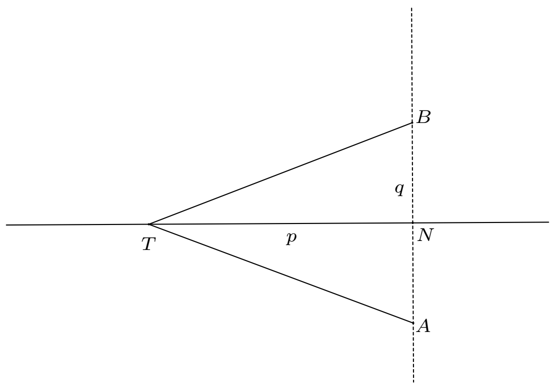
Dokaz. Dokaz provodimo u dva slučaja:
Prvi slučaj: $A \notin p$ Neka je sada $B = s_p(A)$. Ako je traženi pravac okomit na p, onda je i p okomit na traženi pravac, što znači da mora prolaziti i točkom B, pa za pravac $q = AB$ vrijedi $s_p(q) = q$, dakle $q \perp p$. Jedinstvenost je određena činjenicom da taj pravac mora prolaziti točkama A i B koje su različite pošto su na različitim poluravninama.
Drugi slučaj: $A \in p$ Okomica u A je dakle jedinstveni pravac koji je simetrala polupravaca na p s početkom u A. □

Pošto je pravac koji prolazi danom točkom A i okomit je na zadani pravac p jedinstven i sjecište p i okomice iz A je jedinstveno i dobro definirano pa ga možemo zvati **nožište okomice** iz A

Propozicija 1.3.7. *Neka je A točka izvan pravca p i N nožište okomice iz A na p. Tada vrijedi:*

$$d(A, T) \geq d(A, N) \qquad \forall T \in p$$

Dokaz. Neka je q okomica iz A na p, te točka $B \in q$ takva da je $s_p(A) = B$. Pošto je N nožište okomice, a pravac p je okomit na q kada $s_p(q) = q$, zaključujemo $AB \cap p = \{N\}$.



Tada s_p preslika N u N pa vrijedi:

$$d(A,N) = d(s_p(A), s_p(N)) = d(B,N)$$

Dakle, za neku točku T na p vrijedi:

$$2d(A,T) = d(A,T) + d(A,T) = d(A,T) + d(s_p(A), s_p(T)) = d(A,T) + d(B,T)$$

Prema nejednakosti trokuta vrijedi:

$$d(A,T) + d(B,T) \geq d(A,B) = d(A,N) + d(B,N) = 2d(A,N)$$

Sada konačno dobivamo

$$2d(A,T) \geq 2d(A,N) \iff d(A,T) \geq d(A,N)$$

za svakuu točku T na pravcu p.

□

Teorem 1.3.4. ***(Osnovni teorem o izometrijama)*** *Svaka izometrija $f : M \to M$ je kompozicija najviše tri osne simetrije.*

Dokaz. Rastavit ćemo dokaz na nekoliko slučajeva:

Prvi slučaj: $f = 1_M$
Za svaki pravac $p \subset M$ vrijedi $s_p \circ s_p = 1_M$, pa je f kompozicija dvije simetrije.

Drugi slučaj: $f \neq 1_M$
To znači da postoji $A \in M, A' = f(A) \neq A$. Neka je sada pravac a simetrala $\overline{AA'}$. Tada izometrija $g = s_a \circ f$ ima svojstvo

$$g(A) = s_a(f(A)) = s_a(A') = A$$

tojest A je fiksna točka od g. Sada imamo dva nova slučaja.

I Ako je $g = 1_M$, onda $g(T) = s_a \circ f(T) = T, \forall T \in M \implies f = s_a^{-1}$

II Neka $g \neq 1_M$. Tada postoji točka $B \in M$ takva da postoji $B' = g(B) \neq B$. Promotrimo sada simetralu b dužine $\overline{BB'}$. Izometrije čuvaju udaljenosti pa vrijedi:

$$d(A,B) = d(g(A), g(B)) = d(A,B')$$

To znači da se točka A nalazi na simtrali dužine $\overline{BB'}$, odnosno na pravcu b. Proučimo sada izometriju $h = s_b \circ g$. Vrijedi:

$$h(A) = s_b(g(A)) = s_b(A) = A$$

$$h(B) = s_b(g(B)) = s_b(B') = B$$

Pošto su i A i B fiksne točke od h, onda isto vrijedi za svaku točku pravca $c = AB$. Sada preostaju još dvije mogućnosti, shodno aksiomu (S1). Jedna je $h = 1_M$, te tada vrijedi

$$s_b \circ s_a \circ f = 1_M \implies f = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} = s_a \circ s_b$$

Druga je mogućnost da je $h = s_c$ pa vrijedi

$$s_b \circ s_a \circ f = s_c \implies f = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} \circ s_c = s_a \circ s_b \circ s_c$$

□

Korolar 1.3.3. *Svaka izometrija ravnine je bijekcija ravnine na samu sebe.*

Dokaz. Kompozicija konačno mnogo bijekcija je opet bijekcija, a sve osne simetrije su bijekcije. □

Korolar 1.3.4. *Ako je $f : M \to M$ izometrija, onda je i $f^{-1} : M \to M$ izometrija.*

Dokaz. Rastavimo dokaz na slučajeve.

I $f = 1_M \implies f^{-1} = f = 1_M$

II $f = s_a \implies f^{-1} = s_a^{-1} = s_a$

III $f = s_b \circ s_a \implies f^{-1} = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} = s_a \circ s_b$

IV $f = s_c \circ s_b \circ s_a \implies f^{-1} = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} \circ s_c^{-1} = s_a \circ s_b \circ s_c$

To su, prema osnovnom teoremu o izometrijama, svi slučajevi, te je u svakom slučaju f^{-1} također izometrija. □

Korolar 1.3.5. *Ako se dvije izometrije podudaraju u tri nekolinearne točke, onda su jednake.*

Dokaz. Neka su dane izometrije $f, g : M \to M$ koje se podudaraju u točkama $A, B, C \in M$. Neka je sada $h = g^{-1} \circ f$. g^{-1} je, prema prethodnom korolaru, izometrija. Onda je i h, kao kompozicija izometrija, također izometrija. Vrijedi, koristeći $f(A) = g(A)$

$$h(A) = g^{-1}(f(A)) = g^{-1}(g(A)) = A$$

Analogno, $h(B) = B, h(C) = C$. Sada po 1.3.3 vrijedi da je $h = 1_M$. To znači $g^{-1}(f(T)) = T, \forall T \in M$. Sada možemo djelovati s g na tu jednakost i dobivamo:

$$\left[g(g^{-1}(f(T))) = g(T) \iff f(T) = g(T), \forall T \in M\right] \implies f = g$$

□

Iz ovog korolara slijedi da je svaka izometrija $f : M \to M$ jedinstveno određena preko dvije uređene trojke točaka, (A, B, C) i $(f(A), f(B), f(C))$ od kojih nijedna nije kolinearna.

Propozicija 1.3.8. *Neka su dane dvije uređene trojke nekolinearnih točaka A, B, C i A', B', C' takve da vrijedi:*

$$|AB| = |A'B'|$$
$$|AC| = |A'C'|$$
$$|BC| = |B'C'|$$

Tada postoji jedinstvena izometrija koja preslikava A, B, C u A', B', C', redom.

Dokaz. Uzmimo izometriju $g : M \to M$ za koju vrijedi: $g(A) = A', g(B) = B'$. Ta izometrija preslikava svaku poluravninu određenu pravcem AB u poluravninu određenu s $A'B'$. Neka je sada $g(C) = C''$. Dokažimo $C' = C''$. Pretpostavimo suprotno, $C' \neq C''$:

Slučaj 1: Neka su C' i C'' u istoj poluravnini s obzirom na $A'B'$. Neka je točka O polovište dužine $\overline{C'C''}$.
Kako je $|A'C'| = |AC| = |A'C''|$, zaključujemo da se A' nalazi na simetrali $\overline{C'C''}$, odnosno $A'O \perp C'C''$. Analogno se dobiva da je $B'O \perp C'C''$. Imamo dakle dva podslučaja: ili je $C' = C''$, pa smo gotovi, ili je $O \in A'B'$, no onda bi C i C'' bile u različitim poluravninama s obzirom na pravac $A'B'$. Stoga ulazimo u kontradikciju s pretpostavkom, što znači da je g tražena izometrija.

Slučaj 2: Ako su C' i C'' u različitim poluravninama, komponirajmo sada izometriju $f = s_{A'B'} \circ g$. Sada vrijedi $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = s_{A'B'}(C')$, pa sada imamo C' i C'' s iste strane pravca $A'B'$, pa se pozivamo na prvi slučaj, te je f tražena izometrija.

Kako je definirana na tri nekolinearne točke, takva je izometrija po korolaru 1.3.5 jedinstvena. □

Skup svih izometrija ravnine opskrbljen operacijom komponiranja čine grupu koja se označava sa $\text{Iso}(M)$. Ta grupa nije komutativna.

1.4 Rotacije

Sada ćemo proučavati idući tip izometrija. Dok je osna simetrija izometrija kojoj se sve fiksne točke nalaze na pravcu, proučavamo izometrije koje imaju točno jednu fiksnu točku. Također, nadalje ćemo koristiti notaciju $|AB| = d(A, B), \forall A, B \in M$.

Definicija 1.4.1. Rotacija s centrom O (ili oko O) je izometrija ravnine M, čija je jedina fiksna točka O, ili su sve točke fiksne, odnosno radi se o identiteti.

Teorem 1.4.1. *Neka su $p, p' \subset M$ dva pravca u ravnini M koji se sijeku u točki O. Tada je kompozicija $r = s_p \circ s_{p'}$ rotacija oko O.*
Vrijedi i obrat, za svaku rotaciju $r : M \to M$ oko točke $O \in M$ i svaki pravac p kroz O postoje pravci $p', p'' \subset M$ koji prolaze kroz O takvi da je $s_{p'} \circ s_p = s_p \circ s_{p''} = r$.

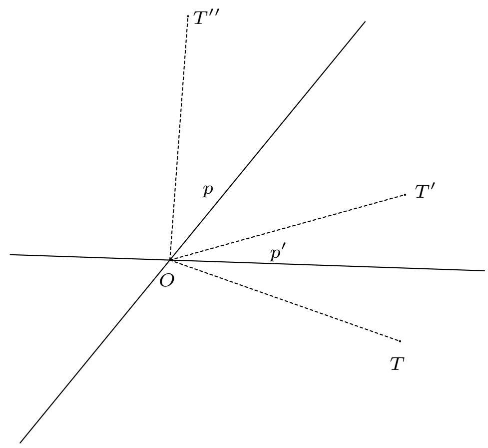
Dokaz. Dokažimo prvo prvu tvrdnju. Neka je $r = s_p \circ s_{p'}$. r je izometrija, pošto je kompozicija izometrija, te je O očito jedna od fiksnih točaka. Pretpostavimo sada da je A još jedna fiksna točka od r, $A \neq O$. Tada vrijedi:

$$s_p(A) = s_p(r(A)) = s_p(s_p(s_{p'}(A))) = s_{p'}(A)$$

Neka je točka $B = s_p(A) = s_{p'}(A)$. Onda vrijedi i $s_p(B) = s_p(s_p(A)) = A$. Prema propoziciji 1.3.5 zaključujemo da vrijedi jedno od sljedećeg.

1. $A = B$
2. $p = p'$

Prvi slučaj implicira da je $A \in p \cap p'$, jer su jedine fiksne točke osnih simetrija na upravo tim pravcima. To znači da je $p = p' = AO$, pošto $A \neq O$. Dakle $s_p \circ s_{p'} = s_p \circ s_p = 1_M$. Drugi slučaj daje identitetu sličnim argumentom. Na sljedećoj skici možemo vidjeti prikaz rotacije oko O kao kompoziciju $s_p \circ s_{p'}$.



Dokažimo sada drugu tvrdnju.
Ako je $r = 1_M$ onda $p' = p'' = p$ daje traženu jednakost. Dakle, neka $r \neq 1_M$. To znači da je O jedina fiksna točka preslikavanja r. Uzmimo sada $A \in p \backslash \{O\}$ i točku $B = r(A)$. Tada vrijedi

$$|OA| = |r(O)r(A)| = |OB|$$

pa je O jednako udaljena i od A i od B. Prema 1.3.2 postoji jedinstveni pravac p' koji zamjenjuje A i B, te je simetrala $\overline{AB}$ pa je $O \in p'$. Kompozicija $h = s_{p'} \circ r$ je izometrija od M različita od identitete, jer bi inače bilo $s_{p'} = r$ što je u kontradikciji s činjenicom da rotacija nikad nije osna simetrija. Nadalje, kompozicija h ima dvije fiksne točke:

$$h(A) = s_{p'}(r(A)) = s_{p'}(B) = A$$

$$h(O) = s_{p'}(r(O)) = s_{p'}(O) = O$$

To znači da je su sve točke na pravcu $p = AO$ fiksne točke od h, što znači da je, pošto nije identiteta, izometrija h osna simetrija s obzirom na pravac p. Dakle,

$$s_{p'} \circ r = s_p \implies r = s_{p'} \circ s_p$$

Kako je r izometrija, po 1.3.4 vrijedi da je r^{-1} također izometrija, te ima jednako fiksnih točaka kao i r, pa je također rotacija. Analogno, postoji p'' takav da je

$$r^{-1} = s_{p''} \circ s_p \implies r = s_p \circ s_{p''}$$

□

Neposredna posljedica teorema koja se dobiva djelujući rotacijom s_p na jednakost iz teorema:

Korolar 1.4.1. *Neka je $r : M \to M$ rotacija s centrom O, a $p \subset M$ pravac koji prolazi kroz O. Tada su $s_p \circ r$ i $r \circ s_p$ osne simetrije s osima kroz O.*

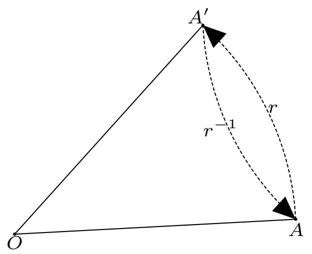
Korolar 1.4.2. *Za svaki par polupravaca s istim ishodištem (Ox, Oy) postoji jedinstvena rotacija r s centrom O za koju je $r(Ox) = Oy$.*

Dokaz. Neka je s_p osna simetrija obzirom na pravac p na kojem leži polupravac Ox. Postoji rotacija r oko O koja slika Ox u Oy ako i samo ako je izometrija $r \circ s_p$ neka osna simetrija s' koja zamjenjuje Ox i Oy, što postoji jer se radi o simetrali polupravaca, pa je direktno iz prethodnog teorema

$$r = s' \circ s_p$$

□

Korolar 1.4.3. *Ako je r rotacija oko O onda je i r^{-1} rotacija oko O.*



To znači da skup svih rotacija ravnine oko O opskrbljen operacijom komponiranja čini grupu.

1.5 Centralna simetrija

Definicija 1.5.1. Neka je $O \in M$ neka točka u ravnini. **Centralna simetrija** $s_O : M \to M$ je preslikavanje definirano tako da, ako $T' = s_O(T)$, onda je O polovište $\overline{TT'}$, za bilo koju točku T.

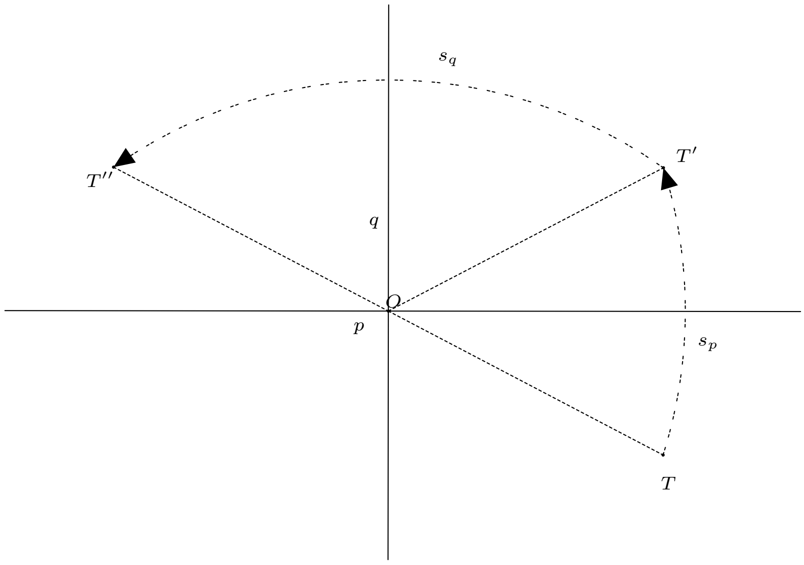
Pokažimo da je centralna simetrija izometrija, dakle i bijekcija. Iako nije sasvim očito, iz definicije, centralna simetrija je rotacija oko točke O, o čemu govori sljedeći teorem:

Teorem 1.5.1. *Centralna simetrija s_O s centrom O je kompozicija $s_p \circ s_q$ dviju osnih simetrija sa bilo kojim okomitim osima p i q koje se sijeku u O. Vrijedi i $s_p \circ s_q = s_q \circ s_p$.*

Dokaz. Neka su p i q okomiti pravci kroz O. Pokažimo prvo da osne simetrije okomitih pravaca komutiraju i da im je kompozicija $r = s_p \circ s_q$ rotacija takva da $r \circ r = 1_M$. Uzmimo neku točku $A \in q \backslash \{O\}$. Onda njena preslika po s_p, točka $B = s_p(A)$, leži na q zbog okomitosti pravaca. Stoga vrijedi

$$r(A) = (s_q \circ s_p)(A) = s_q(B) = B$$
$$r^{-1}(A) = (s_p \circ s_q)(A) = s_p(A) = B$$

Zbog jedinstvenosti rotacije koja preslikava polupravac u polupravac (konkretno ovdje dva polupravca pravca q s ishodištem u O) zaključujemo da je $r = r^{-1}$, odnosno $s_p \circ s_q = s_q \circ s_p$, što implicira da je $r \circ r = 1_M$. Također, $q \neq p$ pa je O jedina fiksna točka preslikavanja r.

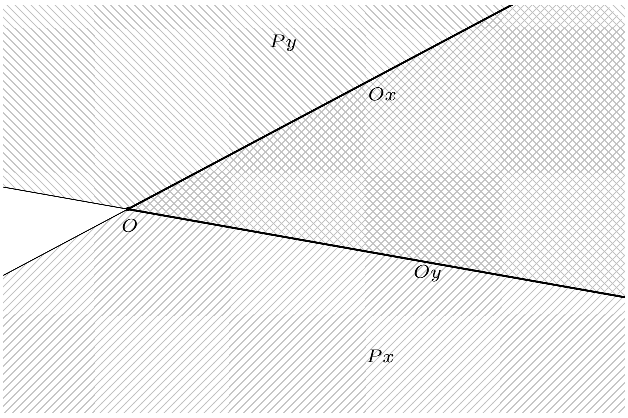


Preostaje dokazati da je r zaista centralna simetrija. Dovoljno je pokazati da za proizvoljnu točku $T \in M$ i $T' = r(T)$ vrijedi da je polovište $\overline{TT'}$ točka O. To vrijedi po propoziciji 1.3.3 koja tvrdi da je, pošto je $r(T) = T'$ i $r(T') = r(r(T)) = T$, polovište dužine $\overline{TT'}$ fiksna točka preslikavanja r čija je jedina fiksna točka O. $\square$

1.6 Kutovi

U daljnjem tekstu ćemo za poluravnine govoriti da ih **omeđuje** pravac p s obzirom na koji je definirana relacija τ u propoziciji 1.2.2. Također, dva su polupravca komplementarna ako u uniji čine pravac.

Definicija 1.6.1. Neka je (Ox, Oy) uređeni par polupravaca koji ne leže ne istom pravcu sa zajedničkim vrhom O. **Otvoreni kutni isječak** je presjek poluravnine P_x koja sadrži Oy i omeđena je pravcem na kojem leži Ox, te pouravnine P_y koja sadrži Ox i omeđena je pravcem na kojem leži O_y.



Definicija 1.6.2. **Zatvorena poluravnina** je unija poluravnine i pripradnog pravca koji ju omeđuje.

Definicija 1.6.3. Neka je $(Ox), (Oy)$ uređeni par polupravaca koji ne leže ne istom pravcu sa zajedničkim vrhom O. **Zatvoreni kutni isječak** je presjek zatvorene poluravnine P_x koja sadrži Oy i omeđena je pravcem na kojem leži Ox, te zatvorene pouravnine P_y koja sadrži Ox i omeđena je pravcem na kojem leži O_y.

Definicija 1.6.4. Dva para $(Ox, Oy), (O'x', O'y')$ polupravaca u ravnini M se nazivaju **kongruentni** (označavat ćemo s $\equiv$) ako postoji izometrija f ravnine M takva da je

$$f(Ox) = O'x', f(Oy) = O'y'$$

Propozicija 1.6.1. *Relacija kongruencije među uređenim parovima polupravaca iz iste točke je relacija ekvivalencije.*

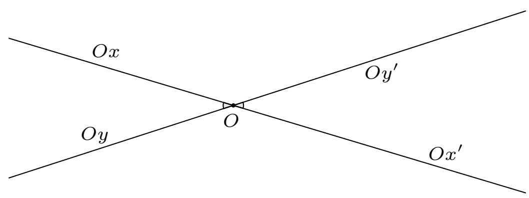
Dokaz.

- Uzmimo izometriju 1_M. Onda za par (Ox, Oy) vrijedi $1_M(Ox) = Ox, 1_M(Oy) = Oy$ pa je dakle $(Ox, Oy) \equiv (Ox, Oy)$.
- Možemo uzeti pravac p, simetralu polupravaca Ox i Oy , zahvaljujući korolaru 1.3.2, te za simetriju s_p oko p vrijedi
$$s_p(Ox) = Oy, s_p(Oy) = Ox$$
Dakle $(Ox, Oy) \equiv (Oy, Ox)$, relacija je simetrična.
- Neka su dani parovi polupravaca $(Ox, Oy), (Ox_1, Oy_1), (Ox_2, Oy_2)$. Nadalje, neka vrijedi:
$$(Ox, Oy) \equiv (Ox_1, Oy_1), \qquad (Ox_1, Oy_1) \equiv (Ox_2, Oy_2)$$
To znači da postoje izometrije $f, g : M \to M$ takve da vrijedi f prvi par preslikava u drugi, a g preslikava drugi u treći par. Onda vrijedi,
$$g \circ f(Ox) = g(f(Ox)) = g(Ox_1) = Ox_2$$
$$g \circ f(Oy) = g(f(Oy)) = g(Oy_1) = Oy_2$$
To znači da je kompozicija $g \circ f$ izometrija koja prvi par preslika u treći, odnosno $(Ox, Oy) \equiv (Ox_2, Oy_2)$. Relacija je, dakle tranzitivna.

$\square$

Pošto je kongruencija relacija ekvivalencije, ona dijeli skup uređenih parova polupravaca u klase. Te se klase nazivaju **neorijentirani kutovi**. Klasa čiji je reprezentant uređeni par (Ox, Oy) označava se kao $\sphericalangle xOy$.

Ako se polupravci Ox i Oy podudaraju, klasa $\sphericalangle xOy$ se naziva **nul-kut**. Ako su ti polupravci komplementarni onda se klasa naziva **ispružen kut**. Nul-kut se obilježava s 0, a ispružen ćemo označavati s ω.
Ranije smo već argumentirali da je $\sphericalangle xOy = \sphericalangle yOx$. Također, ako su (Ox, Ox') i (Oy, Oy') dva para komplementarnih pravaca, onda vrijedi: $\sphericalangle x'Oy' = \sphericalangle xOy$.



Jasno je da se radi o tvrdnji koja nam je poznata pod nazivom *jednakost vršnih kutova*, a argumentacija te tvrdnje leži u činjenici da centralna simetrija $s : M \to M$ oko točke O preslikava Ox u Ox' i Oy u Oy'.

Propozicija 1.6.2. *Neka je dan polupravac Ox i zatvorena poluravnina P omeđena pravcem na kojem taj polupravac leži. Tada za svaki kut α postoji točno jedan reprezentant oblika (Ox, Oy), pri čemu $Oy \subset P$.*

Dokaz. Tvrdnja je trivijalna za $\alpha = 0$ i $\alpha = \omega$, pa ćemo pretpostaviti $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq \omega$.

Egzistencija. Pretpostavimo da je jedan reprezentant klase α kut $\sphericalangle uAv$. Dokažimo sada da iz točke O izlazi polupravac $Oy \subset P$ takav da $\sphericalangle xOy = \sphericalangle uAv$. Neka je p simetrala dužine $\overline{OA}$. Dakle, s_p je osna simetrija koja preslikava točku A u O. Neka je sada $Ou_1 = s_p(Au)$ i $Ov_1 = s_p(Av)$. Pošto Ou_1 i Ox imaju zajedničko ishodište O, postoji simetrala tih polupravaca po propoziciji 1.3.2. Nazovimo tu simetralu q. Znamo da je q os simetrije $s_q : M \to M$ koja preslikava jedan polupravac u drugi, te $Ov_1 = s_q(Av)$. Dakle

$$s_q \circ s_p(Au) = s_q(Ou_1) = Ox$$

$$s_q \circ s_p(Av) = s_q(Ov_1) = Ov_2$$

Sada, ukoliko je $Ov_2 \subset P$, onda smo gotovi. U suprotnom uzmimo osnu simetriju $s_r : M \to M$ preko pravca r na kojem leži polupravac Ox. Tada $s_r(Ov_2) = Ov_3$, a Ov_3 zadovoljava sve tražene uvjete. Kompozicija $s_r \circ s_q \circ s_p$ tada je izometrija koja preslikava $\sphericalangle uAv$ u $\sphericalangle xOv_3$.

Jedinstvenost: Pretpostavimo da je $\sphericalangle xOy = \sphericalangle xOz$, te $Oy \neq Oz$. Tada postoji izometrija $f : M \to M$ takva da $f(Ox) = Ox$ i $f(Oy) = Oz$. Kako se polupravac Ox slika sam u sebe, onda se i cio pravac p na kojem leži taj polupravac slika sam u sebe. Dakle, postoje dvije mogućnosti: $f = 1_M$ ili $f = s_p$, gdje je $s_p : M \to M$ osna simetrija s obzirom na p. U prvom slučaju očito $f(Oy) = Oz \implies Oy = Oz$, što nas navodi na kontradikciju. U drugom slučaju, po propoziciji 1.3.4 f preslikava jednu poluravninu u drugu, no Oy i Oz su po pretpostavci u istoj poluravnini što znači da nije moguće $f(Oy) = Oz$. Time smo dokazali jedinstvenost. □

Korolar 1.6.1. *Postoji jedinstveni polupravac Oy koji je okomit na Ox i leži u poluravnini P. Klasa koja se tako dobiva $\sphericalangle xOy$ se naziva* ***pravi kut*** *i označavat ćemo ju s δ.*

Relacija uređaja među kutovima

Odaberimo sada neki polupravac Ox i zatvorenu poluravninu omeđenu pravcem na kojem leži Ox. Neka je sada $\alpha = \sphericalangle xOy$, gdje je $Oy \subset P$. Tada kutu α pridružimo zatvoreni kutni isječak S_α koji je omeđen s Oy i Ox. Po definiciji stavimo $S_\alpha = P \iff \alpha = \omega$ te stavimo $S_\alpha = Ox \iff \alpha = 0$.

Neka je $\mathcal{K}$ skup svih neorijentiranih kutova. Definiramo relaciju uređaja na $\mathcal{K}$ na sljedeći način:

$$\alpha \leq \beta :\iff S_\alpha \subseteq S_\beta$$

Sasvim je jasno da je puni kut veći ili jednak od svakog drugog kuta. Također, nul-kut je manji ili jednak od svakog drugog kuta. Nadalje, uočimo da je su svake dvije klase usporedive pošto po propoziciji 1.6.2 možemo uzeti dva reprezentanta nad istim polupravcem.

Propozicija 1.6.3. *Relacija $\leq$ je relacija totalnog uređaja na skupu $\mathcal{K}$.*

Dokaz ove propozicije nije potreban u ovom materijalu i može se naći u [1].

Zbrajanje i mjerenje kutova

Definicija 1.6.5. Kut γ je zbroj kuteva α i β, pišemo $\gamma = \alpha + \beta$, kada postoje polupravci Ox, Oy, Oz takvi da vrijedi $\sphericalangle xOy = \alpha, \sphericalangle yOz = \beta, \sphericalangle xOz = \gamma$, te vrijedi $S_\gamma = S_\alpha \cup S_\beta$. Ekvivalentan zapis je i

$$\alpha = \gamma - \beta, \beta = \gamma - \alpha$$

Ako je $\alpha + \beta = \omega$ kažemo da je α **suplement** od β. Također, definirajmo da je

$$n\alpha = \overbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}^{n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Definicija 1.6.6. **Mjera** neorijentiranih kuteva je strogo rastuća funkcija $\phi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^+$ za koju vrijedi:

$$\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$$

za sve α i β za koje je suma definirana.

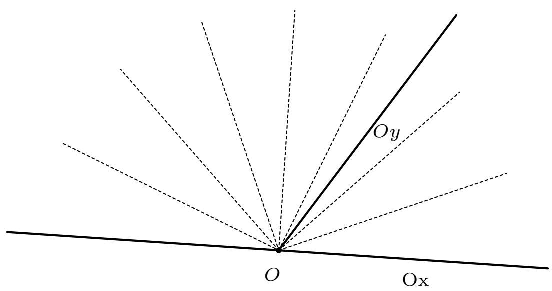
Teorem 1.6.1. *Za svaki realni broj $s > 0$ postoji jedinstvena mjera $\phi : \mathcal{K} \to [0, s]$ takva da je $\phi(0) = 0$ i $\phi(\omega) = s$ i da ϕ bijektivno preslikava $\mathcal{K}$ na $[0, s]$.*

Skica dokaza: Simetrala polupravaca dijeli kut na dva jednaka dijela. Naime, osna simetrija s obzirom na tu simetralu je tražena izometrija za dokazivanje jednakosti dva kuta. To znači da $\forall n \in \mathbb{N}$ postoji kut α takav da je $2^n\alpha = \omega$. Tvrdnja se dobiva indukcijom dijeleći kuteve na pola simetralama. Sada se za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$ pokazuje sljedeća tvrdnja:

Lema 1.6.1. *Za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ i svaki kut $\alpha \in \mathcal{K}$ postoji cijeli $\exists q_n \in \mathbb{N}_0$ takav da:*

$$q_n 2^{-n}\omega \le \alpha < (q_n + 1)2^{-n}\omega$$

Ova lema se jednostavno pokaže podjelom kuta polupravcima na 2^n jednakih isječaka pomoću ranije objašnjenog postupka. Potom polupravac koji određuje naš kut smještamo među neka dva polupravca. Pošto ω pokriva cijelu poluravninu, a polupravac Oy ne može biti u dva odsječka istovremeno, nalaziti će se između neka dva polupravca.



Budući da je $\phi(\omega) = s$, imamo

$$\phi(\frac{\omega}{2}) + \phi(\frac{\omega}{2}) = \phi(\omega) = s \implies \phi(\frac{\omega}{2}) = \frac{s}{2}$$

Induktivno možemo dobiti $\phi(\frac{\omega}{2^n}) = \frac{s}{2^n}$. Dakle $\phi(\omega) > \phi(\frac{\omega}{2}) > \phi(\frac{\omega}{2^2}) > \dots$
Neka je sada α neki kut izuzev nul-kuta i punog kuta.
Definirajmo sada $a_n = 2^{-n}q_n$ i $A_n = 2^{-n}(q_n + 1)$. To su dvije ograde takve da

$$a_n\omega \le \alpha < A_n\omega$$

Iz monotonosti i aditivnosti funkcije dobivamo:

$$\phi(a_n\omega) \le \phi(\alpha) < \phi(A_n\omega) \implies q_n\phi(2^{-n}\omega) \le \phi(\alpha) < (q_n + 1)\phi(2^{-n}\omega)$$

$$\implies q_n\frac{s}{2^n} \le \phi(\alpha) < (q_n + 1)\frac{s}{2^n}$$

Vidimo da $\lim_{n\to\infty} |A_n - a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Radi se zapravo aproksimaciji u binarnoj bazi, sličnoj onoj dekadskoj opisanoj u [4] u odjeljku 1.1.3.
Niz (a_n) je monoton, pošto u svakom koraku približavamo donju ogradu traženom kutu. Tada a_n konvergira. Analogno i (A_n) konvergira. Oba niza konvergiraju u $\phi(\alpha)$, pa je on jedinstveno određen polupravcem.

Uobičajeno se uzima $s = \pi$ što daje mjeru kuta u radijanima ili $s = 180$ što daje mjeru kuta u stupnjevima. Mi ćemo, počevši od trećeg poglavlja, uzimati $s = \pi$.

Definicija 1.6.7. Kut s mjerom između 0 i $\frac{s}{2}$ zovemo **šiljasti kut**, a kut s mjerom između $\frac{s}{2}$ i s nazivamo **tupi kut**.

Definicija 1.6.8. Za kut $\sphericalangle xOy$ efiniramo **izbočeni kut** kao

$$()M \backslash S_{\sphericalangle xOy}) \cup Ox \cup Oy$$

Te mjeru izbočenog kuta definiramo kao $2\phi(\omega) - \phi(\sphericalangle xOy)$. Kut i njegov pripadajući izbočeni kut nazivamo **eksplementarnim kutovima**.

Dogovorno postoji i takozvani **puni kut** kojemu je mjera $\phi(2\omega)$, te smatramo da je zbroj dvaju eksplementarnih kuteva jednaka punom kutu.

Paralelni pravci

U ovoj digresiji proučit ćemo uvjete da se neki pravci ne sijeku i dokazati postojanje takvih parova pravaca.

Definicija 1.6.9. Neka su p i q pravci koji se ne sijeku ili vrijedi $p = q$. Onda kažemo da su **paralelni**. Zapisujemo: $p \parallel q$

Prije svega, uočimo da nije besmisleno promatrati takve pravce pošto postoje dva različita pravca koji se ne sijeku.

Propozicija 1.6.4. *Neka je p pravac i neka je p' preslika pravca p centralnom simetrijom $c_O : M \to M$ preko točke $O \notin p$. Tada se p i p' ne sijeku.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $A \in p \cap p'$. Pošto $c_O(p) = p'$ i $c_O(p') = p$, vrijedi:

$$c_O(A) \in p \cap p'$$

Sada imamo dva slučaja:

- $c_O(A) = A \implies A = O$ No, kako $A \in p$, a $O \notin p$, dobivamo kontradikciju.
- $c_O(A) \neq A$ U ovom slučaju p i p' se sijeku u dvije različite točke, pa $p = p'$, no onda je i polovište dužine $\overline{Ac_O(A)}$, točka O, na pravcu p, što ponovo daje kontradikciju.

Dakle za svaki pravac p postoji bar jedan pravac koji se ne siječe s njim. ☐

Propozicija 1.6.5. *Neka je dan neki pravac p. Neka su točke A i B dane u ravnini, te $A' = s_p(A)$ i $B' = s_p(B)$. Tada su pravci AA' i BB' jednaki, ili se ne sijeku, odnosno paralelni su.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: $AA' \cap BB' = \{X\}$. Kako je $s_p(A) = A'$, pravac AA' se slika sam u sebe. Analogno, BB' se slika sam u sebe. Neka $X' = s_p(X)$.

$$X \in AA' \implies X' \in AA'$$

$$X \in BB' \implies X' \in BB'$$

Dakle, $X' \in AA' \cap BB' \implies X' = X$. Kako su jedine fiksne točke osne simetrije s_p na p, dobivamo: $X \in p$. Dakle pravci AA' i BB' se sijeku na p. Pošto $s_p(AA') = AA'$ i $s_p(BB') = BB'$, vrijedi $p \perp AA'$ i $p \perp BB'$. No, prema propoziciji 1.3.6 vrijedi da postoji samo jedan pravac koji prolazi kroz X i okomit je na p, pa vrijedi $AA' = BB'$ i ulazimo u kontradikciju s pretpostavkom. ☐

Drukčija formulacija prethodne propozicije je sljedeća:

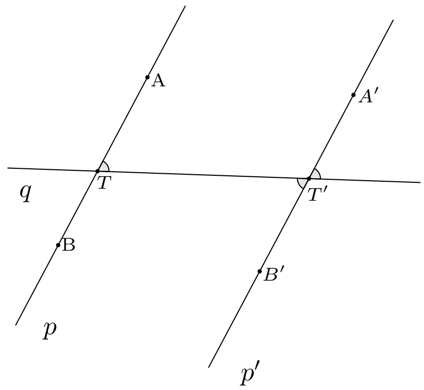
Ako su različiti pravci p i p' okomiti na neki pravac q, onda se ne sijeku.

Propozicija 1.6.6. *Za svaki pravac p i točku $T \notin p$ postoji bar jedan pravac koji prolazi točkom T i ne siječe p.*

Dokaz. Točkom T povucimo okomicu q na pravac p, što možemo po propoziciji 1.3.6. Sada povucimo kroz T okomicu na q i nazovimo ju r. Sada su p i r paralelni po prethodnoj propoziciji, a kako nisu jednaki (jer $T \in r, T \notin p$), znači da se ne sijeku. □

Propozicija 1.6.7. *Ako dva pravca p i p' sijeku q pod istim kutom, onda (i samo onda) je $p \parallel p'$.*

Dokaz. Neka je $p \cap q = \{T\}, p' \cap q = \{T'\}$. Neka su sada $A, B \in p$ točke s različitih strana pravca q. Također neka su $A', B' \in p'$ s različitih strana pravca q, tako da su A i A' s iste strane.



Zbog vršnosti kutova vrijedi

$$\sphericalangle aTt' = \sphericalangle tT'b'$$

Dakle postoji izometrija koja slika Ta u $T'b'$ i Tt' u $T't$. Sasvim je jednostavno uočiti kako se radi o centralnoj simetriji s obzirom na polovište $\overline{TT'}$. Znači da su pravci p i p' paralelni po propoziciji 1.6.4.

□

Pravac koji presijeca dva paralelna pravca nazivamo **transverzala** paralelnih pravaca.

Sada se postavlja pitanje jedinstvenosti takvog paralelnog pravca, što se ne može dokazati pomoću dosad navedenih aksioma, pa postoji potreba za uvođenjem novog aksioma.

Aksiom o paralelama

(P1) Za svaki pravac $p \subset M$ i točku $T \in M$ postoji točno jedan pravac $q \subset M$ takav da $T \in q$ i $q \parallel p$.

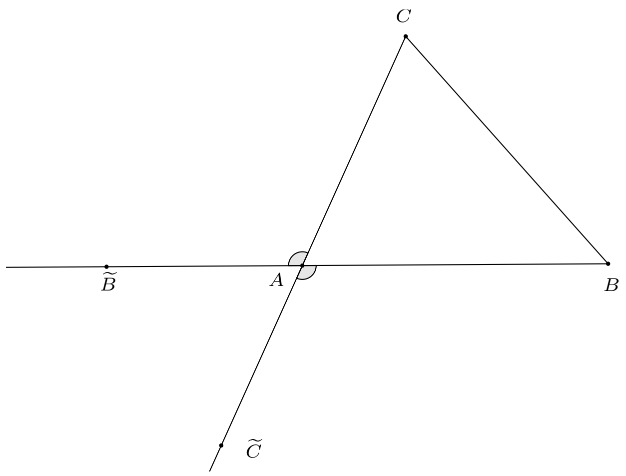
Sada je očito da u prethodnoj propoziciji vrijedi i drugi smjer.
Jasno je da je paralelnost relacija ekvivalencije. Refleksivnost i simetričnost je očita, a tranzitivnost se dobiva povlačenjem okomice na dva paralelna pravca, dokazivanjem da je okomica i na treći pravac paralelan s drugim i tako se dobiva da je paralelan i s prvim.

Kutovi trokuta

Napomena: U daljnjem tekstu ćemo za polupravce Ox i Oy koji sadrže redom točke A i B kut $\sphericalangle xOy$ označavati kao $\sphericalangle AOB$, dok će polupravac iz A koji prolazi kroz B (i dalje) biti Ab. Također mjeru kuta je uobičajeno označavati kao $\phi(\sphericalangle AOB) = |\sphericalangle AOB|$.

U trokutu postoje tri **unutrašnja kuta**: $\beta = \sphericalangle ABC, \gamma = \sphericalangle BCA, \alpha = \sphericalangle CAB$. Nekad se referiramo na njih navodeći koji je pripadajući vrh. Primjerice $\sphericalangle ABC$ je kut pri vrhu B.

Vanjski kut u vrhu A je kut $\sphericalangle BA\widetilde{C}$, odnosno $\sphericalangle \widetilde{B}AC$ gdje su $\widetilde{B} \in AB \backslash Ab$ i $\widetilde{C} \in AC \backslash Ac$ točke na produžetcima stranica preko vrha A.



Također, vršni kutovi pri istom vrhu su međusobno jednaki. Centralna simetrija je izometrija koja ih preslikava jedan u drugi.

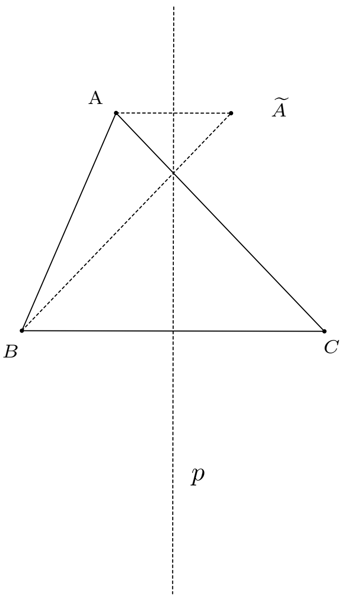
Propozicija 1.6.8. ***(Pons asinorum)***[4]
Za svaki $\triangle ABC$ vrijedi

$$|AB| = |AC| \iff \gamma = \beta$$

Dokaz. Prvo dokažimo da $|AB| = |AC| \implies \gamma = \beta$.
Prema propoziciji 1.3.2 točka A leži na simetrali p dužine $\overline{BC}$. Onda za osnu simetriju s obzirom na pravac p vrijedi $s_p(A) = A, s_p(B) = C, s_p(C) = B$. Ta izometrija preslikava polupravac Ba u polupravac Ca, te polupravac Bc u Cb. Ta izometrija preslikava kut $\sphericalangle ABC$ u $\sphericalangle ACB$, pa su oni jednaki.

Drugi smjer se dokazuje pretpostavljajući suprotno, neka A ne leži na simetrali $\overline{BC}$, odnosno $|AB| \neq |BC|$.
Neka vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$.

[4] lat. "magareći most" - naziv koji je Roger Bacon dao ovoj tvrdnji, 5. propoziciji 1. knjige Euklidovih Elemenata



Nadalje, neka je p simetrala $\overline{BC}$, te $\widetilde{A} = s_p(A)$. Onda vrijedi $s_p(\sphericalangle ACB) = \sphericalangle\widetilde{A}BC$. Tada zbog $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$ vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle\widetilde{A}BC$.
Uočimo da se A i $\widetilde{A}$ nalaze u istoj poluravnini određenoj pravcem BC, jer bi u suprotnom bilo $\overline{A\widetilde{A}} \cap BC \neq \emptyset$, no znamo da je $A\widetilde{A} \perp p$ i $BC \perp p$, pa su ta dva pravca paralelna po propoziciji 1.6.5, a i različiti pošto $A \notin BC$, pa je nemoguće da se $\overline{A\widetilde{A}}$ i BC sijeku.
Kutevi $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle\widetilde{A}BC$ imaju zajednički krak Bc, a i jednaki su. Pošto onda mora postojati izometrija koja preslikava jedan u drugi. Kako ta izometrija mora slikati BC sam u sebe, može biti po (S1) samo identiteta ili osna simetrija. Kada bi bila osna simetrija Ba i $B\widetilde{a}$ bi ležali u različitim poluravninama s obzirom na BC. Dakle, radi se o identiteti, pa je $Ba = B\widetilde{a}$, što znači da su $B, A, \widetilde{A}$ kolinearne. Kada bi bilo $A \neq \widetilde{A}$, onda bi B bio presjek paralelnih pravaca $A\widetilde{A}$ i BC, što je kontradikcija. Dakle $A = \widetilde{A}$.

$$A = \widetilde{A} \iff A = s_p(A) \iff A \in p \implies |AC| = |AB|$$

□

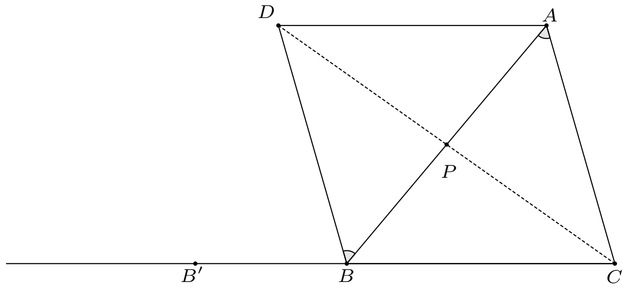
Propozicija 1.6.9. *Za svaki trokut vrijedi:*

(a) *Vanjski kut trokuta uz vrh B veći je od unutarnjih uz vrhove A i C.*

(b) *U svakom trokutu je zbroj duljina dviju stranica veći od treće.*

(c) *U svakom trokutu nasuprot veće stranice leži veći kut. ($|AB| \geq |BC| \iff \gamma \geq \alpha$)*

Dokaz. (a) Neka je $B' \in BC \backslash Bc$. Vanjski kut uz vrh B je $\sphericalangle ABB'$.



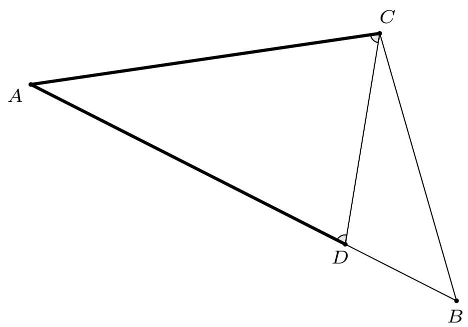
Dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle ABB' > \sphericalangle BAC$. Neka je P polovište $\overline{AB}$. Neka je D centralnosimetrična slika točke C s obzirom na P. Pošto je centralna simetrija izometrija, znači da je $\sphericalangle DBA = \sphericalangle BAC$. Kako točka D pripada istoj poluravnini kao i točka P u odnosu na pravac BC, što znači da je

$$S_{\sphericalangle DBA} \subset S_{\sphericalangle B'BA} \implies \sphericalangle ABB' > \sphericalangle DBA = \sphericalangle BAC$$

Analogno se pokazuje i za kut u vrhu C.

(b) Trivijalno slijedi iz (M3) za A, B, C.

(c) Neka je $\triangle ABC$ trokut za koji vrijedi $|AB| > |AC|$. Dokažimo da je tada $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABC$.



Uzmimo točku D na stranici $\overline{AB}$ takvu da je $|AC| = |AD|$. Prema propozicji 1.6.8 vrijedi $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACD$. Prema (a) vrijedi da je $\sphericalangle ADC > \sphericalangle ABC$ te se onda dobiva

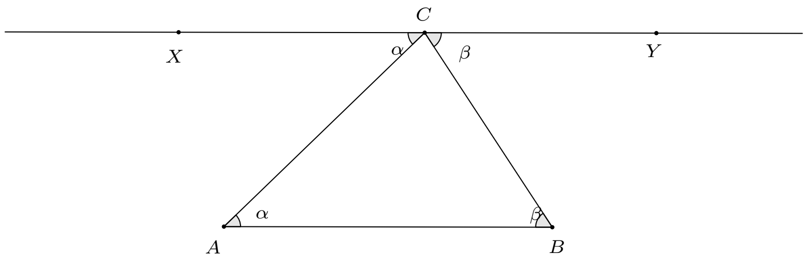
$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle ACB$$

Obrat možemo dobiti kontrapozicijom i primjenom propozicije 1.6.8.

□

Propozicija 1.6.10. *Zbroj unutrašnjih kutova svakog trokuta jednak je ispruženom kutu.*

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$. Dokazali smo u propoziciji 1.6.6 da možemo povući pravac p kroz C paralelan s AB. Neka su točke X i Y točke na pravcu p, različite od C, na različitim polupravcima s obzirom na točku C kao na slici.



Sada po propoziciji 1.6.7 vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCY$ i $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACX$, pa je

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACY + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACX = \omega$$

□

Korolar 1.6.2. *Veličina vanjskog kuta nekog vrha trokuta je jednaka zbroju unutarnjih kutova u preostala dva vrha.*

Dokaz. Iz definicije vanjskog kuta jasno je da je $\sphericalangle CA\widetilde{B} = \omega - \alpha$, ali po prethodnoj propoziciji, $\omega - \alpha = \beta + \gamma$.

□

1.7 Kružnica

Definicija 1.7.1. Za točku $S \in M$ i realni broj $r > 0$ definiramo skup

$$K(S,r) := \{T \in M : |ST| = r\}$$

Taj skup zovemo **kružnica** sa središtem S i polumjerom r. **Tetiva** je dužina koja spaja dvije različite točke kružnice. Tetiva koja prolazi središtem kružnice naziva se **promjer**.

Definicija 1.7.2. Neka je $S \in M$ točka i $r \in \mathbb{R}^+$ pozitivan realan broj, te dana kružnica $K(S,r)$. Neka su $A, B \in K(S,r)$ dvije točke na toj kružnici. Ako $S \notin \overline{AB}$, kut $\sphericalangle ASB$ nazivamo središnji kut nad tetivom $\overline{AB}$. Presjek pripadajućeg zatvorenog kutnog isječka i kružnice nazivamo **luk** nad $\overline{AB}$:

$$\widehat{AB} := S_{\sphericalangle ASB} \cap K(S,r)$$

Definicija 1.7.3. Neka su dani $S \in M$ i $r \in \mathbb{R}^+$. Skup

$$\overline{K}(S,r) := \{T \in M : |ST| \leq r\}$$

nazivamo **krug** sa središtem S i polumjerom r.

Napomena: Ubuduće ćemo smatrati da je uvijek $S \in M$ i $r \in \mathbb{R}^+$, pa ćemo samo pisati: "... neka je dana kružnica $K(S, r)$ ..."

Propozicija 1.7.1. *Neka je dana kružnica $K(S, r)$ i izometrija ravnine $f : M \to M$. Onda je slika kružnice opet kružnica jednakog polumjera:*

$$f(K(S, r)) = K(f(S), r)$$

Dokaz. Neka je $S' = f(S)$. Tada vrijedi $|TS| = |f(T)S'| = r, \forall T \in K(S, r)$. Kako je $K(S', r)$ skup svih točaka koje su udaljene za r od S', onda vrijedi i da je $f(T) \in K(S', r)$. Zaključujemo:

$$f(K(S, r)) \subseteq K(S', r)$$

Analogno, pošto je svaka izometrija bijekcija i f^{-1} je također izometrija, promatrajmo sada $K(S', r)$ kao početnu kružnicu. Vrijedi $f^{-1}(S') = S$, te analogno prethodnom slučaju zaključujemo $f^{-1}(K(S', r)) \subseteq K(S, r)$, te kada djelujemo s f na skupove :

$$K(S', r) \subseteq f(K(S, r))$$

To zajedno s $f(K(S, r)) \subseteq K(S', r)$ daje $K(S', r) = f(K(S, r))$.

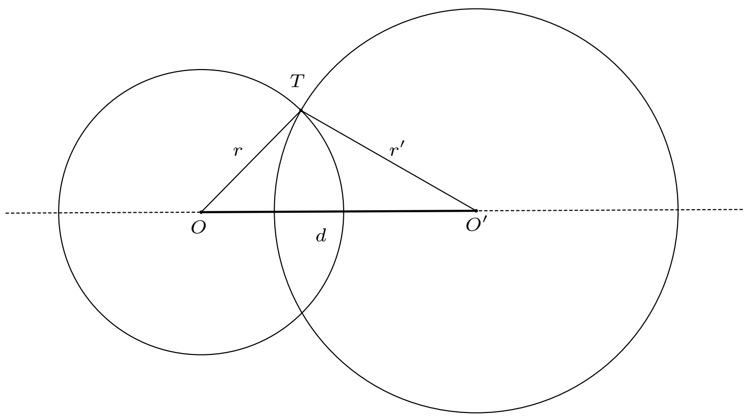
□

Sada ćemo promotriti presjeke dviju kružnica. Sljedeću tvrdnju uzimat ćemo sasvim intuitivno. Pošto je njen dokaz netrivijalan i zadire u naprednije matematičke teme samo ćemo ju iskazati.

Teorem 1.7.1. ***(Presjek dvaju kružnica)*** *Neka su dane kružnice $K(O, r), K(O', r')$, te neka je $d = |OO'|$. Te dvije kružnice se sijeku ako i samo ako:*

$$|r - r'| \leq d \leq r + r'$$

Također, te dvije kružnice imaju dva sjecišta ako i samo ako vrijede dvije stroge nejednakosti, a ukoliko vrijedi jedna jednakost onda imaju točno jedno sjecište.



Definicija 1.7.4. Neka je $T \in M$ proizvoljna točka i $p \subset M$ proizvoljni pravac. Udaljenost točke T od pravca p je
$$d(T,p) := \min\{d(T,X) : X \in p\}$$

Propozicija 1.7.2. *Udaljenost točke $T \in M$ od pravca $p \subset M$ je udaljenost T od nožišta N okomice iz T na p.*

Dokaz. Neka je q okomica iz T na p. Neka je $N = p \cap q$. Uzmimo sada neku točku A na p koja je razlilčita od N. Sada, po propoziciji 1.3.7 vrijedi $|AT| \geq |TN|$, što znači da je $|TN|$ minimum svih udaljenosti točke T od točaka pravca.

□

Propozicija 1.7.3. *Neka je dan pravac $p \subset M$ i kružnica $K(S,r)$. Vrijedi:*

I *Ako i samo ako je $d(S,p) < r$, onda p siječe kružnicu $K(S,r)$ u točno dvije točke. Tada se p naziva **sekanta** kružnice.*

II *Ako i samo ako je $d(S,p) = r$, onda p siječe kružnicu u samo jednoj točki. Tada kažemo da pravac dodiruje kružnicu, točku presjeka nazivamo **dirałište**. Pravac p nazivamo još i **tangenta**.*

III *Ako i samo ako je $d(S,p) > r$, onda p ne siječe kružnicu.*

Dokaz. Pretpostavimo da pravac siječe kružnicu u nekoj točki O. Onda vrijedi da je $|SO| = r \geq d(S,p)$. Dakle, po obratu po kontrapoziciji vrijedi:

$$d(S,p) > r \implies p \cap K(S,r) = \emptyset$$

Druga su dva slučaja malo sofisticiranija pa ih preskačemo. □

Primijetimo da iz činjenice da se najmanja udaljenost od točke do pravca ostvaruje na okomici iz točke na pravac i činjenice da je u diralištu tangente točka pravca nazbliža središtu kružnice zaključujemo sljedeće:
Ako je p tangenta na kružnicu $K(S,r)$ koja dodiruje kružnicu u točki T, onda je $p \perp ST$.

Poglavlje 2

Klasična geometrija trokuta i kružnice

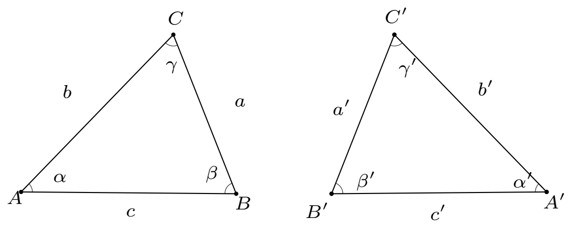
2.1 Sukladnost trokuta

Napomena: Običaj je da se kutovi označavaju tako da u svakom vrhu bude kut označen odgovarajućim grčkim slovom $\sphericalangle BAC = \alpha, \sphericalangle ABC = \beta, \sphericalangle BCA = \gamma$. Nadalje, duljine stranica se označavaju malim tiskanim slovom nasuprotnim vrhu označenim tim slovom. Dakle, ukoliko nije posebno navedeno, podrazumijevat će se takav sustav oznaka.

Definicija 2.1.1. Neka je $\triangle ABC$ trokut s vrhovima A, B, C i $\triangle A'B'C'$ trokut s vrhovima A', B', C'. Ta su dva trokuta **sukladna** ako postoji bijekcija
$f : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$ takvi da

$$f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C', \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma', a = a', b = b', c = c'$$

Tada pišemo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Napomena: Ekvivalentan, no jednostavniji način za definiranje sukladnosti je sljedeći: *Dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su sukladni ako i samo ako postoji izometrija $f : M \to M$ takva da $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$.*

Teorem 2.1.1. ***(S-S-S)***
Dva trokuta su sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Dokaz. Ako su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, za koje vrijedi

$$|AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'|, |BC| = |B'C'|$$

onda možemo direktno primijeniti propoziciju 1.3.8 i utvrditi da postoji izometrija koja preslikava vrhove jednog trokuta u drugi, pa su oni po definiciji sukladni. □

Teorem 2.1.2. ***(S-K-S)***
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trokuti takvi da je $b = b', c = c'$ i $\alpha = \alpha'$.
Po definiciji jednakosti kutova, postoji izometrija $g : M \to M$ takva da je

$$g(A) = A', g(Ab) = A'b', g(Ac) = A'c'$$

Kako je g izometrija, $|AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'|$, pa radi aksioma (M4) vrijedi $g(B) = B'$ i analogno $g(C) = C'$. Dakle, g je izometrija koja preslikava vrhove prvog trokuta u vrhove drugog trokuta, pa su po definiciji ta dva trokuta sukladna. □

Teorem 2.1.3. ***(K-S-K)***
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva priležeća kuta uz tu stranicu.

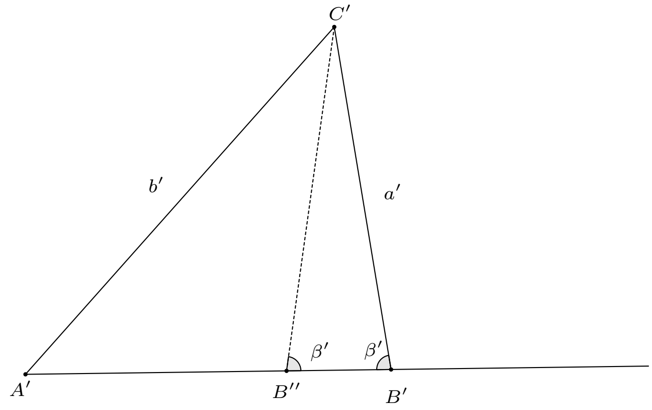
Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trokuti takvi da je $c = c', \beta = \beta'$ i $\alpha = \alpha'$.
Neka je $g : M \to M$ izometrija za koju vrijedi $g(A) = A'$ i $g(B) = B'$. Ako C' i $g(C)$ leže u istoj poluravnini s obzirom na $A'B'$, onda je radi propozicije 1.6.2 i $\alpha = \alpha'$ slijedi $g(Ac) = A'c'$ te radi $\beta = \beta'$ slijedi $g(Bc) = B'c'$. Pošto je g bijekcija, vrijedi

$$g(C) = g(Ac \cap Bc) = g(Ac) \cap g(Bc) = A'c' \cap B'c' = C'$$

pa je $C' = g(C) \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Ako su pak C' i $g(C)$ u različitim poluravninama s obzirom na pravac $A'B'$, onda uzimamo osnu simetriju $s_{A'B'} : M \to M$ s obzirom na pravac $A'B'$. Tada je kompozicija $f = s_{A'B'} \circ g$ izometrija za koju vrijedi da je $f(A) = A', f(B) = B'$, a $f(C)$ je u istoj poluravnini u odnosu na $A'B'$ kao i C'. Provodimo analogan postupak i zaključujemo $f(C) = C'$.
□

Teorem 2.1.4. ***S-S-K***
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

Dokaz. Neka vrijedi $a = a', b = b', a > b, \alpha = \alpha'$. Nadalje, neka je $g : M \to M$ izometrija takva da je $g(A) = A', g(Ab) = A'b', g(Ac) = A'c'$. Takva izometrija postoji pošto je $\alpha = \alpha'$. Tada je očito $g(C) = C'$, pošto je $C \in Ac$, te je $|AC| = |A'C'| = b$. Dovoljno je dokazati da je $g(B) = B'$. Označimo $g(B) = B''$ i pretpostavimo da vrijedi $B' \neq B''$. Pošto je $g(Ab) = A'b'$ onda $B \in Ab \implies B'' \in A'b'$. Promotrimo uređaj na pravcu $A'B'$ takvav da je $A' < B'$.



Sada imamo dva slučaja položaja točke B'' na polupravcu $A'B'$.

Slučaj 1: $A' < B'' < B'$
Kako je g izometrija, onda $a = |CB| = |C'B''|$, ali po pretpostavci je i $|C'B'| = a$, pa je trokut $\triangle C'B'B''$ jednakokračan. Dakle $\sphericalangle C'B''B' = \sphericalangle C'B'B''$. Pošto je $\sphericalangle C'B''B'$ eksplementarni kut od $\sphericalangle A'B''C'$ po propoziciji 1.6.9 vrijedi
$\beta = \sphericalangle C'B'A' = \sphericalangle C'B''B' > \sphericalangle C'A'B' = \alpha$, a to je u kontradikciji s pretpostavkom $a > b$ i propozicijom 1.6.9.

Slučaj 2: $A' < B' < B''$
U ovom slučaju dokaz teče analogno, uz zamjenu točaka B' i B''.

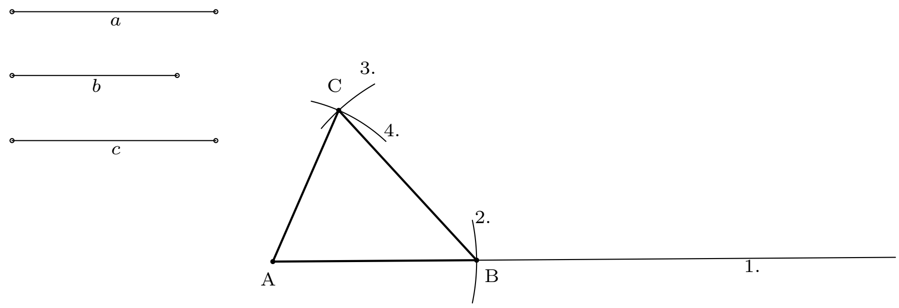
□

2.2 Konstrukcije ravnalom i šestarom*

U ovom poglavlju ćemo se kratko pozabaviti konstrukcijama trokuta sa zadanim stranicama i kutovima. Objasnimo za početak pojam konstrukcije. Konstrukcije izvodimo koristeći isključivo šestar i neoznačeno ravnalo. Ravnalom možemo nacrtati pravac kroz proizvoljne dvije točke, a šestarom možemo nacrtati kružnicu zadanog polumjera oko proizvoljne točke. Pritom smatramo da možemo konstruirati presjek dvaju pravaca, dvaju kružnice i presjek pravca i kružnice.
Točku smatramo konstruiranom ako je dobivena jednom od navedenih konstrukcija.
Trokut smatramo konstruiranim ako konstruiramo njegove vrhove.
Nadalje, zadanim vrijednostima se smatraju vrijednosti koje već postoje u ravnini te ih možemo duplicirati. Slijede osnovne konstrukcije trokuta.

Primjer 2.2.1. *Konstruirajte trokut $\triangle ABC$ za koji su zadane stranice a, b, c za koje vrijede nejednakosti trokuta: $a + b > c, a + c > b, b + c > a$.*

Rješenje.



Odaberimo točku A u ravnini i povucimo neki polupravac (1.). Sada uzmimo u šestar (raširimo ga dok mu se vrhovi ne podudaraju s krajnjim točkama dužine) dužinu $c = \overline{AB}$ i opišimo kružnicu oko A (2.). Sjecište polupravca i kružnice je točka B. Sada uzmimo u šestar redom dužine $a = \overline{BC}$ i $b = \overline{AC}$ i opišimo oko B (3.) i A (4.), redom, kružnice. Pošto je $a + b > c$, te se dvije kružnice sijeku u točno dvije točke. Odaberimo jednu od njih i označimo ju s C. Time je naša konstrukcija završena.

Naravno, u praksi se radi preglednosti ne crtaju čitave kružnice nego samo djelići, kako je prikazano na gornjoj skici.
U sljedećem primjeru je potrebno prenijeti kut.

Primjer 2.2.2. *Konstruirajte trokut kojemu je zadan kut $\sphericalangle BAC = \alpha < \omega$ i dvije stranice uz taj kut $|AB| = c, |AC| = b$.*

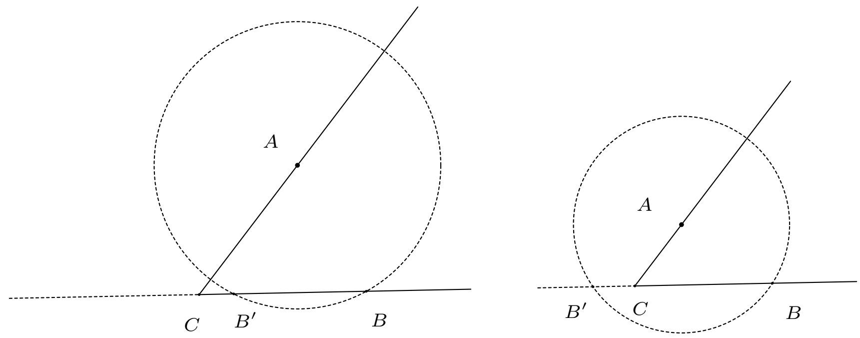
Rješenje. U ovom je primjeru suština prenijeti zadani kut u točku A. To ćemo raditi po prethodnom principu. Naime, ako je zadan kut $\sphericalangle xOy = \alpha$, možemo uzeti proizvoljne točke $X \in Ox \backslash \{O\}$ i $Y \in Oy \backslash \{O\}$ i konstruirati krokut $\triangle AX'Y'$ sukladan trokutu $\triangle OXY$ kao u prethodnom primjeru. Potom produžimo dužine u polupravce Ax' i Ay'. Sada konstruiramo tako da uzmemo u šestar dužinu $c = |AB|$ i nanesimo ju na polupravac (konstruirajmo kružnicu i promatrajmo sjecište s polupravcem) Ay'. Tako dobivamo točku B. Analogno dobivamo točku C.

Primjer 2.2.3. *Konstruirajte trokut kojemu je zadana stranica $c = |AB|$ i dva kuta uz tu istu stranicu $\sphericalangle CBA = \beta, \sphericalangle CAB = \alpha$ takva da $\sphericalangle CBA + \sphericalangle CAB < \omega$.*

Rješenje. Odaberimo sada neku točku A, nacrtajmo neki pravac kroz tu točku i nanesimo na jedan od dva polupravca određena točkom A na tom pravcu točku B. Sada nanesimo u točke A i B redom kuteve α i β u istu poluravninu s obzirom na pravac AB. Presjek tih polupravaca daje vrh C.

Primjer 2.2.4. *Konstruirajte trokut kojemu su zadane dvije stranice $c = |AB|, b = |AC|$ takve da je $c > b$ i kut γ nasuprot većoj stranici.*

Rješenje. U ovom primjeru ćemo prokomentirati u detalje i uvjet da mora biti zadan kut nasuprot većoj stranici. Uzmimo sada točku C i polupravac Cx iz C. Sada uzmimo u šestar b i nanesimo na polupravac. Dobivena točka presjeka je A. Sada uzmimo u šestar c i nacrtajmo kružnicu. Sjecište polupravca i kružnice je točka B.



Neka je p pravac na kojem leži Cx. Uočimo sada da je $K(A, c) \cap p = \{B, B'\}$. Kada je stranica nasuprot kuta manja, onda obje točke B i B' leže na polupravcu Cx pa trokut nije jedinstveno određen. To objašnjava zašto je teorem 2.1.4 iskazan s uvjetom da je dan kut nasuprot veće stranice.

2.3 Geometrija kružnice

Teorem 2.3.1. *Svi središnji kutovi nad tetivama jednakih duljina su jednaki.*

Dokaz. Neka je $K(S, r)$ kružnica i $A, B, C, D \in K(S, r)$, takve da $|AB| = |CD|$. Vrijedi $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$, što znači da su trokuti $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ sukladni.

$$\triangle ABS \cong \triangle CDS \implies \sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$$

□

Teorem 2.3.2. *Svi obodni kutovi nad istom tetivom su jednaki i iznose pola središnjeg kuta nad tom tetivom.*

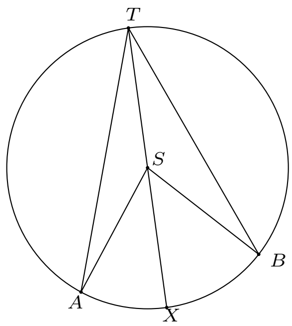
Dokaz. Dovoljno je dokazati samo drugu tvrdnju jer iz nje trivijalno slijedi prva.
Neka je $\overline{AB}$ zadana tetiva na kružnici $K(S, r)$. Nadalje, neka je T proizvoljna točka na presjeku kružnice i poluravnine u kojoj se nalazi S. Dokaz provodimo po slučajevima ovisno o položaju točke T.

Slučaj 1: $S \in \overline{BT}$
Pošto je $|AS| = |ST| = r$ trokut $\triangle AST$ je jednakokračan. Prema 1.6.8 vrijedi

$$\sphericalangle ATS = \sphericalangle SAT \implies \sphericalangle ASB = 2\sphericalangle ATS$$

Zadnju implikaciju temeljimo na 1.6.2.

Slučaj 2: S se nalazi u kutnom isječku određenom polupravcima Ta, Tb
Neka je sada točka $X \in K(S, r)$ drugi presjek pravca TS i kružnice.



Sada primjenimo prethodni slučaj na $\sphericalangle ATX$ i $\sphericalangle XTB$. Dobivamo:

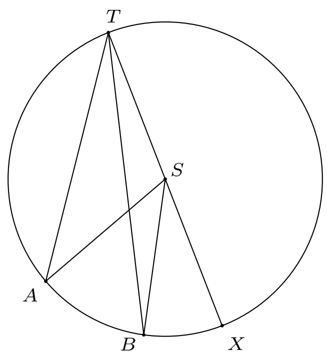
$$\sphericalangle ASX = 2\sphericalangle ATX$$

$$\sphericalangle XSB = 2\sphericalangle XTB$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo:

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASX + \sphericalangle XSB = 2\sphericalangle ATX + 2\sphericalangle XTB = 2\sphericalangle ATB$$

Slučaj 3: S se sada nalazi izvan zatvorenog kutnog isječka određenog polupravcima Ta, Tb
Neka je opet točka $X \in K(S, r)$ drugi presjek pravca TS i kružnice.



Uočavamo da je

$$\sphericalangle ATB + \sphericalangle BTX = \sphericalangle ATX$$

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSX = \sphericalangle ASX$$

Prema prvom slučaju, pošto $S \in \overline{TX}$:

$$\sphericalangle ASX = 2\sphericalangle ATX$$

$$\sphericalangle BSX = 2\sphericalangle BTX$$

$$\implies \sphericalangle ASB = \sphericalangle ASX - \sphericalangle BSX = 2(\sphericalangle ATX - \sphericalangle BTX) = 2\sphericalangle ATB$$

□

Teorem 2.3.3. ***(Talesov poučak)***
Neka je $K(S, r)$ kružnica s promjerom $\overline{AB}$. Neka je $T \in K(S, r) \setminus \{A, B\}$ proizvoljna točka. Tada vrijedi $\sphericalangle ATB = \delta$, odnosno $\sphericalangle ATB$ je pravi kut.

Dokaz. Pošto je $\sphericalangle ASB$ ispruženi kut, vrijedi $\sphericalangle ASB = \omega = 2\delta$. Također, kako je $|ST| = |SB| = |SA| = r$ trokuti $\triangle AST$ i $\triangle STB$ su jednakokračni, pa vrijedi $\sphericalangle STB = \sphericalangle SBT$, a po prethodnom teoremu $\sphericalangle SBT = \frac{\sphericalangle TSA}{2}$, pa je

$$\sphericalangle STB = \frac{\sphericalangle TSA}{2}$$

Analogno dobivamo

$$\sphericalangle ATS = \frac{\sphericalangle TSB}{2}$$

Zbrajanjem slijedi

$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATS + \sphericalangle STB = \frac{\sphericalangle TSB}{2} + \frac{\sphericalangle TSA}{2} = \frac{\sphericalangle ASB}{2} = \frac{\omega}{2} = \delta$$

□

Teorem 2.3.4. *Obodni kutevi na tetivi na različitim kružnim lukovima s obzirom na tu tetivu zbrojeni daju ispruženi kut.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ tetiva kružnice $K(S, r)$. I neka je $T \in K(S, r) \backslash \{A, B\}$. Neka je T' drugo sjecište pravca TS i kružnice. Prema Talesovom teoremu $\sphericalangle TAT' = \sphericalangle TBT' = \frac{\omega}{2}$. Kako je zbroj kutova u trokutu ω, vrijedi

$$\sphericalangle TT'A + \sphericalangle T'TA = \frac{\omega}{2}$$

$$\sphericalangle TT'B + \sphericalangle T'TB = \frac{\omega}{2}$$

Zbrajanjem tih dvaju jednakosti $\sphericalangle ATB + \sphericalangle AT'B = \omega$. Sada je i svaki drugi obodni kut nad tom tetivom na istom luku jednak $\sphericalangle AT'B$ te tvrdnja teorema vrijedi i za njega. □

2.4 Karakteristične točke trokuta I

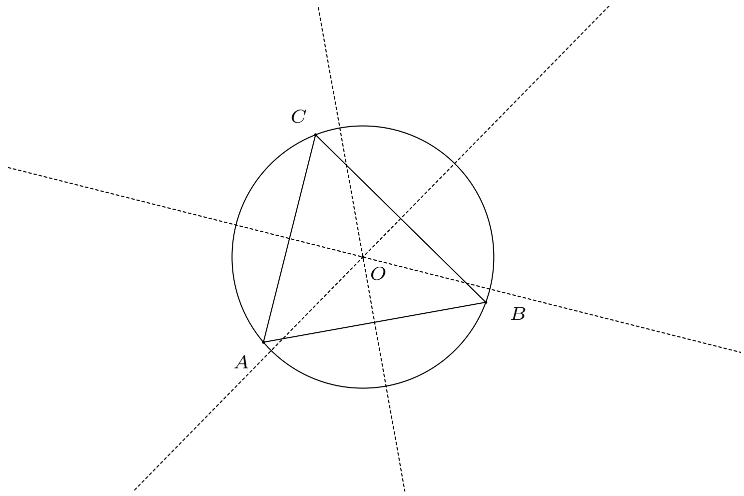
Definicija 2.4.1. Spustimo okomicu p iz A na pravac BC. Neka je $\{N_a\} = p \cap BC$. Tada dužinu $\overline{AN_a}$ nazivamo **visina** iz vrha A. Točku N_a nazivamo **nožište visine** iz vrha A. Analogno definiramo N_b i N_c.

Definicija 2.4.2. Neka je M_a polovište stranice $\overline{BC}$. Dužinu $\overline{AM_a}$ nazivamo **težišnica** iz vrha A. Analogno se definiraju i težišnice iz vrhova B i C.

Simetralu dužine $\overline{BC}$ označavat ćemo s s_a. Analogno su simetrale $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ označene s s_b, s_c. Također simetrale kutova u vrhovima A, B, C (simetrale polupravaca koji određuju kutove) redom označavamo s $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$.

Teorem 2.4.1. *Simetrale stranica se sijeku u jednoj točki. Tu točku označavamo s O i zovemo* ***središte opisane kružnice*** *trokuta $\triangle ABC$. Sada postoji kružnica sa središtem u O koja prolazi svim vrhovima trokuta.*

Dokaz. Neka je $\{O'\} = s_c \cap s_b$. Kako je s_c simetrala stranice $\overline{AB}$, a i $O' \in s_c$ vrijedi $|O'A| = |O'B|$. Analogno zaključujemo $|O'A| = |O'C|$. Znači da je $|O'A| = |O'B| = |O'C|$, pa se sva tri vrha nalaze na kružnici $K(O', |O'A|)$. Odavde još vidimo i da $|O'B| = |O'C| \implies O' \in s_a$, što znači da se sve tri simetrale stranica sijeku u jednoj točki.



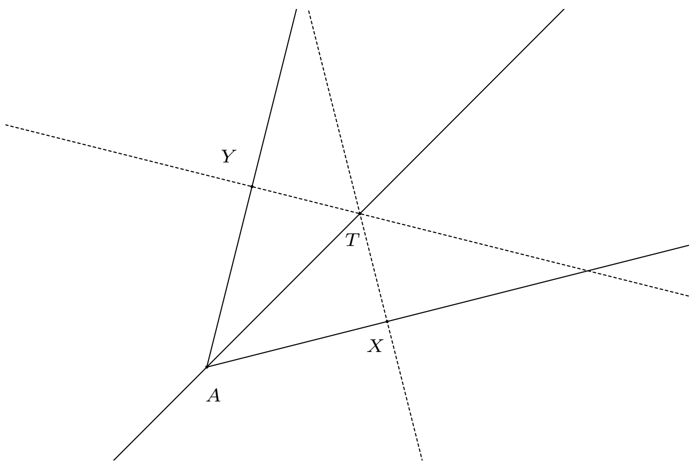
Dokažimo još da, ukoliko postoji kružnica kroz točke A, B iC, njeno središte leži na svim simetralama stranica. Pretpostavimo da postoji kružnica takva da $A, B, C \in K(O, r)$, onda vrijedi $|OA| = |OB| \implies O \in s_c$. Analogno se dobiva $O \in s_a$ i $O \in s_b$.

$$\implies O \in s_a \cap s_b \cap s_c$$

□

Propozicija 2.4.1. *Svaka točka $T \in s_\alpha$ je jednako udaljena od polupravaca kojima je određen kut α ako i samo ako leži na simetrali kuta α.*

Dokaz. Neka se radi o kutu $\alpha = \sphericalangle xAy$, te neka su X i Y nožišta okomica iz T na polupravce Ax i Ay redom.



Tada je $\sphericalangle TYA = \sphericalangle TXA$ i $\sphericalangle TAY = \sphericalangle TAX$. Pošto je suma unutarnjih kutova u trokutu jednaka ispruženom kutu, vrijedi i:

$$\omega - \sphericalangle YAT - \sphericalangle AYT = \omega - \sphericalangle TAX - \sphericalangle AXT \iff \sphericalangle YTA = \sphericalangle ATX$$

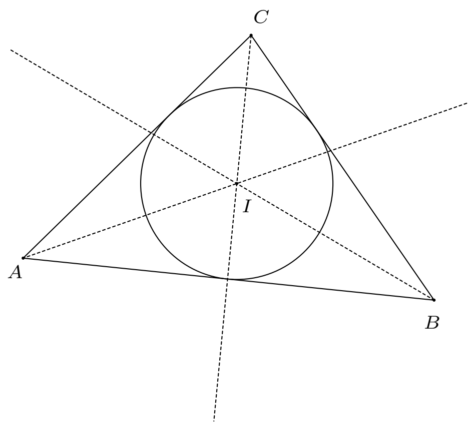
Trokuti $\triangle ATY$ i $\triangle AXT$ dijele stranicu $\overline{AT}$, pa su po teoremu (K-S-K) sukladni

$$\triangle ATY \cong \triangle ATX \implies |TX| = |TY|$$

Obrat se dobiva slično, pretpostavljajući da je neka točka jednako udaljena od oba polupravca. Pomoću teorema (S-S-K) dokazujemo $\sphericalangle TAX = \sphericalangle TAY$. $\square$

Teorem 2.4.2. *Sve tri simetrale unutrašnjih kutova prolaze istom točkom. Označavamo je s I i zovemo* ***središte upisane kružnice****.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema je suštinski isti kao i dokaz postojanja središta opisane kružnice.



Naime, neka je $\{I'\} \in s_\alpha \cap s_\beta$. Tako dobivamo:

$$d(I', b) = d(I', c) = d(I', a)$$

Dakle, kružnica $K(I', d(I', a))$ siječe svaku stranicu u samo jednoj točki, prema 1.7.3. Tvrdnju da, ako kružnica kojoj su stranice trokuta tangente postoji, onda je središte na svim simetralama kutova dokazujemo slično.

$\square$

2.5 Četverokuti

Definicija 2.5.1. Neka su dane točke $A_1, A_2, \dots, A_n \in M$. **Izlomljena crta** je unija

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} |A_k A_{k+1}|$$

Definicija 2.5.2. Neka su dane točke $A_1, A_2, \dots, A_n \in M$. **Poligonalna crta** je unija

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} |A_k A_{k+1}|$$

koja se ne *samopresijeca*, odnosno niti jedne dvije dužine nemaju presjek osim susjedno indeksiranih koje se sijeku u po jednoj krajnjoj točki.
Neka su $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in M$ točke u ravnini. Promotrimo sada uniju

$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup \dots \cup \overline{A_nA_1}$$

dužina takvih da nemaju u parovima niti jedan presjek izuzev krajnjih točaka. Tu uniju nazivamo **(zatvorena) poligonalna crta**.

Definicija 2.5.3. Dio ravnine omeđen zatvorenom poligonalnom crtom za $n = 4$ točke zovemo **četverokut**. Točke A_1, A_2, A_3, A_4 su **vrhovi četverokuta**. Obično se označavaju i s A, B, C, D. Parove $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, te $\overline{AD}, \overline{BC}$ nazivamo **nasuprotnim stranicama četverokuta**. Parove A i C, te B i D nazivamo **suprotnim vrhovima** četverokuta. Dužine koje spajaju nasuprotne vrhove četverokuta se zovu **dijagonale četverokuta**. Kutovi

$$\alpha = \sphericalangle DAB, \beta = \sphericalangle ABC, \gamma = \sphericalangle BCD, \delta = \sphericalangle CDA$$

se zovu (unutarnji) **kutovi četverokuta**, dok su parovi α i γ, odnosno β i δ **nasuprotni kutovi četverokuta**.

Definicija 2.5.4. Trapez je četverokut kojemu bar jedan par nasuprotnih stranica leži na paralelnim pravcima. Te paralelne stranice se zovu **baze** ili osnovice, a druge dvije stranice se zovu **krakovi** trapeza.

Definicija 2.5.5. Paralelogram je četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima.

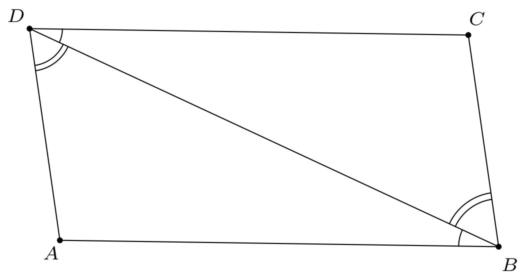
Propozicija 2.5.1. *Za četverokut $ABCD$ vrijedi:*

(a) Ako je četverokut paralelogram, onda $|AB| = |CD|, |BC| = |AD|, \alpha = \gamma, \beta = \delta$.

(b) Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.

(c) Ako za četverokut $ABCD$ vrijedi $|AD| = |BC|$ i $AD \parallel BC$, onda je $ABCD$ paralelogram.

Dokaz. (a) Neka je $\overline{BD}$ jedna dijagonala tog paralelograma. Tada je BD transverzala paralelnih pravaca AB i CD, pa vrijedi $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD$. Analogno, $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ADB$.

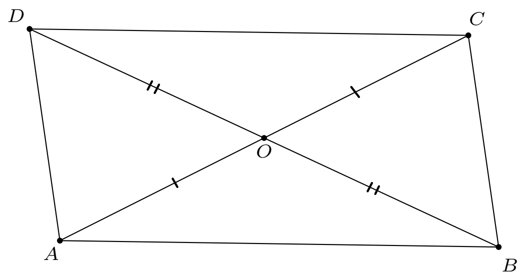


Zbrajanjem tih dviju jednakosti dobivamo:

$$\delta = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = \beta$$

Isto tako se pokaže $\alpha = \gamma$. Nadalje, kako $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ dijele stranicu $\overline{BD}$, a i vrijede navedene jednakosti, sukladni su po (K-S-K) teoremu, pa je onda i $|CD| = |AB|$, te $|AD| = |BC|$.

(b) Prvo dokažimo da je četverokut čije se dijagonale raspolavljaju paralelogram. Neka je O sjecište dijagonala četverokuta. Kutevi $\sphericalangle DOA$ i $\sphericalangle COB$ su jednaki jer su vršni. Nadalje, O raspolavlja $\overline{CA}$ i $\overline{BD}$ pa vrijedi $|CO| = |AO|$ i $|OD| = |OB|$.



Onda su po (S-K-S) teoremu trokuti $\triangle AOD \cong \triangle OBC \implies \sphericalangle OAD = \sphericalangle OCB$ sukladni, pa su po propoziciji 1.6.7 $AD \parallel BC$. Analogno se pokazuje $CD \parallel AB$.

Obrat se dokazuje pretpostavljajući suprotno. Neka je $ABCD$ paralelogram kojemu se dijagonale ne raspolavljaju. Neka je sada O polovište dijagonale $\overline{BD}$. Dodajmo točku $C' \in AO$ takvu da je $AO = OC'$. Sada je po prethodno dokazanom $ABC'D$ paralelogram. No kako točkom B može proći samo jedan pravac paralelan s AD, onda $BC = BC'$. Analogno je i $DC = DC'$.

$$\implies C = C'$$

$$\Longrightarrow\!\!\!\!\times\!\!\!\!\Longleftarrow$$

(c) Neka je $AC \cap BD = \{O\}$. Kako su $AD \parallel BC$, onda je $\sphericalangle BDA = \sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$. Kako je $|AD| = |BC|$, prema teoremu (K-S-K) su sukladni $\triangle AOD \cong \triangle BOC$. To znači da je $|OC| = |OA|$ i $|OD| = |OB|$, odnosno da se dijagonale raspolavljaju. Onda pomoću (b) zaključujemo da je $ABCD$ paralelogram.

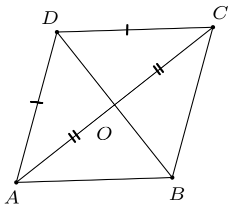
□

Definicija 2.5.6. **Pravokutnik** je paralelogram koji ima jedan pravi kut. **Kvadrat** je pravokutnik čije su dvije susjedne stranice jednake. **Romb** je paralelogram čije su dvije susjedne stranice jednake.

Lako se pokaže da su zbog jednakosti kutova pri transverzali paralelnih pravaca onda i ostala tri kuta pravokutnika prava. Također, lako se pokaže da su u kvadratu i rombu sve stranice međusobno jednake.

Propozicija 2.5.2. *Dijagonale romba su simetrale unutarnjih kutova i međusobno su okomite.*

Dokaz. Neka je O sjecište dijagonala romba $ABCD$.
Pošto je romb paralelogram, dijagonale mu se raspolavljaju, što znači da je $\triangle OCD \cong \triangle AOD$ po teoremu (S-S-S).



To znači da su kutovi $\sphericalangle AOD$ i $\sphericalangle DOC$ jednaki, a pošto $\sphericalangle AOD + \sphericalangle DOC = \omega \implies \sphericalangle AOD = \frac{\omega}{2}$. Time je dokazano da su dijagonale pod pravim kutom. Nadalje, $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ODC$. Dakle, DB je simetrala kuta $\sphericalangle ADC$. Tvrdnja se analogno dokazuje i za sve ostale kutove i dijagonale.

□

Definicija 2.5.7. **Srednjicom trokuta** nazivamo dužinu koja spaja dva polovišta stranica tog trokuta. **Srednjica trapeza** je dužina koja spaja polovišta krakova.

Propozicija 2.5.3. *Sve dužine koje spajaju točke s dva paralelna pravca i okomite su na jedan od njih su jednake duljine.*

Dokaz. Neka se radi o pravcima l, l'. Neka su $A, B \in l$ i $A', B' \in l'$ takve da je $AA' \perp l$ i $BB' \perp l$. Onda su očito $AA' \parallel BB'$ pa je $A'B'AB$ paralelogram, iz čega slijedi

$$|AA'| = |BB'|$$

□

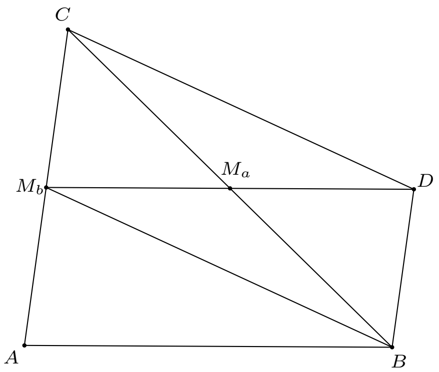
Definicija 2.5.8. Neka su $l, l' \subset M$ pravci takvi da je $l \parallel l'$. Neka je p pravac okomit na oba pravca, tako da $p \cap l = \{A\}$ i $p \cap l' = \{B\}$. Udaljenost tih pravaca definiramo kao $d(l, l') = |AB|$.

Naravno, jasno je po propoziciji 2.5.3 da su sve takve dužine jednake duljine, pa je definicija dobra.

Definicija 2.5.9. Visina trapeza je dužina koja spaja sjecišta pravaca na kojima leže osnovice s pravcem okomitim na njih.
Visina paralelograma na neku stranicu a je dužina koja spaja sjecišta pravaca na kojima leže stranica a i njena nasuprotna stranica s pravcem koji je okomit na njih.

Propozicija 2.5.4. *Srednjica trokuta koja spaja polovišta dvaju stranica paralelna je trećoj stranici i duljina te stranice dvostruko je veća od duljine srednjice.*

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i $M_a \in \overline{BC}, M_b \in \overline{AC}$ polovišta stranica a i b. Uzmimo točku D na pravcu M_aM_b takvu da je $|M_aD| = |M_aM_b|$.



Pošto se $\overline{BC}$ i $\overline{DM_b}$ prepolavljaju, M_bBDC je pralelogram.

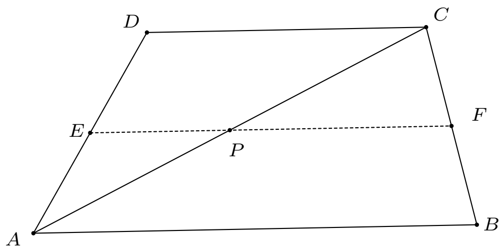
$$\implies |CM_b| = |BD|, BD \parallel AC$$

Pošto je $|CM_b| = |AM_b| \implies |BD| = |AM_b|$, pa je radi paralelnosti $ABDM_b$ paralelogram, pa je $M_aM_b \parallel AB$ i $|M_aM_b| = \frac{|AB|}{2}$.

□

Teorem 2.5.1. *Srednjica trapeza je paralelna s osnovicama trapeza i iznosi* $s = \frac{a+c}{2}$.

Dokaz. Neka je $ABCD$ trapez s bazama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ i neka je $|AB| = a$ i $|CD| = c$. Nadalje neka su E i F polovišta krakova $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ redom. Neka je P polovište dijagonale $\overline{AC}$.



Pošto je $\overline{EP}$ srednjica trokuta $\triangle ACD$, vrijedi $EP \parallel CD$ i

$$|EP| = \frac{|CD|}{2} = \frac{c}{2}$$

Nadalje, pošto je $\overline{PF}$ srednjica trokuta $\triangle ABC$, vrijedi $PF \parallel AB$. Isto tako

$$|PF| = \frac{|AB|}{2} = \frac{a}{2}$$

Pošto je paralelnost relacija ekvivalencije, vrijedi

$$PF \parallel AB \parallel CD \parallel EP$$

Kako postoji samo jedan pravac paralelan s PF kroz P, točke E, P i F leže na istom pravcu. Dakle, P leži na srednjici trapeza. Također

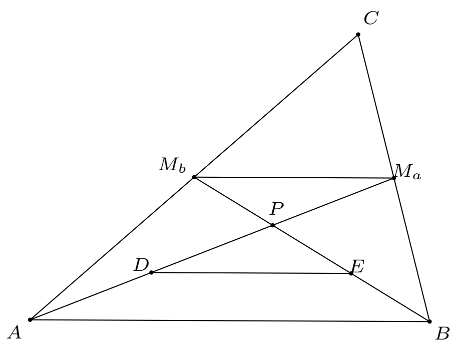
$$s = |EF| = |EP| + |PF| = \frac{|CD|}{2} + \frac{|AB|}{2} = \frac{a+c}{2}$$

□

2.6 Karakteristične točke trokuta II

Teorem 2.6.1. *Sve težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koju zovemo* ***težište****. Težište dijeli svaku težišnicu tako da je omjer udaljenosti od vrha do težišta i udaljenosti od težišta do polovišta jednak* $2:1$

Dokaz. Neka su $\overline{AM_a}$ i $\overline{BM_b}$ težišnice trokuta $\triangle ABC$ i P njihov presjek. Dodajmo sada točke D i E, redom polovišta $\overline{PA}$ i $\overline{PB}$. $\overline{M_aM_b}$ je srednjica trokuta $\triangle ABC$, pa je $M_aM_b \parallel AB$ i $|M_aM_b| = \frac{|AB|}{2}$.



S druge strane, $\overline{DE}$ je srednjica trokuta $\triangle PAB$, pa vrijedi $|DE| = \frac{|AB|}{2}$ i $DE \parallel AB$. Zaključujemo

$$|DE| = |M_aM_b|, DE \parallel M_aM_b$$

Dakle, DEM_aM_b je paralelogram pa se $\overline{M_bE}$ i $\overline{M_aD}$ prepolavljaju.

$$\implies |M_aP| = |PD| = |DA|, |M_bP| = |PE| = |EB|$$

Iz tih jednakosti dobivamo $\frac{|BP|}{|PM_b|} = 2$ i $\frac{|AP|}{|PM_a|} = 2$.
Neka je sada P' presjek težišnica $\overline{CM_c}$ i $\overline{AM_a}$. Analogno se dobiva: $\frac{|AP'|}{|P'M_a|} = 2$. Zbog aksioma (M4) postoji samo jedna točka P na polupravcu M_aa takva da je $|M_aP| = \frac{|AM_a|}{3}$. Dakle $P = P'$, pa se sve tri težišnice sijeku u jednoj točki.

□

Definicija 2.6.1. Četverokut za koji postoji kružnica koja prolazi svim njegovim vrhovima zovemo **tetivni četverokut**.

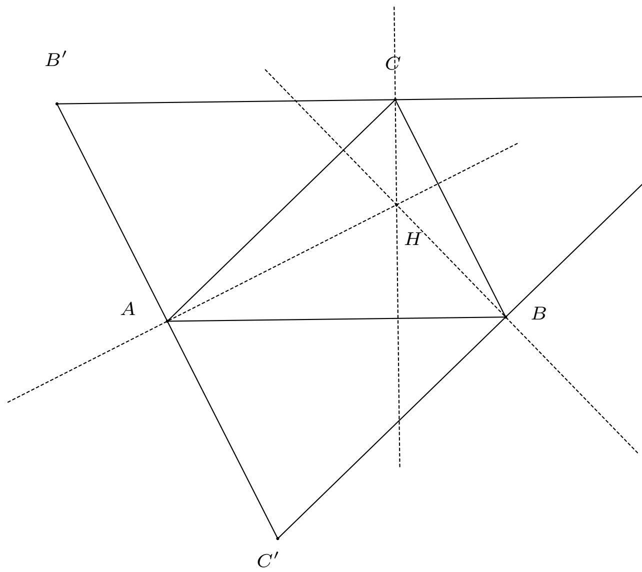
Propozicija 2.6.1. *Zbroj nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta je jednak ispruženom kutu.*

Dokaz. Trivijalna posljedica teorema 2.3.4.

□

Teorem 2.6.2. *Svi pravci na kojima se nalaze visine trokuta sijeku se u istoj točki. Nazivamo ju* ***ortocentar*** *i označavamo s H.*

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i nožišta visina N_a, N_b, N_c. Povucimo pravce p_a, p_b, p_c takve da je $A \in p_a, p_a \parallel BC$, $B \in p_b, p_b \parallel AC$ i $C \in p_c, p_c \parallel AB$. Označimo sada s A', B', C' sjecišta p_b i p_c, zatim p_a i p_c, te p_a i p_b, redom.



Prema konstrukciji su $ABA'C$ i $ABCB'$ paralelogrami. To znači da je $|AB| = |CA'| = |CB'|$. S druge strane, dobivamo

$$N_cC \perp AB, AB \parallel A'B' \implies CN_c \perp A'B'$$

Dakle, pravac CN_c je simetrala stranice $\overline{A'B'}$. Analogno se pokazuje da je i AN_a simetrala $\overline{B'C'}$, te BN_b simetrala $\overline{A'C'}$.
Pozovimo se sada na teorem 2.4.1 za trokut $\triangle A'B'C'$ i dobivamo traženu tvrdnju.

$\square$

2.7 Poligoni i površine

U odjeljku o četverokutima smo se bavili specifičnim zatvorenim poligonijalnim linijama koje sastoje od četiri dužine. Sada ćemo se baviti poopćenim slučajem.

Teorem 2.7.1. ***(Jordan)*** *Svaka zatvorena poligonalna linija L dijeli ravninu na točno dva područja. Jedno je neomeđeno i zovemo ga* ***vanjština****, a drugo je omeđeno i zovemo ga* ***poligon*** *ili unutrašnjost od L.*

Dokaz prethodnog teorema je djelomično kombinatoran i izrazito sofisticiran i može se naći u [1]. Bitna je napomena da skup zovemo omeđenim ako postoji kružnica takva da se cio skup nalazi u toj kružnici. Također, područjem smatramo skup takav da za svake dvije točke postoji poligonalna linija koja ih spaja, a leži unutar tog skupa.

Definicija 2.7.1. Neka su p i q okomiti pravci u ravnini M. Sa $\mathcal{P}$ označimo skup svih pravokutnika sa stranicama paralelnim s p i q. Za pravokutnik $A \in \mathcal{P}$ sa stranicama a i b definiramo njegovu **površinu** kao

$$\mu(A) := a \cdot b$$

Nekada ćemo pisati i $P(A) = \mu(A)$.

Definicija 2.7.2. Skup $S \subset M$ je **jednostavan** ako za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, gdje su $P_i \in \mathcal{P}$ u parovima disjunktni pravokutnici ili imaju u presjeku točno jednu dužinu ili točno jednu točku. Definirajmo površinu od S kao

$$\mu(S) := \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Definicija 2.7.3. Neka je skup $A \subset M$ proizvoljan podskup ravnine. Definiramo sada skup svih jednostavnih skupova sa $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(M)$.

$$\mu_+(A) := \inf\{\mu(S) : S \in \mathcal{S}, A \subset S\}$$

$$\mu_-(A) := \sup\{\mu(S) : S \in \mathcal{S}, S \subset A\}$$

Ako je $\mu_+(A) = \mu_-(A)$, kažemo da je A **izmjeriv**. Njegovu površinu definiramo kao

$$\mu(A) := \mu_+(A) = \mu_-(A)$$

Naravno, jasno je da nemaju svi ekvipotentni skupovi jednaku površinu. Štoviše, svaka dva pravokutnika su ekvipotentni, no imaju različite površine. Drugi dobar primjer je da postoji bijekcija $f : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ definirana tako da za $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ i $y = 0.y_1y_2y_3\dots$ vrijedi

$$f(x,y) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$$

Nadalje, relativno je očito da je $\mu(\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle) = 1$, dok je $\mu(\langle 0,1\rangle) = 0$.
Zamijetimo da je zapravo definicija površine ovdje kreirana blago analitički. Naime, primijetimo da ova definicija površine jako podsjeća na Riemannov integral. Naravno, postoji aksiomatsko zasnivanje površine, no to bi ovom materijalu dalo nepotrebnu i preveliku širinu pa ćemo svojstva funkcije površine navesti kao zanimljivost.

Alternativna definicija površine: Neka je $\mathcal{A}$ skup svih poligona u ravnini (uključujući prazan skup).
Površina na skupu $\mathcal{A}$ je funkcija $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s ovim svojstvima:

(A1) $p(\Pi) \geq 0, \forall \Pi \in \mathcal{A}$

(A2) $p(\Pi_1 + \Pi_2) = p(\Pi_1) + p(\Pi_2), \forall \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{A}, \Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$

(A3) $\Pi_1 \cong \Pi_2 \implies p(\Pi_1) = p(\Pi_2), \forall \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{A}$

(A4) Postoji barem jedan kvadrat K sa stranicom 1 takav da je $p(K) = 1$.

Sasvim je jasno iz (A3) i (A4) da je površina svakog kvadrata stranice 1 jednaka 1. Nadalje, funkcija je definirana slično kao mjera kuta, iz (A1) i (A2) slijedi da je monotono rastuća. Može se analitičkim metodama dokazati da je ta definicija površine ekvivalentna onoj ranije danoj. Mi ćemo tvrdnje (P1)-(P4) koristiti kao aksiome.

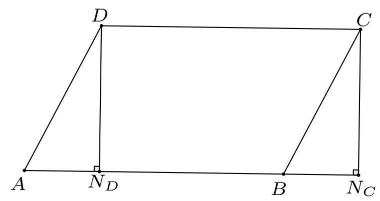
Radi razumijevanja površine često je korisno razmišljati o tome koliko je skup ograničen. Naime, ako pretpostavimo da neki skup ima površinu, aproksimacija pronalaženjem pravokutnika koji ga sadrži i pravokutnika kojeg taj skup sadrži daje interval u kojem se nalazi tražena površina. Primjerice, svaka točka $A \in M$ ima površinu nula. Naime, svaka točka stane u proizvoljno malen kvadrat, pa je njena površina infimum površina svih kvadrata u koje stane, odnosno 0. Analogno, bilo koji konačan skup točaka ima površinu 0.

Teorem 2.7.2. *Površina paralelograma sa stranicom a i visinom na tu stranicu V_a je*

$$\mu(ABCD) = a \cdot V_a$$

Dokaz. Neka su N_C i N_D nožišta visina iz C i D na pravac AB. Tada je

$$|N_DD| = |N_CC| = V_a$$



Kako je $AD \parallel BC$, vrijedi $\sphericalangle DAN_D = \sphericalangle CBN_C$, a $\sphericalangle DN_DA = \sphericalangle CN_CB = \frac{\omega}{2}$ pa po (K-S-K) teoremu vrijedi

$$\triangle AN_DD \cong \triangle BN_CC \implies \mu(\triangle AN_DD) = \mu(\triangle BN_CC)$$

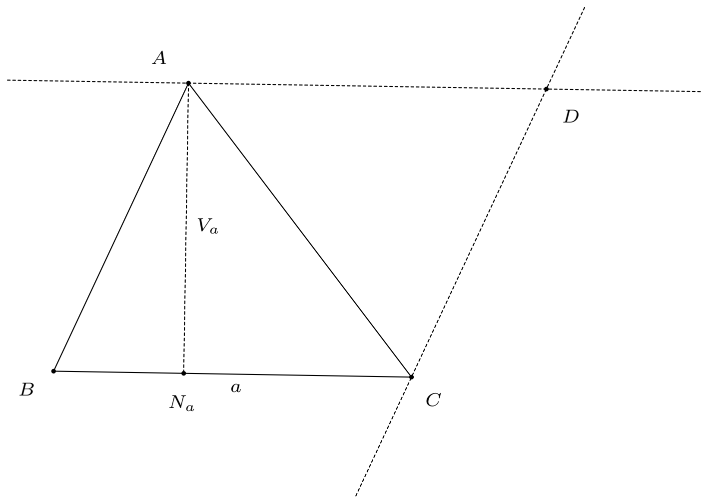
Koristeći tvrdnje (A1-A4):

$$\mu(ABCD) = \mu(\triangle AN_DD) + \mu(N_DBCD) = \mu(\triangle BN_CC) + \mu(N_DBCD) = \mu(N_DN_CCD) = a \cdot V_a$$

□

Korolar 2.7.1. *Površina trokuta $\triangle ABC$ sa stranicom a i visinom V_a je $\mu(\triangle ABC) = \frac{a \cdot V_a}{2}$.*

Dokaz. Neka je p_c pravac koji prolazi točkom C i paralelan je s AB. Neka je p_a pravac koji prolazi točkom A i paralelan je s BC. Neka je $p_c \cap p_a = \{D\}$.



Sada je $ABCD$ paralelogram po konstrukciji.

$$BC \parallel AB \implies \sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$$

$$AB \parallel CD \implies \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$$

Pošto dijele stranicu $\overline{AC}$, po (K-S-K) teoremu

$$\triangle ABC \cong \triangle ACD$$

$$\implies aV_a = \mu(ABCD) = \mu(\triangle ABC) + \mu(\triangle ACD) = 2\mu(\triangle ABC)$$

$$\implies \mu(\triangle ABC) = \frac{aV_a}{2}$$

□

Korolar 2.7.2. *Površina pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ s pravim kutom u vrhu C je*

$$\mu(\triangle ABC) = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2}$$

Dokaz. Stranica $\overline{AC}$ je upravo visina iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. $\square$

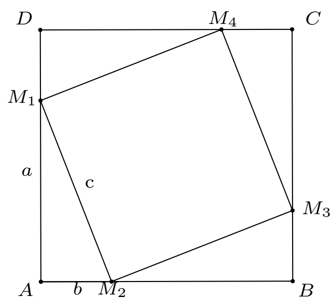
Teorem 2.7.3. ***(Pitagorin teorem)*** *Neka je dan trokut $\triangle ABC$. Onda vrijedi:*

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \iff \sphericalangle ACB = \frac{\omega}{2}$$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da u svakom pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ s pravim kutom u C vrijedi identitet $|AB|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$. Označimo $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$.
Neka je $ABCD$ kvadrat duljine stranice $a + b$.
Definirajmo sada točku $M_1 \in \overline{AD}$ takvu da je $|AM_1| = a$. Tada je očito

$$|M_1D| = |AD| - |AM_1| = (a + b) - a = b$$

Nadalje, neka je $M_2 \in \overline{AB}$ takva da $|M_2B| = a$, $M_3 \in \overline{BC}$ takva da $|M_3C| = a$ i $M_4 \in \overline{CD}$ takva da $|DM_4| = a$. Također, $|DM_1| = |AM_2| = |BM_3| = |CM_4| = b$.



Pošto su u vrhovima A, B, C, D pravi kutovi, po (S-K-S) teoremu vrijedi:

$$\triangle AM_2M_1 \cong \triangle BM_3M_2 \cong \triangle CM_4M_3 \cong \triangle DM_1M_4 \cong \triangle ABC$$

Zaključujemo da je $|M_1M_2| = |M_2M_3| = |M_3M_4| = |M_4M_1| = c$. Pošto je $\sphericalangle M_1DM_4 = \frac{\omega}{2}$, onda je i $\sphericalangle DM_1M_4 + \sphericalangle DM_4M_1 = \frac{\omega}{2}$.
Zbog ranije navedene sukladnosti $\sphericalangle DM_4M_1 = \sphericalangle AM_1M_2$, što s prethodnom jednakošću daje

$$\sphericalangle AM_1M_2 + \sphericalangle DM_1M_4 = \frac{\omega}{2} \implies \sphericalangle M_2M_1M_4 = \frac{\omega}{2}$$

Analogno se pokaže i za preostala tri kuta, što znači da je $M_1M_2M_3M_4$ kvadrat stranice c.
Zbog aditivnosti funkcije površine vrijedi:

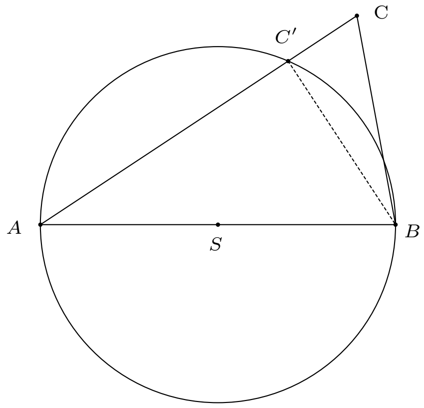
$$(a + b)^2 = \mu(ABCD) = 4\mu(\triangle AM_2M_1) + \mu(M_1M_2M_3M_4) = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

$$\implies a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\implies a^2 + b^2 = c^2$$

Drugi ćemo smjer dokazati pretpostavljajući suprotno. Pretpostavimo da postoji trokut $\triangle ABC$ za koji vrijedi $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, no $\sphericalangle BCA \neq \frac{\omega}{2}$.
Nacrtajmo kružnicu s promjerom AB. Prema Talesovom se teoremu na kružnom luku iznad $\overline{AB}$ nalaze sve točke T takve da je $\sphericalangle ATB = \frac{\omega}{2}$. Sada problem rastavljamo na dva slučaja.

Slučaj 1: Stranica $\overline{AC}$ siječe kružnicu u još jednoj točki osim A.
Označimo tu točku s C'. Neka je sada $|AC| = b, |AB| = c, |BC| = a, |BC'| = y, |CC'| = x$.



Po Talesovom teoremu $BC' \perp AC$, pa su trokuti $\triangle AC'B$ i $\triangle C'BC$ pravokutni. Onda prema prethodno dokazanoj tvrndji vrijedi:

$$|AC'|^2 + |C'B|^2 = |AB|^2 \iff (b-x)^2 + y^2 = c^2$$

$$|BC'|^2 + |CC'|^2 = |BC|^2 \iff y^2 + x^2 = a^2 \iff y^2 = a^2 - x^2$$

Uvrštavanjem $y^2 = a^2 - x^2$ i $a^2 + b^2 = c^2$ u prvu jednadžbu dobivamo

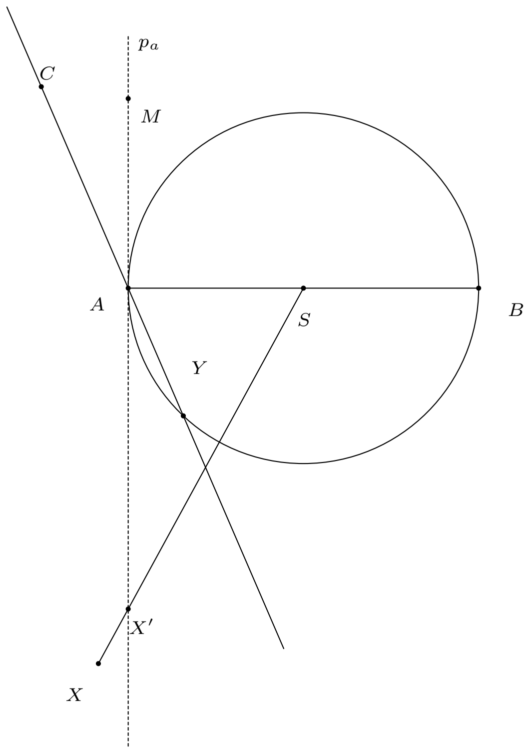
$$b^2 - 2xb + x^2 + a^2 - x^2 = a^2 + b^2 \implies 2xb = 0 \implies x = 0 \implies C = C'$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom.

Slučaj 2: Stranica $\overline{AC}$ siječe kružnicu samo u A.
Ukoliko stranica $\overline{BC}$ siječe kružnicu u nekoj drugoj točki primjenimo argument prvog slučaja. Ukoliko niti jedna dužina ne siječe kružnicu osim u krajnjim točkama, promotrimo polupravce Ac i Bc. Ukoliko niti jedan od tih polupravaca ne siječe kružnicu osim u točkama A i B, znači da su i u vrhu A i u vrhu B trokuta $\triangle ABC$ tupi kutovi što daje kontradikciju sa činjenicom da je suma kutova trokuta ispružen kut.
Tu tvrdnju argumentiramo na sljedeći način:
Neka je p_a tangenta na kružnicu u točki A. Pošto je $\overline{AB}$ promjer kružnice, središte se nalazi na njemu, pa je $AB \perp p_a$. Neka je S središte kružnice. Neka je dana točka X koja se nalazi u suprotnoj poluravnini od S. Tada je $\overline{SX} \cap p_a = \{X'\}$. Kako je $|SA| \leq |SQ|, \forall Q \in p_a$, onda je

$$|SX| = |SX'| + |X'X| \geq |SA| + |XX'| > |SA| = r$$

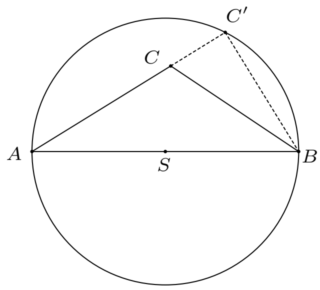
Znači,ne postoji niti jedna točka na kružnici sa suprotne strane pravca p_a u odnosu na središte. Slučaj kada je polupravac $Ac \subset p_a$ je trivijalan pa ga izostavljamo. Kada pravac AC nije tangenta, a siječe kružnicu, onda ju siječe u dvije točke. Ukoliko polupravac Ac ne siječe kružnicu u točki osim A, onda ju mora sijeći $Ay = AC \backslash Ac \cup \{a\}$, u nekoj točki Y.



Pošto se sve točke polupravca Ay, osim A, nalaze u istoj poluravnini s obzirom na pravac p_a, onda se moraju nalaziti u istoj poluravnini kao i središte kružnice zbog ranijeg argumenta. Tada se sve točke polupravca Ac moraju nalaziti u suprotnoj poluravnini. Uzmimo neku točku M na pravcu p_a s iste strane pravca AB kao i točka C. Tada je:

$$S_{\sphericalangle BAC} = S_{\sphericalangle BAM} \cup S_{\sphericalangle MAC}$$
$$\iff \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MAC = \frac{\omega}{2} + \sphericalangle MAC > \frac{\omega}{2}$$

Ako neki od tih polupravaca, neka je to Ac, siječe kružnicu u točki C', onda imamo sljedeću situaciju:



Neka je sada $|AC| = b, |AB| = c, |BC| = a, |BC'| = y, |CC'| = x$. Trokuti $\triangle BC'C$ i $\triangle ABC'$ su pravokutni po Talesovom teoremu pa za njih vrijedi:

$$|BC'|^2 + |CC'|^2 = |BC|^2 \iff y^2 + x^2 = a^2 \iff y^2 = a^2 - x^2$$
$$|AC'|^2 + |BC'|^2 = |AB|^2 \iff (b+x)^2 + y^2 = c^2$$

Uvrštavanjem prve jednakosti u drugu, te primjenom $a^2 + b^2 = c^2$ dobivamo

$$b^2 + 2bx + x^2 + a^2 - x^2 = c^2 \iff 2bx = 0 \implies x = 0 \implies C = C'$$

što nas ponovo dovodi do kontradikcije. Postoji i alternativni način dokazivanja suprotnog smjera. Naime, ako postoji pravokutan trokut $\triangle ABC$ za njega vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Ukoliko za trokut $\triangle A'B'C'$ vrijedi $a' = a, b' = b$ i $a'^2 + b'^2 = c^2$, onda je i $c' = c$ pa su ta dva trokuta sukladana po (S-S-S) teoremu, te su im i kutevi u vrhu C, odnosno C', jednaki: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B' = \frac{\omega}{2}$.

□

Propozicija 2.7.1. ***(Heronova formula)*** *Površina $\triangle ABC$ sa stranicama $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$ iznosi*

$$\mu(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je s ***poluopseg*** *koji iznosi*

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Dokaz. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da $\triangle ABC$ ima šiljaste kutove u B i C. Neka je N_a nožište visine iz točke A na BC. Zbog prethodne pretpostavke $N_a \in \overline{BC}$. Označimo visinu s $v_a = |AN_a|$. Neka je $x = |BX|$. Zbog pravokutnosti $\triangle ABN_a$ i $\triangle AN_aC$ vrijedi

$$v_a^2 = c^2 - x^2$$
$$v_a^2 = b^2 - (a-x)^2$$

Kada izjednačimo te dvije jednakosti dobivamo:

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 \implies c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \implies x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$v_a^2 = c^2 - x^2 = (c-x)(c+x) = \left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) =$$

$$\left(\frac{b^2 + 2ac - a^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) = \left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right)\left(\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4a^2}$$

$$\iff 4(av_a)^2 = (a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)(a+b+c)$$

$$\iff \frac{(av_a)^2}{4} = \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot \frac{a+b+c-2b}{2} \cdot \frac{a+b+c-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

$$\implies \mu(\triangle ABC) = \frac{av_a}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

□

2.8 Sličnost trokuta

Neka su dani različiti pravci l i l' u ravnini. Iz svake točke pravca l možemo spustiti jedinstvenu okomicu na pravac l'. Definirajmo fukciju koju nazivamo **ortogonalna projekcija**:

$$f : l \to l'$$

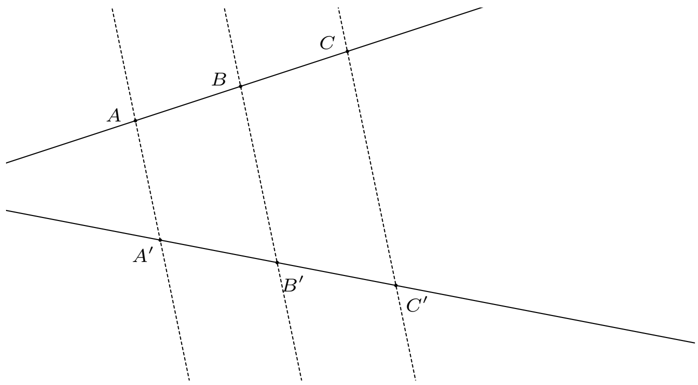
$$f(P) = P' \qquad \forall P \in l$$

gdje je P' nožište okomice iz P na l'.

Možemo poopćiti definiciju ortogonalne projekcije i tako dobiti takozvanu **paralelnu projekciju**. Neka su dani različiti pravci l i l', te neka njihova presječnica t. Te neka je A sjecište t i l, a A' sjecišta l' i t.

$$f : l \to l'$$

$$f(P) = P', \qquad \forall P \in l, P' \in l' : PP' \parallel AA'$$



Nekad ćemo se na to preslikavanje referirati kao na preslikavanje pravca l na l' u smjeru t. Glavna svojstva paralelnog projiciranja dana su u sljedećem teoremu:

Teorem 2.8.1. *Neka je dano projiciranje $f : l \to l'$ takvo da $Pf(P) \not\parallel l$. Tada za tu projekciju vrijedi:*

(a) *Projekcija f je bijekcija.*

(b) *Paralelno projiciranje čuva relaciju ležati između, odnosno, ako je $A, B, C \in l : A \leq B \leq C$, onda je i*

$$f(A) \leq f(B) \leq f(C)$$

(c) *f čuva udaljenosti, odnosno, ako*

$$A, B, C, D \in l : |AB| = |CD|$$

$$\implies |f(A)f(B)| = |f(C)f(D)|$$

Dokaz. (a) Ako je pravac po čijim paralelama preslikavamo paralelan s pravcem l, onda postoji takvo preslikavanje, no ono svaku točku pravca l šalje u sjecište pravaca l i l', pa je postoji preslikavanje koje po paralelama pravca l bilo koju drugu točku pravca l' preslikava na l. U suprotnom, postoji isto takvo preslikavanje s l' na l u smjeru t, označimo ga s f'. Onda vrijedi

$$f'(f(P)) = P \qquad \forall P \in l$$

pa je i preslikavanje bijektivno.

(b) Neka su $A, B, C \in l$ točke takve da vrijedi $A \leq B \leq C$. Označavat ćemo $Af(A) = t_a, Bf(B) = t_b, Cf(C) = t_c$, te $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$. Zbog definicije preslikavanja

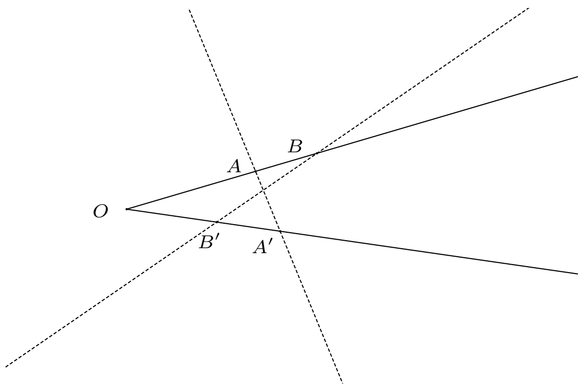
$$t_a \parallel t_b \parallel t_c$$

Ako je $l \parallel l'$, onda je $A'B'BA$ paralelogram pa je $|AB| = |A'B'|$. Analogno se dobiva $|AC| = |A'C'|$ i $|BC| = |B'C'|$. Onda, zbog nejednakosti trokuta,

$$|AB| + |BC| = |AC| \iff |A'B'| + |B'C'| = |A'C'| \iff B' \in \overline{A'C'}$$

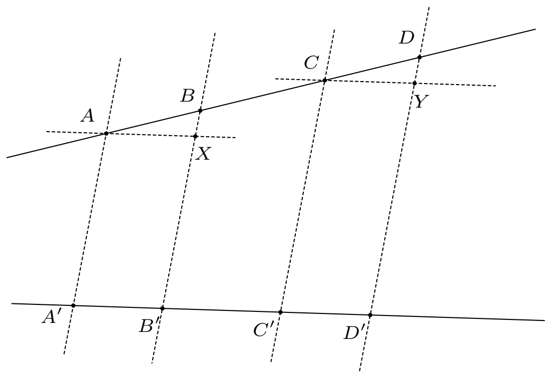
Neka sada pravci l i l' nisu paralelni. Onda neka je $l \cap l' = \{O\}$.

Pretpostavimo da vrijedi $B' < A'$ ili $C' < B'$. Sasvim je svejedno koji slučaj proučavamo pa neka je $B' < A'$.



Proučimo sada trokut $\triangle OA'A$. Pravac BB' ne siječe stranicu OA jer $A \leq B$. Pravac BB' ne siječe niti AA' jer su pravci t_a i t_b paralelni. Pošto pravac BB' siječe samo stranicu OA', ulazimo u kontradikciju s Paschovim aksiomom.

(c) Ako su pravci l i l' paralelni, onda se slučaj rješava istim argumentom kao i u (b). Pretpostavimo sada da $l \not\parallel l'$. Povucimo sada pravce paralelne s l' kroz A i C, redom p_1, p_2. Neka su točke X i Y takve da je $p_1 \cap BB' = \{X\}$ i $p_2 \cap DD' = \{Y\}$.



Kako je $AX \parallel A'D' \parallel CX$, prema propoziciji 1.6.7 vrijedi da je

$$\sphericalangle BAX = \sphericalangle DCY$$

Isto tako, $BB' \parallel DD'$, pa je i

$$\sphericalangle ABX = \sphericalangle CDY$$

Pošto je pretpostavka $|AB| = |CD|$, onda su po (K-S-K) teoremu vrijedi

$$\triangle AXB \cong \triangle CYD \implies |AX| = |CY|$$

Kako su $A'B'XA$ i $C'D'YC$ paralelogrami prema konstrukciji,

$$|AX| = |A'B'|, |CY| = |C'D'| \implies |A'B'| = |C'D'|$$

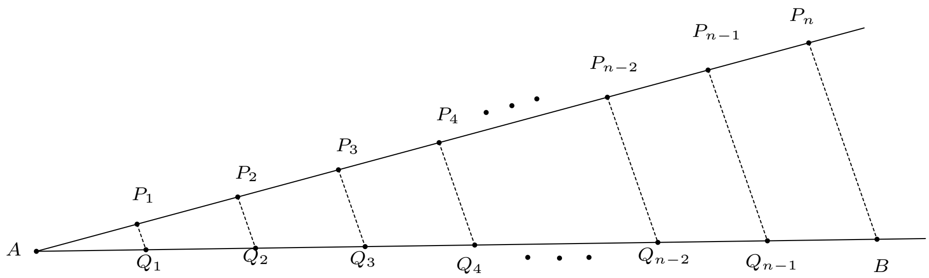
□

Primjer 2.8.1. *Podijelite dužinu $\overline{AB}$ na $n \in \mathbb{N}$ jednakih djelova.*

Rješenje. Ovaj primjer dobro ilustrira primjenu prethodnog teorema. Naime, povucimo neki pravac p kroz A, koji je različit od pravca AB. Sada uzmimo u šestar bilo koju duljinu d i nanesimo ju n puta na pravac p, tako da stvorimo točke $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ takve da

$$|AP_1| = |P_1P_2| = |P_3P_4| = \cdots = |P_{n-1}P_n| = d$$

Sada povucimo pravac BP_n, te povucimo pravce $p_i, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ takve da je $p_i \parallel P_nB, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ i $P_i \in p_i, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$.



Neka označimo sada presjek pravca p_i sa pravcem AB točkom Q_i.
Prema prethodnom teoremu vrijedi

$$|AQ_1| = |Q_1Q_2| = |Q_2Q_3| = \cdots = |Q_{n-1}B| = \frac{|AB|}{n}$$

pa smo gotovi.

Prethodne tvrdnje mogle su direktno biti dokazane iz tvrdnji koje slijede, no svejedno su postupno dokazane jer ti dokazi ilustriraju drugi mogući pristup problemu. Bez korištenja površina, teorem koji slijedi se dokazuje pomoću analitičkih metoda.

Teorem 2.8.2. ***(Talesov teorem o proporcionalnosti)*** *Neka je $\sphericalangle xOy$ neki kut i a i b paralelni pravci koji presjecaju krakove tog kuta u točkama $A_x, A_y \in a$ i $B_x, B_y \in b$. Tada vrijede jednakosti:*

(a) $\frac{|OA_x|}{|OB_x|} = \frac{|OA_y|}{|OB_y|}$

(b) $\frac{|OA_x|}{|A_xB_x|} = \frac{|OA_y|}{|A_yB_y|}$

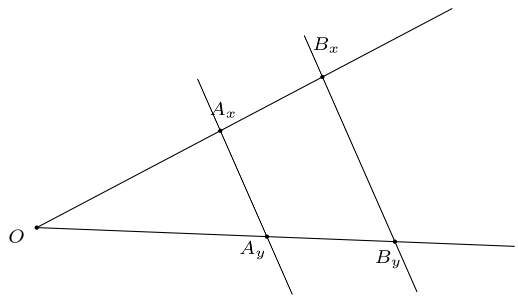
(c) $\frac{|OA_x|}{|OB_x|} = \frac{|A_xA_y|}{|B_xB_y|}$

Dokaz. Dokaz provodimo promatrajući površine.

$$\mu(\triangle OA_xB_y) = \mu(\triangle OA_xA_y) + \mu(\triangle A_xA_yB_y)$$

$$= \mu(\triangle OA_xA_y) + \frac{1}{2}|A_xA_y| \cdot d(B_x, a) = \mu(\triangle OA_xA_y) + \frac{|A_xA_y| \cdot d(B_x, a)}{2}$$

$$= \mu(\triangle OA_xA_y) + \mu(\triangle A_xA_yB_x) = \mu(\triangle OB_xA_y)$$



Uočimo da smo koristili tvrdnju $d(B_x, a) = d(B_y, a)$ koju temeljimo na činjenici da je $a \parallel b$ i ranije dokazanoj tvrdnji da su sve točke na pravcu jednako udaljene od nekog paralelnog pravca. Sada dobivamo omjer

$$\frac{\mu(\triangle OA_xA_y)}{\mu(\triangle OA_xB_y)} = \frac{\mu(\triangle OA_xA_y)}{\mu(\triangle OB_xA_y)} \iff \frac{\frac{1}{2}|OA_y|d(A_x, Oy)}{\frac{1}{2}|OB_y|d(A_x, Oy)} = \frac{\frac{1}{2}|OA_x|d(A_y, Ox)}{\frac{1}{2}|OB_x|d(A_y, Ox)}$$

$$\implies \frac{|OA_x|}{|OB_x|} = \frac{|OA_y|}{|OB_y|}$$

i time smo dokazali (a).
Iduću jednakost dokazujemo koristeći (a):

$$\frac{|A_xB_x|}{|OA_x|} = \frac{|OB_x| - |OA_x|}{|OA_x|} = \frac{|OB_x|}{|OA_x|} - 1 = \frac{|OB_y|}{|OA_y|} - 1 = \frac{|A_yB_y|}{|OA_y|}$$

Sada se iz te jednakosti trivijalno dobivamo (b).
Neka je sada q pravac koji prolazi kroz A_x i paralelan je s OA_y. Neka je $\{B\} = q \cap b$. Sada pomoću tvrdnje (a), za kut $\sphericalangle OB_xB_y$ i pravce p i OB_y dobivamo:

$$\frac{|A_xB_x|}{|OB_x|} = \frac{|QB_x|}{|B_xB_y|}$$

Slično kao ranije zaključujemo:

$$\frac{|A_xB_x|}{|OB_x|} = 1 - \frac{|OA_x|}{|OB_x|}$$

Isto tako

$$\frac{|QB_x|}{|B_xB_y|} = 1 - \frac{|QB_y|}{|B_xB_y|} = 1 - \frac{|A_xA_y|}{|B_xB_y|}$$

Zadnja jednakost je argumentirana činjenicom da je $A_xQB_yA_y$ paralelogram. Sada izjednačavanjem tih izraza pomoću $\frac{|A_xB_x|}{|OB_x|} = \frac{|QB_x|}{|B_xB_y|}$ dobivamo

$$1 - \frac{|OA_x|}{|OB_x|} = 1 - \frac{A_xA_y}{B_xB_y} \implies \frac{|OA_x|}{|OB_x|} = \frac{|A_xA_y|}{|B_xB_y|}$$

□

Definicija 2.8.1. Dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su **slična** ako postoji bijekcija $f : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$ takva da $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$ povlači $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$ i

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \lambda$$

Tada λ nazivamo **koeficijent sličnosti**, a činjenicu da su trokuti slični zapisujemo kao

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

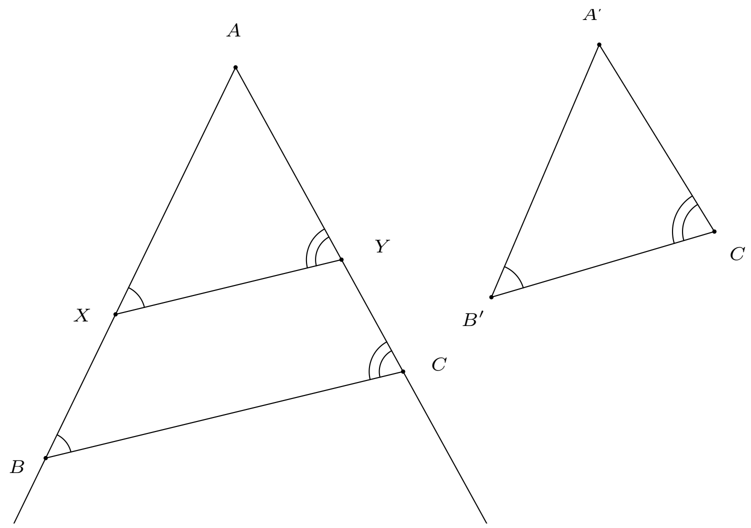
Sličnost trokuta je relacija ekvivalencije. Sasvim je jasno da je za $\lambda = 1$ svaki trokut sebi sličan. Tako, ukoliko je trokut $\triangle ABC$ sličan trokutu $\triangle XYZ$ s koeficijentom λ, onda je trokut $\triangle XYZ$ sličan trokutu $\triangle ABC$ s koeficijentom $\frac{1}{\lambda}$. I na koncu konca, ako je $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ s koeficijentom λ, a $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ s koeficijentom μ, onda je lako provjeriti da $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$ s koeficijentom $\lambda\mu$.
Sada navodimo četiri teorema koji navode dovoljne uvjete za sličnost dvaju trokuta.

Teorem 2.8.3. ***(K-K sličnost)***
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Dokaz. Neka su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $\alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta'$. Iz činjenice da je zbroj kutova u trokutu jednak ispruženom kutu zaključujemo da je $\gamma = \gamma'$.
Dodajmo sada točke X, Y redom na polupravce Ab, Ac tako da je $|AX| = c', |AY| = b'$. Prema (S-K-S) teoremu vrijedi

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle AXY$$

To znači da je $\sphericalangle AXY = \beta' = \beta$ i $\sphericalangle AYX = \gamma' = \gamma$.



Znači da je $XY \parallel BC$. Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti iz (a) dobivamo

$$\lambda = \frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AY|}{|AC|}$$

a iz (b) dobivamo

$$\lambda = \frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|XY|}{|BC|}$$

pa je $\triangle ABC \sim \triangle AXY$, a pošto $\triangle AXY \cong \triangle A'B'C'$ onda je i $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

□

Napomena: Sada dokazujemo četiri teorema o sličnosti koji su u pravilu toliko slični da će u nekim detalji biti izostavljeni. Ukoliko nešto nije jasno preporučam raspisivanje tih detalja. Za stranice (a, b, c) i (a', b', c') ćemo govoriti da su proporcionalne ako $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Teorem 2.8.4. ***(S-S-S sličnost)*** *Dva su trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne.*

Dokaz. Pretpostavimo sada da za neke trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vrijedi

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Nacrtajmo sada točku $X \in Ab$ takvu da je $|AX| = c'$. Şada povucimo paralelu s BC kroz X. Ta paralela siječe BC u nekoj točki Y zbog Paschovog aksioma. Sada po Talesovom teoremu o proporcionalnosti, analogno prethodnom dokazu, vrijedi

$$\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{|AC|}{|AY|} = \frac{|BC|}{|XY|} \iff \frac{c}{c'} = \frac{b}{|AY|} = \frac{a}{|XY|}$$

$$\implies |AY| = b', |XY| = a'$$

sada vrijedi

$$\triangle AXY \cong \triangle A'B'C'$$

prema (S-S-S) teoremu. pa je $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$, te vrijedi

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

□

Teorem 2.8.5. ***(S-K-S sličnost)*** *Dva trokuta su slična ako su im dvije stranice proporcionalne i kutovi između njih jednaki.*

Dokaz. Pretpostavimo sada da za neke trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vrijedi

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},\ \alpha = \alpha'$$

Nacrtajmo sada točku $X \in Ab$ takvu da je $|AX| = c'$. Şada povucimo paralelu s BC kroz X. Ta paralela siječe BC u nekoj točki Y zbog Paschovog aksioma. Sada po Talesovom teoremu o proporcionalnosti, analogno prethodnom dokazu, vrijedi

$$\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{|AC|}{|AY|} \iff \frac{c}{c'} = \frac{b}{|AY|}$$

Zaključujemo $|AY| = b'$. To znači da je

$$\triangle AXY \cong \triangle A'B'C'$$

Sada analogno, prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti možemo dobiti

$$|XY| = c'$$

Jednakost kutova trokuta $\triangle AXY$ i $\triangle ABC$ vrijedi zbog paralelnosti, pa dobivamo

$$\triangle ABC \sim \triangle AXY$$

i konačno

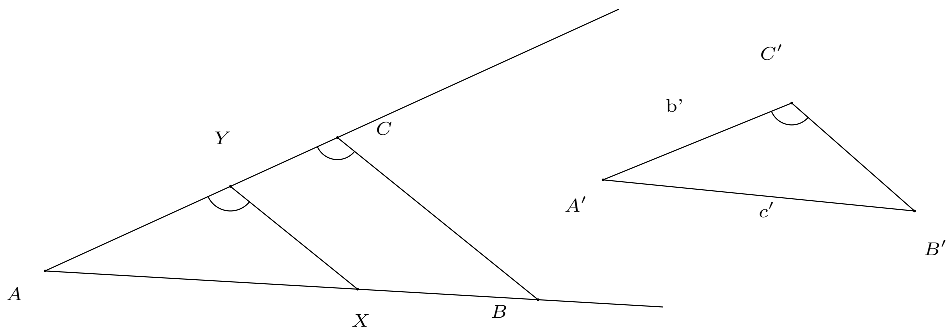
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

□

Teorem 2.8.6. ***(S-S-K sličnost)***
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a kutovi nasuprot većim stranicama jednaki.

Dokaz. Uzmimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takve da je $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, neka je $c > b$ i $\gamma = \gamma'$. Nacrtajmo sada točku $X \in Ab$ takvu da je $|AX| = c'$. Şada povucimo paralelu s BC kroz X. Ta paralela siječe BC u nekoj točki Y zbog Paschovog aksioma. Sada po Talesovom teoremu o proporcionalnosti, analogno prethodnom dokazu, vrijedi

$$\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{|AC|}{|AY|} \iff \frac{c}{c'} = \frac{b}{|AY|}$$



Zaključujemo $|AY| = b'$. Kako je $XY \parallel BC$, onda je $\sphericalangle AYX = \sphericalangle ACB = \gamma = \gamma'$. Prema teoremu (S-S-K)

$$\triangle AXY \cong \triangle A'B'C'$$

Također, po Talesovom teoremu o proporcionalnosti vrijedi $\frac{c}{c'} = \frac{a}{|XY|}$, a pošto je zbog sukladnosti $|XY| = a'$, onda je $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, a jednakost kutova vrijedi zbog sukladnosti $\triangle AXY \cong A'B'C'$ i paralelnosti $XY \parallel BC$.

□

Propozicija 2.8.1. *Ako vrijedi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ s koeficijentom λ, onda vrijedi*

$$\mu(\triangle ABC) = \lambda^2 \mu(\triangle A'B'C')$$

Dokaz. Kako su trokuti slični, vrijedi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \lambda$. Pošto za stranice vrijedi $a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c'$, za poluopseg mora vrijediti

$$\implies s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\lambda a' + \lambda b' + \lambda c'}{2} = \lambda s'$$

Sada Heronova formula daje:

$$\mu(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\lambda s'(\lambda s' - \lambda a')(\lambda s' - \lambda b')(\lambda s' - \lambda c')}$$

$$= \sqrt{\lambda^4 s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')} = \lambda^2 \mu(\triangle A'B'C')$$

□

Poglavlje 3

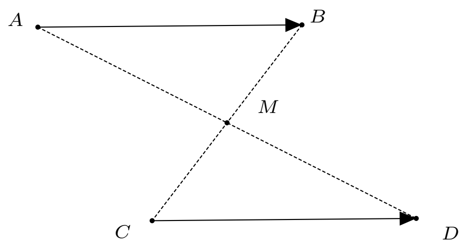
Vektorska algebra

3.1 Orijentirane dužine

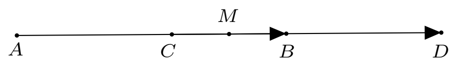
Definicija 3.1.1. Neka su dane točke $A, B \in M$. Uređeni par (A, B) nazivamo **orijentirana dužina** i označavamo s $\overrightarrow{AB}$. A je početak, a B kraj orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$.

Uočimo da, za razliku od običnih dužina, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ osim kada je $A = B$.

Definicija 3.1.2. Definiramo relaciju na skupu $M \times M$ orijentiranih dužina za koju vrijedi $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ ako i samo ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište.



Uočimo i da su orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ u relaciji ako i samo ako je $ACDB$ paralelogram čiji su vrhovi dani tim redoslijedom, ili su na istom pravcu te vrijedi $A < B \iff C < D$.



Propozicija 3.1.1. *Neka su A, B, C, D točke takve da je $A \neq B \wedge C \neq D$. Ako je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, onda je $|AB| = |CD|$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $C \in AB$. Pošto se polovišta $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ podudaraju, onda i $D \in AB$. Dakle, ukoliko se jedna od točaka nalazi na pravcu AB, onda se i druga točka nalazi na tom pravcu. Nadalje, pretpostavimo da je $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{O\}$. U tom slučaju imamo četverokut $ACBD$ čije su dijagonale $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ pa su $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ stranice tog četverokuta koje se

ne sijeku. Ukoliko nije slučaj da se dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku, niti jedna od točaka C, D leži na AB, onda je $ABCD$ četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju, što znači da je paralelogram. Dakle, $|AB| = |CD|$.
Preostaje slučaj kada je $AB = CD$. Neka je M polovište $\overline{AD}$, odnosno $\overline{BC}$. To znači da je $|AM| = |DM|$ i $|BM| = |MC|$. Sada se problem rastavlja na slučajeve, ovisno o rasporedu točaka A, B, C, D na pravcu. Primjerice, ako je $A < B < C < D$. Onda vrijedi

$$A < B < M < C < D \implies |AB| = |AM| - |BM| = |DM| - |CM| = |CD|$$

Također, za svaki slučaj gdje ne vrijedi $A < B \iff C < D$ se dobiva kontradikcija na sličan način. Primjerice, ako

$$B < C < D < A$$

onda se polovišta očito ne podudaraju jer su dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ disjunktne.

□

Korolar 3.1.1. *Neka su A, B, C, D točke takve da je $A \neq B \wedge C \neq D$, te vrijedi $A < B \iff C < D$. Ukoliko AB=CD i $|AB| = |CD|$, onda se polovišta $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ podudaraju, odnosno*

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$$

Dokaz. Dokaz ovog korolara je trivijalan obrat dijela dokaza prethodne propozicije kada je AB=CD. Pretpostavimo da je $|CD| = |AB|$. Uzmimo sada neki drugačiji slučaj. Recimo, neka je $A < C < B < D$. Neka je M polovište $\overline{BC}$. Tada vrijedi

$$|BM| = |MC|$$

Pošto je $|AB| = |CD|$, onda je i

$$|AM| = |AB| - |CM| = |CD| - |BM| = |DM|$$

Dakle, M je polovište $\overline{AD}$. □

Teorem 3.1.1. *Relacija $\equiv$ je relacija ekvivalencije na skupu $M \times M$.*

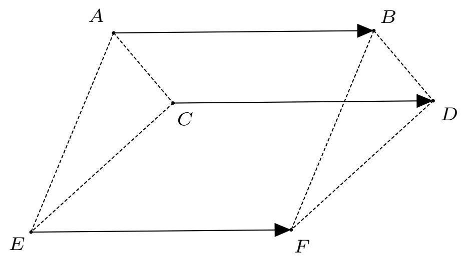
Dokaz. Refleksivnost relacije je sasvim očita. Također, ako $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ onda se polovišta dužina $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ podudaraju, ali to znači i da je $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$ po definiciji relacije.
Dokaz tranzitivnosti je najmanje trivijalan. Neka je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{EF}$.
Dokaz možemo rastaviti na slučajeve.

Slučaj 1: $AB = CD \wedge CD = EF$
Prema prethodnoj propoziciji $AB = CD \wedge \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \implies |AB| = |CD|$. Analogno, $|CD| = |EF|$. Dakle $AB = EF \wedge |AB| = |EF|$. Također, uređaj je očuvan, odnosno vrijedi $A < B \iff C < D \iff E < F$. To zajedno po prethodnom korolaru daje $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{EF}$.

Slučaj 2: $AB = CD \wedge CD \neq EF$
Prema prethodnoj propoziciji $EFDC$ je paralelogram, pa je $EF \parallel AB \wedge |EF| = |CD|$, a usto je i $|AB| = |CD|$, pa je $ABFE$ paralelogram, što znači da mu se polovišta dijagonala prepolavljaju pa je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

Analogno se rješava slučaj $AB \neq CD \wedge CD = EF$ i slučaj $AB \neq CD \wedge CD \neq EF \wedge EF = AB$

Slučaj 3: $AB \neq CD \wedge CD \neq EF \wedge AB \neq EF$
Prema prethodnoj propoziciji $ABDC$ i $ABFE$ su paralelogrami.



Zaključak je da je $ABFE$ paralelogram, pa slijedi i da je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{EF}$.

□

Definicija 3.1.3. Klase ekvivalencije relacije $\equiv$ zovemo **vektori**. Skup svih vektora ravnine M označavamo s

$$V^2 = (M \times M)/_{\equiv}$$

Vektore označavamo na sljedeći način:

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{XY} \in M \times M : \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{XY}\}$$

Propozicija 3.1.2. *Za svaki vektor $\vec{a} \in V^2$ i točku $A \in M$ postoji jedinstvena točka $B \in M$ takva da je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.*

Dokaz. Dokaz ćemo podijeliti na dokazivanje egzistencije i dokazivanje jedinstvenosti.
Egzistencija: Neka je $\overrightarrow{CD}$ neki reprezentant klase $\vec{a}$. Neka je točka M polovište dužine $\overline{AD}$. Sada neka je B točka na polupravcu Cm takva da je $|CB| = 2|CM|$. Tada je M ujedno i polovište dužine $\overline{CB}$, što znači da je

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$$

Jedinstvenost: Pretpostavimo da su $A, X, Y \in M$ točke takve da

$$\overrightarrow{AX} \equiv \overrightarrow{AY} \wedge X \neq Y$$

Tada vrijedi da dužine $\overline{AY}$ i $\overline{XA}$ imaju zajedničko polovište M. To znači da $X, Y \in AM$, nadalje, kako je M polovište obje dužine, i X i Y su na polupravcu Am.

$$|AX| = 2|AM| = |AY| \implies X = Y$$

$$\Longrightarrow\!\!\times\!\!\Longleftarrow$$

□

Promotrimo sada skup $\mathcal{O} \subset M \times M$, $\mathcal{O} = \{(A, A), A \in M\}$. Dokažimo da je to jedna od klasa ekvivalencije. Prvo, neka su dane neke dvije točke $A, B \in M$.
Tada je sasvim trivijalna tvrdnja da dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AB}$ dijele polovište. Dakle, $\forall a, b \in \mathcal{O}, a \equiv b$.
Sada pretpostavimo da postoje točke $A, X, Y \in M$ takve da je $X \neq Y$, ali $\overrightarrow{AA} \equiv \overrightarrow{XY}$. Po definiciji relacije $\equiv$, dužine $\overline{AX}$ i $\overline{AY}$ moraju imati isto polovište. Dokaz teče analogno dokazu jedinstvenosti u prethodnoj propoziciji. Tu klasu ćemo označavati s

$$\vec{0} = \{(A, A), A \in M\}$$

i nazivati **nul-vektor**.

3.2 Modul, smjer i orijentacija vektora

Definicija 3.2.1. **Modul vektora** $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ je udaljenost točaka svakog od njegovih reprezentanata. Označavamo:

$$|\vec{a}| = |AB|$$

Bitno je uočiti da je modul dobro definiran. To je direktna posljedica propozicije 3.1.1 koja govori o tome kako su udaljenosti točaka svih reprezentanata u klasi $\vec{a}$ jednake.
Primijetimo također da zbog definicije metrike u Euklidskoj ravnini vrijedi $|AB| \iff A = B$ pa zaključujemo da postoji točno jedan vektor modula 0. Radi se o nul-vektoru.

$$|\vec{0}| = 0$$

Kako je navedeno u odjeljku *Kutovi*, relacija paralelnosti pravaca u ravnini je relacija ekvivalencije. Sada možemo uvesti sljedeću definiciju:

Definicija 3.2.2. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih pravaca u ravnini M. Definiramo skup

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}/_{\|}$$

i nazivamo ga **skup smjerova** pravaca u ravnini M. Za neki pravac p, skup s_p naziva se **smjer pravca** p.

Definicija 3.2.3. **Smjer vektora** $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ je smjer pravca koji prolazi točkama A i B.

$$s_{\vec{a}} = s_{AB} \in \mathcal{S}$$

Pošto za svaka dva reprezentanta nekog vektora vrijedi da su im točke kolinearne, ili da čine paralelogram, sasvim je jasno da vrijedi

$$\overrightarrow{A'B'} \in \vec{a} = [\overrightarrow{AB}] \implies A'B' \parallel AB \implies A'B' \in s_{AB}$$

Definicija 3.2.4. Neka je $p \subset M$ neki pravac i s_p smjer pravca p. Sada neka je $S \subset V^2$ skup svih vektora čiji je smjer s_p. Uzmimo točku O u ravnini. Sada neka je definirana relacija ekvivalencije na sljedeći način:

$$[\overrightarrow{OA}] = \vec{a} \sim \vec{b} = [\overrightarrow{OB}] \iff B \in Oa$$

Svaka klasa te relacije se naziva **orijentacija vektora**.

Uočimo da za proizvoljni vektor ne možemo odrediti poimenice njegovu orijentaciju, već isključivo možemo za dva vektora istog smjera reći jesu li jednake ili suprotne orijentacije. Gornja definicija je izrazito precizna, te je korisno razjasniti ju na intuitivnoj razini. Kažemo, naime, da dva vektora $[\overrightarrow{OA}]$ i $[\overrightarrow{OB}]$ imaju istu orijentaciju ukoliko na pravcu OA točke A i B leže s iste strane točke O. Ukoliko leže sa suprotnih strana točke O kažemo da ti vektori imaju suprotnu orijentaciju. Uočavamo također da dva vektora $[\overrightarrow{AB}]$ i $[\overrightarrow{CD}]$ istog smjera imaju i istu orijentaciju ako je $ABDC$ trapez. Ovu tvrdnju nećemo dokazivati, no možete probati. Savjet: konstruirajte $\overrightarrow{AX} \in [\overrightarrow{CD}]$.

Propozicija 3.2.1. *Svaki vektor je jedinstveno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom.*

Dokaz. Neka je dana točka $O \in M$ u ravnini. Dokazat ćemo da možemo u točki O jedinstveno konstruirati reprezentant $\overrightarrow{OA}$ vektora $\vec{a}$ zadanog modulom, smjerom i orijentacijom.
Prvo, pošto je zadan neki smjer s_p za pravac $p \subset M$,
onda postoji točno jedan pravac $q || p \iff q \in s_p$ takav da je $O \in q$.

Nadalje, pošto je zadan modul $|\vec{a}| = r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, postoje točno dvije točke X i X' na pravcu q, po jedna na svakom polupravcu određenom točkom O, takve da je $|OX'| = |OX| = r$

Konačno, pošto je zadana orijentacija tog pravca (u odnosu na neki pravac istog smjera), a X i X' su s različitih strana točke O, možemo odabrati točno jednu od njih, $A \in \{X, X'\}$ takvu da je

$$\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$$

□

Korolar 3.2.1. *Za svaki vektor $\vec{A} = [\overrightarrow{AB}]$ postoji jedinstveni vektor $\vec{b}$ takav da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti smjer i modul, no različitu orijentaciju. Nadalje,*

$$\vec{b} = [\overrightarrow{BA}]$$

Dokaz. Promotrimo vektor $\vec{b} = [\overrightarrow{BA}]$. Pošto je $|\vec{a}| = |AB| = |BA| = \vec{b}$, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti modul. Oba su vektora očito smjera s_{AB}. Na koncu, uzmimo točku $X \in Ab$ takvu da je $|XA| = 2|AB|$. Tada je očito B polovište dužine $\overline{AX}$. Isto tako, definira se da je B polovište dužine $\overline{BB}$, pa je onda

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{BX}$$

Sada promatramo orijentacije po definiciji, i vidimo da su točke A i X s različite strane točke B, pa su vektori $[\overrightarrow{BA}]$ i $[\overrightarrow{BX}] = [\overrightarrow{AB}]$ suprotni.

□

Definicija 3.2.5. Neka je zadan vektor $\vec{a} \in V^2$. Definiramo **suprotan vektor** vektoru $\vec{a}$ kao vektor istog smjera i iznosa, no suprotne orijentacije. Označavamo ga s $-\vec{a}$.

3.3 Zbrajanje vektora

Propozicija 3.3.1. *Neka vrijedi* $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'}$ *i* $\overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{B'C'}$*. Onda vrijedi i*

$$\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{A'C'}$$

Dokaz. Uočimo da ako je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'}$, znači da dužine $\overline{AB'}$ i $\overline{BA'}$ imaju isto polovište, no to također znači (pošto je $A'B'BA$ paralelogram) da je

$$\overrightarrow{AA'} \equiv \overrightarrow{BB'}$$

Analogno,

$$\overrightarrow{BB'} \equiv \overrightarrow{CC'} \implies \overrightarrow{AA'} \equiv \overrightarrow{CC'}$$

Sada istim argumentom kao ranije dobivamo tvrnju koju želimo dokazati:

$$\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{A'C'}$$

□

Prethodna propozicija nam dozvoljava da na sljedeći način definiramo operaciju na skupu vektora:

Definicija 3.3.1. Neka je $+ : V^2 \times V^2 \to V^2$ preslikavanje definirano na sljedeći način:

$$[\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$

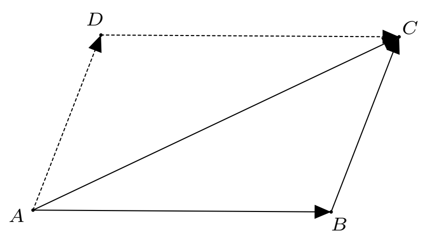
To preslikavanje nazivamo **zbrajanje vektora**.

Primijetimo da smo dokazali da svaka klasa ima jedinstvenog reprezentanta koji počinje u proizvoljnoj točki ravnine. Dakle, ako je $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ neki reprezentant, onda $(\forall \vec{b} \in V^2)(\exists \overrightarrow{BC} \in b)$, što znači da se svake dvije klase mogu zbrojiti.

Teorem 3.3.1. V^2 *je u odnosu na zbrajanje komutativna grupa.*

Dokaz. Da bi smo dokazali da je skup opskrbljen operacijom komutativna grupa moramo dokazati asocijativnost, postojanje nule, komutativnost i postojanje inverza. Prvo ćemo dokazati komutativnost.

Komutativnost: Neka su dana dva vektora $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$. Prema definiciji zbrajanja vrijedi $\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$.



Neka je sada točka $D \in M$ takva da $\overrightarrow{AD} \equiv \overrightarrow{BC}$.
Pošto je $\overrightarrow{AD} \equiv \overrightarrow{BC}$, dužine $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$ imaju zajedničko polovište, što znači i (pošto je $ADCB$ paralelogram) da je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

$$\vec{b} + \vec{a} = [\overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{DC}] = [\overrightarrow{AC}] = \vec{a} + \vec{b}$$

i time je dokazana komutativnost.

Asocijativnost: Neka su $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}], \vec{b} = [\overrightarrow{BC}], \vec{c} = [\overrightarrow{CD}] \in V^2$ tri vektora. Onda po definiciji zbrajanja:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = ([\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}]) + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AD}]$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = [\overrightarrow{AB}] + ([\overrightarrow{BC}] + [\overrightarrow{CD}]) = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BD}] = [\overrightarrow{AD}]$$

Dakle, dobivamo

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Postojanje nule: Neka je dan vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] \in V^2$. Za nul-vektor vrijedi $\vec{0} = [\overrightarrow{AA}] = [\overrightarrow{BB}]$.
Sada za $\vec{a}$ i nulvektor po komutativnosti vrijedi

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$$

Znači,

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{a}$$

Postojanje inverza: Dokažimo da je za vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] \in V^2$ njegov inverz za zbrajanje prethodno definiriani $-\vec{a} = [\overrightarrow{BA}]$.
Zbog komutativnosti vrijedi $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a}$, što znači da je

$$(-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BA}] = [\overrightarrow{AA}] = \vec{0}$$

□

3.4 Množenje vektora skalarom

Definicija 3.4.1. Definirajmo preslikavanje $\cdot : \mathbb{R} \times V^2 \to V^2$ takvo da je $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ i vrijedi

I $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$

II $s_{\vec{b}} = s_{\vec{a}}$

III Ako je $\alpha > 0$, onda $\vec{b}$ i $\vec{a}$ imaju istu orijentaciju.
Ako je $\alpha < 0$, onda $\vec{b}$ i $\vec{a}$ imaju suprotnu orijentaciju.

To preslikavanje zovemo **množenje vektora skalarom**.

Dokazali smo da je svaki vektor jedinstveno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom što znači da je preslikavanje dobro definirano.
U zapisu ovog preslikavanja, odnosno binarne operacije, jednostavnosti radi često izostavljamo točku i pišemo jednostavno $\alpha\vec{a}$. Vektore označavamo malim tiskanim slovima, a skalare pisanim grčkim alfabetom te ih tako razlikujemo kad nema točke.

Propozicija 3.4.1. *Neka je $\vec{a} \in V^2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$ ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\lambda = 0$.*

Dokaz. Prema definiciji množenja vektora skalarom, vrijedi

$$|\lambda| \cdot |\vec{a}| = |\lambda\vec{a}| = |\vec{0}| = 0$$

Pošto su $|\lambda|, |\vec{a}| \in \mathbb{R}$, mora vrijediti da je $|\lambda| = 0 \iff \lambda = 0$ ili $|\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ što se i tvrdi u propoziciji. □

Teorem 3.4.1. *Množenje vektora skalarima ima sljedeća svojstva:*

I kvaziasocijativnost

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \qquad \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\vec{a} \in V^2$$

II postojanje neutralnog elementa

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \qquad \forall\vec{a} \in V^2$$

III distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \qquad \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\vec{a} \in V^2$$

IV distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\vec{a}, \vec{b} \in V^2$$

Dokaz. Dokazat ćemo svaku tvrdnju posebno:

I Ako je $\lambda = 0$ ili je $\mu = 0$, onda je tvrdnja trivijalna pa možemo pretpostaviti $\lambda \neq 0$ i $\mu \neq 0$.

Prvo dokazujemo da je modul vektora $\lambda(\mu\vec{a})$ jednak modulu vektora $(\lambda\mu)\vec{a}$.

$$|\lambda(\mu\vec{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\vec{a}|$$

Pošto su λ i μ realni brojevi, vrijedi jednakost $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$, pa je

$$|\lambda(\mu\vec{a})| = |\lambda\mu| \cdot |\vec{a}| = |(\lambda\mu) \cdot \vec{a}|$$

Idući korak je dokazati da je smjer vektora $\lambda(\mu\vec{a})$ jednak smjeru vektora $(\lambda\mu)\vec{a}$. Prema definiciji skalarnog mnozenja, smjer vektora $\mu\vec{a}$ je jednak smjeru vektora $\vec{a}$. Također je i smjer $\lambda(\mu\vec{a})$ jednak smjeru vektora $\mu\vec{a}$, odnosno smjeru vektora $\vec{a}$. Isto tako je i smjer vektora $(\lambda\mu)\vec{a}$ jednak smjeru vektora $\vec{a}$.

Konačno preostaje dokazati da je orijentacija vektora $\lambda(\mu\vec{a})$ jednaka orijentaciji vektora $(\lambda\mu)\vec{a}$. Dokaz provodimo po slučajevima pozitivnosti i negativnosti skalara λ i μ.

Naime, ako je $\lambda > 0$ i $\mu > 0$, onda je i $\lambda\mu > 0$. Dakle, orijentacija vektora $(\lambda\mu)\vec{a}$ je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$. Orijentacija vektora $\lambda(\mu\vec{a})$ je jednaka orijentaciji vektora $\mu\vec{a}$, koja je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$.

Ako je $\lambda > 0$ i $\mu < 0$, onda je $\lambda\mu < 0$. Dakle, orijentacija vektora $(\lambda\mu)\vec{a}$ je suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$. Orijentacija vektora $\lambda(\mu\vec{a})$ je jednaka orijentaciji vektora $\mu\vec{a}$, koja je suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$.

Ako je $\lambda < 0$ i $\mu > 0$, onda je $\lambda\mu < 0$. Dakle, orijentacija vektora $(\lambda\mu)\vec{a}$ je suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$. Orijentacija vektora $\lambda(\mu\vec{a})$ je suprotna orijentaciji vektora $\mu\vec{a}$, koja je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$.

Ako je $\lambda < 0$ i $\mu < 0$, onda je $\lambda\mu > 0$. Dakle, orijentacija vektora $(\lambda\mu)\vec{a}$ je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$. Orijentacija vektora $\lambda(\mu\vec{a})$ je suprotna orijentaciji vektora $\mu\vec{a}$, koja je suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$.

II Dokaz ove tvrdnje je trivijalan.

III Dokaz ove tvrdnje se provodi u mnogo slučajeva pa ćemo mi samo navesti ideju i jedan primjer. Neka je $\lambda\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\mu\vec{a} = [\overrightarrow{BC}]$. Iz dokaza kvaziacijativnosti jasno je da su točke A, B i C kolinearne. Sada imamo slučajeve različitih položaja točaka A, B i C na pravcu p na kojem se nalaze, ovisno o λ i μ. Primjerice, neka $\lambda > 0$, $\mu < 0$, i $\lambda + \mu > 0$. Vektori $\lambda\vec{a}$ i $\mu\vec{a}$ su očito suprotne orijentacije. Također, vrijedi

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| > |\mu| \cdot |\vec{a}| = |\mu \cdot \vec{a}|$$

pa očito $C \in \overline{AB}$. Tada vrijedi

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = |AC| = |AB| - |BC| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| - |\mu| \cdot |\vec{a}|$$

Sada zbog pretpostavki o skalarima dobivamo

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = \lambda \cdot |\vec{a}| + \mu \cdot |\vec{a}| = (\lambda + \mu)|\vec{a}|$$

Iz $\lambda + \mu > 0$ slijedi da je

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = |\lambda + \mu||\vec{a}|$$

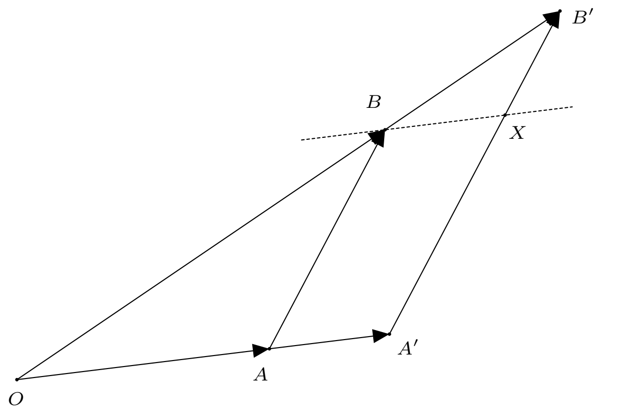
I time je dokazano da je modul vektora $(\lambda + \mu)\vec{a}$ jednak modulu vektora $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$. Da su smjerovi tih vektora jednaki je očito, a jednakost orijentacije leži u činjenici $C \in \overline{AB}$ što implicira da je modul vektora $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao $\lambda\vec{a}$. Pošto je $\lambda > 0$, orijentacija vektora $\lambda\vec{a}$ je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$. Nadalje, kako je $\lambda + \mu > 0$, vektor $(\lambda + \mu)\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i $\vec{a}$. Sada preostaje niz sličnih slučajeva u ovisnosti o pozitivnosti skalara i njihovog zbroja.

IV Ako je $\lambda = 0$ tvrdnja je trivijalna pa pretpostavljamo da $\lambda \neq 0$. Neka je sada $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{AB}]$. Po definiciji zbrajanja,

$$\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$$

Pretpostavimo slučaj da je $\lambda > 0$. Konstruirajmo sada točku $A' \in Oa$. Takvu da je $|OA'| = \lambda|OA|$. Neka je p pravac kroz točku A' paralelan s pravcem AB. Povucimo pravac

q paralelan s OA kroz B. Sada neka je $p \cap q = \{X\}$. Konstruirajmo točku $B' \in A'x$ takvu da je $|B'A'| = \lambda|AB|$. Sada je očito po konstrukciji $\lambda\vec{a} = [\overrightarrow{OA'}]$ i $\lambda\vec{b} = [\overrightarrow{A'B'}]$.



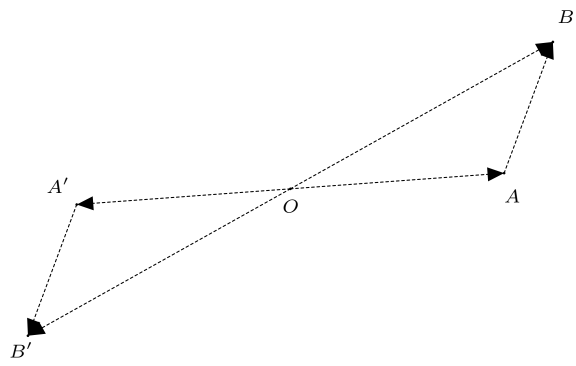
Zbog paralelnosti pravca p i pravca AB je $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OA'B'$. Prema teoremu o (S-K-S) sličnosti, dobivamo

$$\triangle OAB \sim \triangle OA'B' \implies \sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB' \implies Ob = Ob'$$

Dakle, točke O, B, B' su kolinearne i vrijedi $\lambda|OB| = \lambda|OB'|$, pa je

$$[\overrightarrow{OB'}] = \lambda[\overrightarrow{OB}] = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

Sada još preostaje dokazati da vrijedi $-(\vec{a} + \vec{b}) = (-\vec{a}) + (-\vec{b})$. Neka je točka $A' \in OA$ takva da je O polovište dužine $\overline{AA'}$. Analogno definiramo točku $B' \in OB$.



Sada je jasno da su modul i smjer vektora $[\overrightarrow{OA'}]$ jednaki modulu i smjeru vektora $[\overrightarrow{OA}]$, ali je suprotne orijentacije. Dakle $[\overrightarrow{OA'}] = (-1) \cdot [\overrightarrow{OA}]$, te analogno $[\overrightarrow{OB'}] = (-1) \cdot [\overrightarrow{OB}]$.

$$[\overrightarrow{OA'}] = -\vec{a}$$

$$[\overrightarrow{OB'}] = -(\vec{a} + \vec{b})$$

Također je očito $-\vec{a} + [\overrightarrow{A'B'}] = -(\vec{a} + \vec{b})$.

Primijetimo da je $[\overrightarrow{A'B'}] = -[\overrightarrow{B'A'}]$. Pošto dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ imaju isto polovište, vrijedi

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{B'A'} \implies [\overrightarrow{A'B'}] = -[\overrightarrow{B'A'}] = -[\overrightarrow{AB}] = -\vec{b}$$

Sada dobivamo

$$(-\vec{a}) + (-\vec{b}) = -(\vec{a} + \vec{b})$$

□

Iz prethodnog teorema po definiciji vektorskog prostora dobivamo sljedeći teorem:

Teorem 3.4.2. *Skup vektora u ravnini sa prethodno definiranim operacijama zbrajanja i množenja čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.*

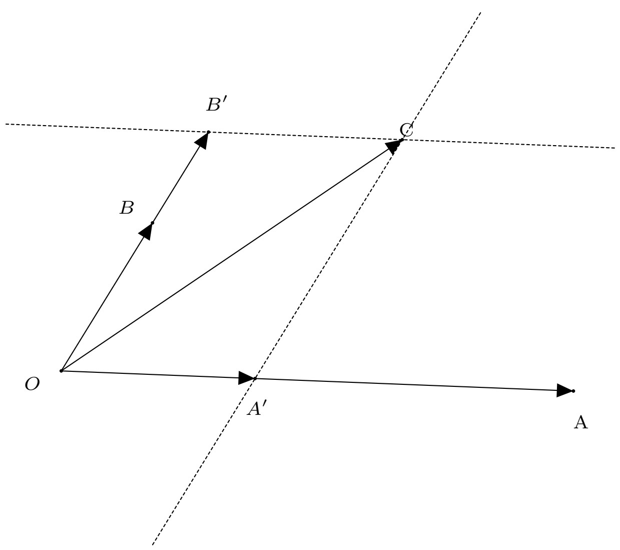
Definicija 3.4.2. Ako su $[\overrightarrow{OA}], [\overrightarrow{OB}] \in V^2$ vektori, kažemo da su **kolinearni** ako su točke O, A, B kolinearne, odnosno ako imaju isti smjer.

Propozicija 3.4.2. *Dimenzija vektorskog prostora* $(V^2, +, \cdot)$ *je* 2.

Dokaz. Dokazat ćemo da je $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ baza vektorskog prostora V^2, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori, odnosno vektori različitog smjera. Primijetimo da množenje skalarom očuva smjer vektora, što znači da je skup $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ linearno nezavisan. Sada ćemo pokazati da se svaki vektor $\vec{c}$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Neka je $O \in M$ neka točka u ravnini. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}], \vec{b} = [\overrightarrow{OB}], \vec{C} = [\overrightarrow{OC}]$.

Sada, za svaki vektor $\vec{a'} = [\overrightarrow{OA'}], A' \in OA$ postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\lambda\vec{a} = \vec{a'}$ Ta se tvrdnja kostruktibilno dokazuje pronalaskom tog λ. Povucimo sada pravac p paralelan s OB kroz točku C. Neka je $p \cap OA = \{A'\}$. Povucimo pravac q paralelan s OA kroz točku C. Neka je sada $q \cap OB = \{B'\}$.



Sada vrijedi $[\overrightarrow{OA'}] + [\overrightarrow{OB'}] = [\overrightarrow{OC'}]$.
Postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\alpha\vec{a} = [\overrightarrow{OA'}]$$

$$\beta\vec{b} = [\overrightarrow{OB'}]$$

to znači da je

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = [\overrightarrow{OC}]$$

Time je tvrdnja dokazana.

□

3.5 Skalarni produkt

Definicija 3.5.1. Neka su dana dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^2 \backslash \{\vec{0}\}$ takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$.
Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle AOB$.
Ako je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ kažimo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **okomiti**, što označavamo

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

Pošto je jasno da se svi reprezentanti nekog vektora nalaze na pravcima smjera tog vektora, a dva paralelna pravca sijeku drugi pravac po istim kutom, lako uočavamo da je prethodna definicija valjana, odnosno da kut između vektora nikako ne ovisi o izboru reprezentanata. Također, očito je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$. Kut između vektora od kojih je bar jedan nul-vektor ne definiramo.
Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, onda je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iste orijentacije, te $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$ ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različite orijentacije.

Definicija 3.5.2. Definirajmo preslikavanje $u : V^2 \times V^2 \to \mathbb{R}$ takvo da vrijedi:

I $u(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$.

II $u(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ ako niti $\vec{a}$ niti $\vec{b}$ nisu nul-vektori.

Takvo preslikavanje nazivamo **skalarno množenje**, a vrijednost $u(\vec{a}, \vec{b})$ nazivamo **skalarni produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Uobičajeno je pisati i $\vec{a} \cdot \vec{b} = u(\vec{a}, \vec{b})$, a od množenja vektora skalarom razlikuje se, naravno, u domeni varijabli. Pomoću skalarnog produkta možemo jednostavno karakterizirati okomitost dvaju vektora, o čemu govori sljedeća propozicija:

Propozicija 3.5.1. *Neka su dana dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ takva da $\vec{a} \neq 0$ i $\vec{b} \neq 0$. Tada vrijedi*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Dokaz. Pretpostavimo $\vec{a} \perp \vec{b}$. Tada je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, pa imamo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Dokažimo sada drugi smjer. Neka je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
To znači da je

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Pošto $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$, znamo da vrijedi $|\vec{a}| \neq 0$ i $|\vec{b}| \neq 0$. Tada mora biti $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Također, znamo da je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$, pa zaključujemo da je

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} \implies \vec{a} \perp \vec{b}$$

□

Uočimo još jedno zanimljivo svojstvo skalarnog produkta. Naime, za svaki vektor $\vec{a} \in V^2$ vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2 \geq 0$$

Za prirodne brojeve n skratit ćemo notaciju definirajući da je

$$\vec{a}^n := \overbrace{\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \cdots \cdot \vec{a}}^{n}$$

Sada prethodnu tvrdnju možemo napisati kao

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Također, za suprotne vektore vrijedi:

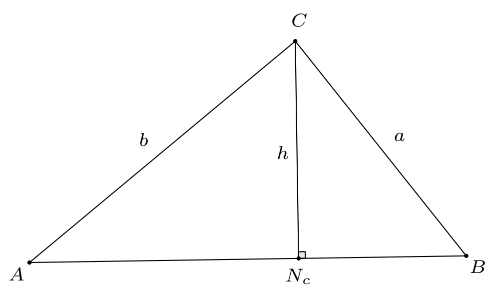
$$(-\vec{a}) \cdot \vec{a} = |-\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, -\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cdot (-1) = -|\vec{a}|^2$$

Sada ćemo napraviti digresiju i iznijeti poznati teorem koji ćemo koristiti u dokazu iduće propozicije. Pretpostavlja se da je čitatelj upoznat s trigonometrijskim funkcijama i trigonometrijskim identitetima, te ovisnosti odnosa kutova i stranica u pravokutnom trokutu.

Teorem 3.5.1. ***(Kosinusov teorem)*** *Neka je dan trokut $\triangle ABC$. Tada vrijedi*

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$$

Dokaz. Spustimo okomicu iz vrha C na pravac AB i označimo nožište s N_c. Pretpostavit ćemo da je $N_c \in \overline{AB}$. Slučaj kada tome nije tako se slično dokazuje uz manje modifikacije. Neka je sada $h = |CN_c|$.



Pošto su trokuti $\triangle AN_cC$ i $\triangle N_cBC$ pravokutni, redom vrijedi:

$$b \sin\alpha = a \sin\beta = h$$

$$b\cos\alpha = |AN_c|$$
$$a\cos\beta = |BN_c|$$

Zbrajanje zadnje jednakosti daje

$$\begin{aligned} b\cos\alpha + a\cos\beta &= c \\ \implies (b\cos\alpha + a\cos\beta)^2 &= c^2 \\ \implies b^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\beta + 2ab\cos\alpha\cdot\cos\beta &= c^2 \end{aligned}$$

Adicijska formula za kosinus zbroja daje

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \iff \cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Također vrijedi $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \iff \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.
Uvrštavanjem sada dobivamo

$$\begin{aligned} b^2(1-\sin^2\alpha) + a^2(1-\sin^2\beta) + 2ab(\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\cdot\sin\beta) &= c^2 \\ \iff b^2 + a^2 + 2ab\cos(\alpha+\beta) - (b^2\sin^2\alpha - 2ab\sin\alpha\cdot\sin\beta + a^2\sin^2\beta) &= c^2 \\ \iff a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha+\beta) - (b\sin\alpha - a\sin\beta)^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Kako smo ranije pokazali da je $b\sin\alpha = a\sin\beta$, vrijedi $(b\sin\alpha - a\sin\beta)^2 = 0$.
Također, $\cos\gamma = \cos(\pi - (\alpha+\beta)) = -\cos(\alpha+\beta)$, zbog svojstava kosinus funkcije. Uvrštavajući te izraze u prethodno dobiveno dobivamo traženu tvrnju

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$$

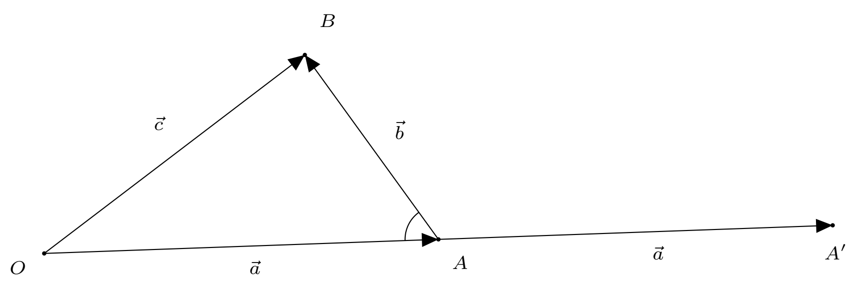
$\square$

Propozicija 3.5.2. *Za sve vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ vrijedi*

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Dokaz. Uočimo da se, kada su vektori kolinearni, tvrdnja lako dokaže. Naime, rastavljanje na slučajeve ovisno o orijentaciji tih vektora i korištenjem $\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2, \forall v \in V^2$ dobiva se tvrdnja. Pretpostavimo, dakle, da ta dva vektora nisu kolinearna. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{AB}]$. Tada definiramo $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$. Pošto je $\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2$, a po definiciji modula vrijedi $|\vec{c}| = |OB|$. $\vec{c}^2 = |OB|^2$.



Iskoristimo sada kosinusov teorem na trokut $\triangle ABO$:

$$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 - 2|OA| \cdot |AB| \cdot \cos\sphericalangle OAB$$

$$\iff |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Jednakost $\cos\sphericalangle OAB = -\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ dobivamo tako što uzmemo točku $A' \in M$ takvu da je $[\overrightarrow{AA'}] = \vec{a}$. Tada je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle BAA' = \pi - \sphericalangle OAB$.
Dakle, $\cos\sphericalangle OAB = \cos(\pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = -\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Nadalje, koristimo $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ i $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2, \vec{c}^2 = |\vec{c}|^2$ i dobivamo

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\iff (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Drugu tvrdnju zadatka dobivamo pomoću prve na sljedeći način:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} + (-\vec{b}))^2 = \vec{a}^2 + (-\vec{b})^2 + 2\vec{a}(-\vec{b})$$

Kako je $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = |-\vec{b}|^2 = (-\vec{b})^2$ preostaje dokazati da je $\vec{a}(-\vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$.
To vrijedi pošto je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |-\vec{b}| \cdot \cos(\pi - \sphericalangle(\vec{a}, -\vec{b}))$$

$$\implies \vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{a}(-\vec{b})$$

Znači da je i

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

□

Teorem 3.5.2. *Za skalarno množenje vektora vrijede sljedeća svojstva:*

I komutativnost

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2$$

II kvaziasocijativnost

$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

III distributivnost prema zbrajanju

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

IV $\vec{a}^2 \geq 0$, *te vrijedi* $\vec{a}^2 = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$.

Dokaz.

I Ova tvrdnja slijedi direktno iz definicije skalarnog množenja:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b}$$

II Ukoliko je $\lambda = 0, \vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tvrdnja je trivijalna pa ćemo pretpostaviti da je $\lambda \neq 0, \vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$. Podijelit ćemo dokaz u dva slučaja:

Slučaj 1: $\lambda > 0$
U ovom slučaju $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ imaju istu orijentaciju i smjer, pa je $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\lambda\vec{a},\vec{b})$. Sada imamo

$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = |\lambda|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Zadnja jednakost vrijedi, između ostalog, i zato što je $\lambda > 0$ pa je $|\lambda| = \lambda$.

Slučaj 2: $\lambda < 0$
U ovom slučaju je $\lambda\vec{a}$ suprotne orijentacije od one vektora $\vec{a}$.
Dakle, $\sphericalangle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$, odnsosno $\cos\sphericalangle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = -\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$
To znači da vrijedi

$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sphericalangle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = |\lambda|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(-\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$$

Pošto je $\lambda < 0$, onda je $|\lambda| = -\lambda$. Dobivamo

$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = -\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sphericalangle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = |\lambda|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(-\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

III Dokaz ove tvrdnje koristi isključivo propoziciju 3.5.2 i isključivo je formalne prirode.

$$4\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = (2\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}))^2-(2\vec{a})^2-(\vec{b}+\vec{c})^2 = (2\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}))^2-(2\vec{a})^2+(\vec{b}-\vec{c})^2-2\vec{b}^2-2\vec{c}^2 =$$

$$= ((\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c}))^2+((\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c}))^2-4\vec{a}^2-2\vec{b}^2-2\vec{c}^2 = 2(\vec{a}+\vec{b})^2+2(\vec{a}+\vec{c})^2-4\vec{a}^2-2\vec{b}^2-2\vec{c}^2 =$$

$$= 4a^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}^2+2\vec{c}^2-4\vec{a}^2-2\vec{b}^2-2\vec{c}^2 =$$

$$= 4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{c} = 4(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})$$

Dijeljenjem jednakosti s 4 dobivamo traženu tvrdnju:

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

IV Pošto je $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, očito je $\vec{a}^2 \geq 0$. Nadalje, vrijedi
$\vec{a}^2 = 0 \iff |\vec{a}|^2 = 0 \iff |\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ čime je tvrdnja dokazana.

□

Vektorski prostor nad poljem realnih brojeva nad kojim je definirano množenje vektora koje daje realne vrijednosti i zadovoljava svojstva I-IV navedena u prethodnom teoremu nazivamo **unitarni prostor**. Stoga je sljedeći teorem dokazan.

Teorem 3.5.3. *Vektorski prostor V^2 je uz prethodno definirano skalarno množenje unitarni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$.*

3.6 Trodimenzionalni vektorski prostor

U ovom odjeljku ćemo proširiti naše razmatranje na trodimenzionalni vektorski prostor V^3. Do sada smo se bavili Euklidskom geometrijom ravnine, a sada uvodimo aksiome koji proširuju skup točaka tako da je naša ravnina i sve što se odvija na njoj samo podskup nekog skupa E^3. Dodajmo još četiri aksioma incidencije koji govore o odnosima točaka i ravnina. Sada je ravnina označena malim grčkim slovima, a skup svih točaka ćemo označavati s E^3.

(I4) Za svake tri nekolinearne točke postoji točno jedna ravnina koja ih sadrži i niti jedna ravnina nije prazan skup.

(I5) Ukoliko za različite točke $A, B \in E^3$ i ravnine $\alpha, \beta \subset E^3$ vrijedi $A, B \in \alpha \cap \beta$, onda vrijedi $AB \subseteq \alpha \cap \beta$.

(I6) Ukoliko se dvije ravnine sijeku u barem jednoj točki, onda se sijeku u barem još jednoj točki.

(I7) Postoje četiri točke koje ne leže u istoj ravnini.

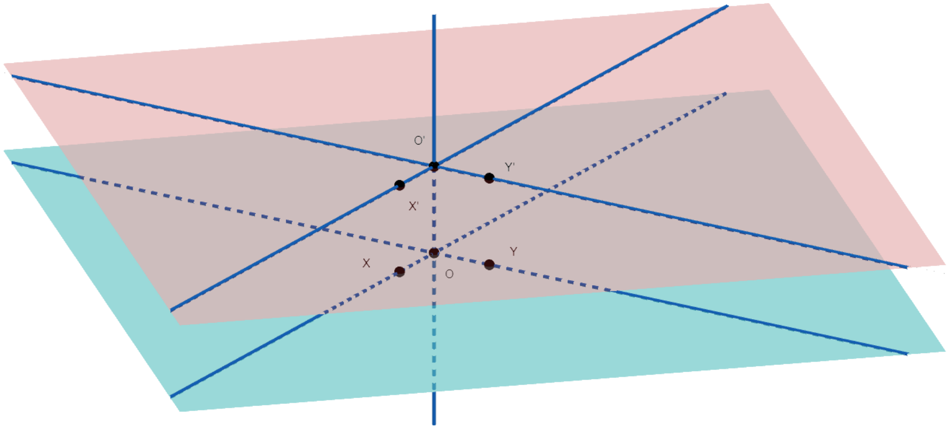
Pošto bi dokazivanje svih teorema i tvrdnji u trodimenzionalnoj geometriji izašlo iz okvira ovog materijala, nećemo to raditi, već ćemo samo navesti neke relativno očite posljedice i intuitivnu strukturu skupa definiranog ovim aksiomima. Uočimo da je presjek dvaju različitih ravnina prazan skup ili pravac. Kada bi postojala točka izvan pravca ravnine bi bile jednake. Elemente, točke ili pravce, koji se nalaze u istoj ravnini zovemo **komplanarni**.

Definicija 3.6.1. Kažemo da su pravci u prostoru **paralelni** ako leže na istoj ravnini i ne sjeku se. Pravce koji ne pripadaju istoj ravnini nazivamo **mimoilazni** pravci. Kažemo da je pravac p **paralelan s ravninom** α ako imaju prazan presjek.
Kažemo da pravac **probada** ravninu ako se s njom siječe u samo jednoj točki, a tu točku nazivamo **probodište**.

Napomena: Naredno izlaganje i dokazi sljedećih dvaju propozicija su ovdje dodani isključivo iz razloga da znatiželjni čitatelj uvidi načine dokazivanja nekih osnovnih tvrdnji vezanih za ravnine. Slobodno preskočite taj dio, bitne su samo tvrdnje propozicija i definicija.

Uzmimo neku ravninu $\alpha \subset E^3$. Sada odaberimo neku točku $O \in \alpha$ na njoj i povucimo pravac p koji prolazi kroz O. Sada povucimo okomicu q na p kroz O u ravnini α, što smijemo pošto je α Euklidska ravnina i za nju vrijedi sve što smo ranije dokazivali. Sada postoji barem još jedna točka prostora $O' \notin \alpha$. Neka su $X \in p$ i $Y \in q$ točke na tim pravcima različite od O.

Promotrimo sada ravninu β koja prolazi točkama O, O', Y. Pošto je $O, Y \in \beta$, cijeli pravac OY leži na toj ravnini. Sada postoji pravac $q' \subset \beta$ takav da je $q' \parallel q$ i prolazi točkom O'. Analogno definiramo pravac p' koji je paralelan s p. Pravci p' i q' su različiti jer bi u suprotnom ravnina kroz O, O', Y i ravnina kroz O, O', X imale u presjeku pravac p', ali i točku O, pa bi ravnine kroz O, O', Y i kroz O, O', X bile jednake, jer su jedinstveno definirane pomoću neke dvije točke pravca p' i točke O. Tada bi postojala još jedna ravnina na kojoj leže p, q, ali i točka O' a to je kontradikcija na jedinstvenost ravnine kroz točke O, X i Y. Uzmimo sada točke $X' \in p'$ i $Y' \in q'$ različite od O'. Ravninu kroz O', X' i Y' nazovimo α'.



Pretpostavimo da se ravnine α i α' sijeku u barem jednoj točki P. Tada štoviše postoji barem još jedna točka presjeka, Q, pa zapravo pravac PQ leži u presjeku tih ravnina. Pošto je nemoguće da je pravac paralelan s oba pravca OX i OY, siječe barem jedan od njih i sasvim očito je različit od oba ta pravca. Neka je to bez smanjenja općenitosti pravac p i $p \cap PQ = \{M\}$. Promotrimo sada ravninu γ pomoću koje smo definirali pravac p', dakle ravninu u kojoj se nalaze pravci p i p'. Vidimo da je $M \in \alpha \cap \gamma$. Također, $\alpha \cap \alpha' = PQ$, i presjek pravca PQ i ravnine γ je točno točka M jer bi u suprotnom ravnina γ bila jednaka ravnini α ili ravnini α'. Kada točka M ne bi ležala na pravcu p', onda bi pravac p' s točkom M, koja ne leži na njemu, jedinstveno određivao različite ravnine γ i α', što je očito nemoguće. To znači da je $M \in p'$, no to znači da se točka M nalazi u presjeku pravaca p i p', što je u kontradikciji s njihovom paralelnošću. Dakle, ravnine α i α' su paralelne.

Definicija 3.6.2. Paralelne ravnine su ravnine $\alpha, \beta \subset E^3$ takve da $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ili ravnine koje su jednake.

Sada smo vidjeli da za svaku točku izvan ravnine postoji ravnina paralelna s tom ravninom koja prolazi tom točkom. Uočimo također, da ako imamo ravninu α i točku $X \notin \alpha$, te točku $O \in \alpha$, onda se pravac OX siječe s ravninom u samo jednoj točki, jer inače bi ležao na ravnini α. Sada za svaki $r \in \mathbb{R}^+$ postoji točka $R \in Ox$ takva da je $|OR| = r$. Sada za svaku takvu točku postoji ravnina paralelna s α koja prolazi točkom R. Isto vrijedi i za polupravac $Oy = OX \backslash Ox \cup \{O\}$. Također, svaka točka se nalazi na nekoj od ravnina paralelnih s α.

Propozicija 3.6.1. *Relacija paralelnosti $\parallel$ na skupu ravnina prostora je relacija ekvivalencije.*

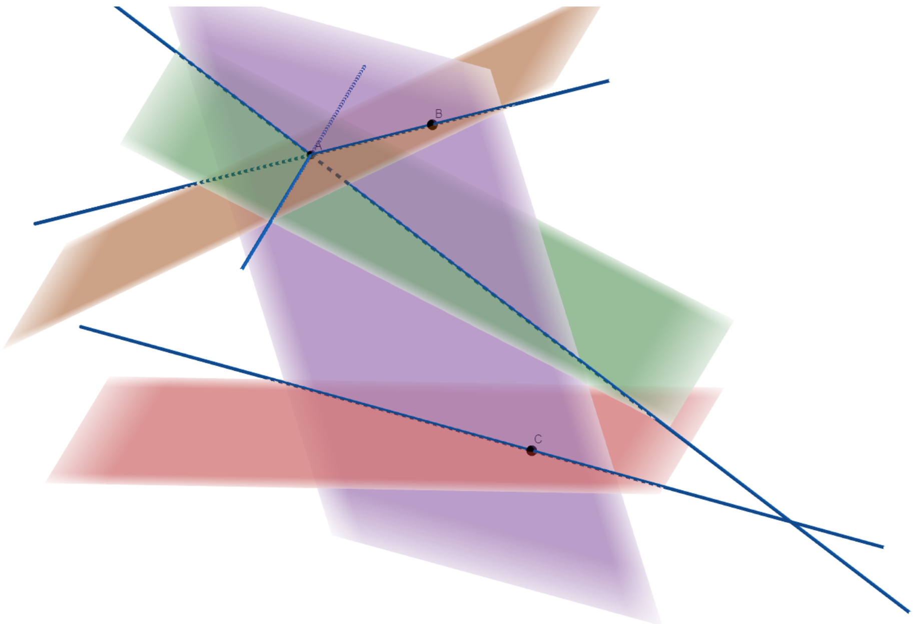
Dokaz. Neka su $\alpha, \beta, \gamma \subset E^3$ ravnine. Prema definiciji paralelnosti, vrijedi $\alpha \parallel \alpha$.

Nadalje, sasvim je jasno po definiciji da $\alpha \parallel \beta \iff \beta \parallel \alpha$.

Slijedi dokaz tranzitivnosti relacije. Pretpostavimo da su sada ravnine α, β i γ međusobno različite, jer je inače tvrdnja trivijalna. Neka vrijedi

$$\alpha \parallel \beta, \quad \beta \parallel \gamma$$

Provedimo dokaz kontradikcijom.
Pretpostavimo $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset$. Pošto su te ravnine različite, presjek im mora biti neki pravac p.
Uzmimo točku $A \in p$ i točku $B \in \alpha \backslash p$, te neku točku $C \in \beta$.
Kako se dvije od te tri točke nalaze na ravnini α, a treća na ravnini β koja ima prazan presjek s α te tri točke su nekolinearne, pa jedinstveno određuju ravninu δ.
Na skici je ravnina α narančasta, ravnina β crvena, ravnina γ zelena, a δ ljubičasta.



Neka je $q = \delta \cap \beta$. Uočimo da ravnina δ siječe ravninu γ u pravcu različitom od p, jer bi u suprotnom $\delta = \alpha$, određena pravcem p i točkom B. Dakle postoji pravac $r = \delta \cap \gamma$ takav da je

$$r \cap p = \{A\}$$

Također, $AB \cap p = \{A\}$. Pošto $\alpha \cap \beta = \emptyset$ i $\beta \cap \gamma = \emptyset$, zaključujemo da je $AB \cap q = \emptyset$ i $q \cap r = \emptyset$, pa su u ravnini δ pravci r i AB koji prolaze točkom A i paralelni su s q. Po aksiomu o paralelama, postoji jedan takav pravac, pa je onda trivijalno $\alpha = \gamma$, što daje kontradikciju s pretpostavkom o različitosti.
Dakle, vrijedi

$$\alpha \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma \implies \alpha \parallel \gamma$$

$\square$

Propozicija 3.6.2. *Relacija paralelnosti pravaca u prostoru je i dalje relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Slično kao i ranije, $p \parallel p$ i $p \parallel q \iff q \parallel p$ slijede direktno iz definicije.

Neka su sada $p, q, r \subset E^3$ tri u parovima različita pravca takva da je $p \parallel q$ i $q \parallel r$.
Pretpostavimo da $q \nparallel r$.
Postoje, dakle, dvije mogućnosti: ili $q \cap r \neq \emptyset$ ili q i r ne leže u istoj ravnini. Kako se p i q nalaze u istoj ravnini, te q i r također, kada bi se p i r sjekli, onda bi te dvije ravnine imale presjek izuzev q pa bi bile jednake, te bi onda sva tri pravca bila u istoj ravnini, a kako je paralelnost relacija ekvivalencije u ravnini, dobivamo $p \parallel r$ i kontradikciju.

Dakle $p \cap r = \emptyset$. Neka je $p, q \subset \alpha$ i $q, r \subset \beta$. Pretpostavimo da pravci p i r ne leže u ravnini. Neka je $P \in p$ neka točka. Onda postoji ravnina γ određena pravcem r i točkom P koja očito ne leži na pravcu p jer se p i r ne sijeku. Neka je $\alpha \cap \gamma = p'$. Kako na ravnini α postoji samo jedan pravac kroz P paralelan s q, a p' i p su po pretpostavci različiti, onda se p' i q moraju sjeći i neka to bude u točki T. No sada je očito

$$T \in p' \cap q = (\gamma \cap \alpha) \cap (\alpha \cap \beta) \implies T \in \alpha \cap \beta \cap \gamma \implies T \in (\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) \implies T \in q \cap r$$

Pošto po pretpostavci $q \parallel r$, dobivamo kontradikciju s tvrdnjom da p i r ne leže u istoj ravnini, pa je tranzitivnost relacije dokazana.

□

Vektorski prostor V^3

Nakon kratke digresije na prostornu geometriju i svojstva prostora i ravnina u njemu vraćamo se na vektorsku algebru.
Usmjerenu dužinu u prostoru definirat ćemo isto kao i u ravnini: uređeni par točaka.
Definicija relacije je identična. Uočimo da ako $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, onda se polovišta $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ podudaraju, pa se sve četiri točke nalaze na istoj ravnini i čine paralelogram na toj ravnini. Nadalje, metrika je ostala ista pa su i moduli jednaki. Nadalje, smjerovi pravaca su klase po relaciji paralelnosti u prostoru, a definicija orijentacije je ostala jednaka. Na koncu, mi smo većinom dokazivali tvrdnje u ovom poglavlju za dva vektora, odnosno dva reprezentanta iz iste točke, pa su naši dokazi na ravnini određenoj tim dvama vektorima, tako da nema potrebe ponovo sve definirati i dokazivati, uzet ćemo prethodno dokazane tvrdnje intuitivnima za prostor vektora u V^3.

Skup $V^3 = E^3/_{\equiv}$ je unitarni vektorski prostor s jednako definiranim skalarnim množenjem. Naravno, postoji bitna razlika između V^2 i V^3. Dok se V^2 *odvija* u Euklidskoj ravnini i dimenzija mu je 2, dok se V^3 *odvija* u Euklidskom prostoru i trodimenzionalan je vektorski prostor.

Propozicija 3.6.3. *Vektorski prostor V^3 je trodimenzionalan.*

Dokaz. Neka su dani vektori $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}], \vec{b} = [\overrightarrow{OB}], \vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$. Pretpostavimo da vektori nisu komplanarni. Ukoliko se, dakle, točka C nalazi izvan ravnine određene točkama O, A i B, onda se ne može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zbog definicije zbrajanja vektora i množenja skalarom prema kojoj je zbroj dvaju vektora u istoj ravnini kao i početni vektori.

Analogno se ni $\vec{a}$ ni $\vec{b}$ ne mogu prikazati kao neka linearna kombinacija, pa je skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ linearno nezavisan.

Preostaje dokazati da se svaki vektor u prostoru može prikazati kao linearna kombinacija tih triju vektora. Neka je $\vec{v} = [\overrightarrow{OV}]$.
Nacrtajmo kroz točku V pravac paralelan s OA. Neka je V_a točka sjecišta tog pravca i ravnine određene točkama O, B i C. Dodajmo sada točku D takvu da je $ODVV_a$ paralelogram. Kako je je $VV_a \parallel OA$, onda je $D \in OA$. To znači da postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je

$$[\overrightarrow{OD}] = \alpha\vec{a}$$

V_a se nalazi u ravnini određenoj točkama O, C, B, odnosno vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$, pa postoje $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = [\overrightarrow{OV_a}]$$

Tu tvrdnju smo dokazali u dokazu propozicije 3.4.2. $ODVV_a$ je paralelogram, pa vrijedi

$$\vec{v} = [\overrightarrow{OV}] = [\overrightarrow{OD}] + [\overrightarrow{OV_a}] = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

i time je tvrnja dokazana. Pošto je skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ linearno nezavisan skup izvodnica, znači da je i baza, pa je dimenzija prostora V^3 jednaka 3. □

Definicija 3.6.3. Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in V^3$ vektori takvi da

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{i} \perp \vec{k}$$

Tada kažemo da je skup $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ **ortonormirana baza** prostora V^3. Ako je

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

kažemo da su v_1, v_2 i v_3 **koordinate** vektora $\vec{v}$ u bazi B i pišemo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Propozicija 3.6.4. *Neka su dani proizvoljni vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in V^3$ zapisani u nekoj ortonormiranoj bazi $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Tada vrijedi:*

- *I* $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$
- *II* $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
- *III* $\cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$

Dokaz. Pošto je baza B ortonormirana, vrijedi

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$$

Analogno,

$$\vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

Također, zbog okomitosti vektora $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ vrijedi:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Sada dokazujemo tvrdnje redom:

I Po distributivnosti množenja imamo:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k})(y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}) =$$

$$= x_1y_1\vec{i}^2 + x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j} + x_1y_3\vec{i}\cdot\vec{j} + x_2y_1\vec{j}\cdot\vec{i} + x_2y_2\vec{j}^2 + x_2y_3\vec{j}\cdot\vec{k} + x_3y_1\vec{k}\cdot\vec{i} + x_3y_2\vec{k}\cdot\vec{j} + x_3y_3\vec{k}^2$$

Sada koristeći ranije navedene tvrdnje dobivamo

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

II Za vektor $\vec{x}$ vrijedi:

$$\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Također pošto vrijedi $\vec{x}^2 = |\vec{x}|^2$, zaključujemo

$$|\vec{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\iff |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Zadnju ekvivalenciju opravdavamo činjenicom da je $|\vec{x}| \geq 0, \forall \vec{x} \in V^2$ po definiciji.

III Pretpostavimo da $\vec{x} \neq \vec{0}$ i $\vec{y} \neq \vec{0}$ jer u suprotnom kut između ta dva vektora ne bi bio definiran. Prema definiciji skalarnog množenja vrijedi

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$$

$$\iff \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$$

To dijeljenje smijemo izvesti pošto su ti vektori različiti od nule, pa su im i moduli različiti od nule.

Uvrštavanjem prethodne dvije tvrdnje propozicije dobivamo

$$\cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

□

Definicija 3.6.4. Za vektor $\vec{a}$ kažemo da je paralelan s ravninom α ako za bilo koju točku $O \in \alpha$ postoji točka $A \in \alpha$ takva da je $[\overrightarrow{OA}] = \vec{a}$

Uočimo da je ta definicija ekvivalentna s tvrdnjom da smjer vektora ima reprezentanta (pravac) u toj ravnini.

Definicija 3.6.5. Za skup vektora kažemo da su **komplanarni** ako su svi paralelni s istom ravninom α.

Propozicija 3.6.5. *Neka je $S_\pi \subset V^3$ skup svih vektora paralelnih s ravninom π. Tada je*

$$S_\pi \leq V^3$$

Dodatno, $\dim S_\pi = 2$.

Dokaz. Neka su dana bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in S_\pi$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Uočimo da množenje vektora skalarom čuva smjer vektora, pa čuva i svojstvo paralelnosti vektora s nekom ravninom, u ovom slučaju s ravninom π. Dakle, $\alpha\vec{a} \in S_\pi$ i $\beta\vec{b} \in S_\pi$. Neka su sada $\overrightarrow{OA} \in \alpha\vec{a}$ i $\overrightarrow{AB} \in \beta\vec{b}$ reprezentanti tih vektora na ravnini π. Po definiciji zbrajanja,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = [\overrightarrow{OB}] \in S_\pi$$

Vidimo da je skup S_π zatvoren na linearne kombinacije, pa je potporstor prostora V^3.
Dokaz da je dimenzija tog potprostora jednaka 2 analogan je onomu u propoziciji 3.4.2.

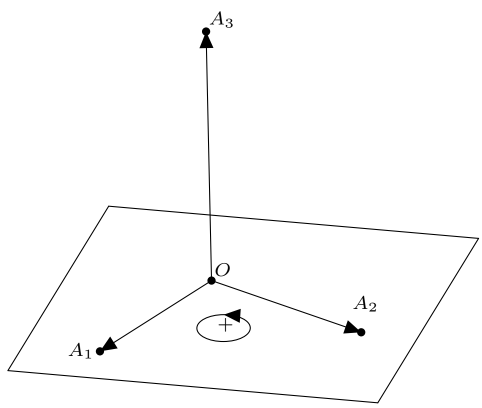
□

Zaključujemo da, izuzev trivijalnih, vektorski prostor V^3 ima dva tipa potporstora.
Jedan je skup svih vektora istog smjera i on čini potprostor dimenzije 1.
Drugi je skup svih vektora paralelnih s istom ravninom i on čini potprostor dimenzije 2.
Za linearnu ljusku nekog skupa vektora govorit ćemo da taj skup vektora **razapinje** tu ljusku.
Jasno je da bilo koji vektor $\vec{a} \in V^3$ izuzev nul-vektora razapinje potprostor dimenzije 1 i jedna njegova baza je $\{\vec{a}\}$, što znači da se svaki vektor tog potprostora može jedinstveno zapisati kao $\alpha\vec{a}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$.
Isto tako, bilo koja dva nekolinearna vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ razapinju potprostor dimenzije 2 i čine njegovu bazu, pa svaki vektor u tom potprostoru ima jedinstven zapis u obliku $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.7 Vektorski produkt

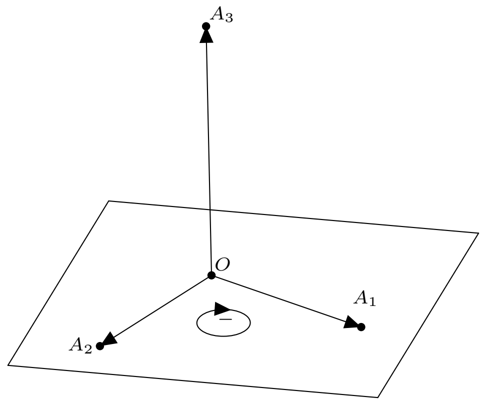
U ovom odjeljku definiramo još jedno množenje vektora čija je kodomena ovog puta upravo V^3. Radi se o takozvanom vektorskom produktu koji je specifičan za prostor V^3 pošto nema svog analogona u V^2, a ni adekvatnu generalizaciju u višim dimenzijama.
Prije definiramo još jedno svojstvo baza vektora.

Definicija 3.7.1. Neka je dana uređena trojka $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ vektora koji čine bazu prostora V^3. Uzmimo neku točku O i reprezentante tih vektora redom: $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$. Ukoliko iz točke A_3 promatramo trokut $\triangle OA_1A_2$ i točke O, A_1 i A_2 su poredane u pozitivnom smjeru (suprotno od kazaljke na satu) kažemo da je $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ **desna baza** prostora.



desna baza

U suprotnom kažemo da se radi o **lijevoj bazi**.



lijeva baza

Definicija 3.7.2. Definiramo preslikavanje $v : V^3 \times V^3 \to V^3$ tako da vrijedi:

I ako su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ kolinearni, onda $v(\vec{a}, \vec{b}) := \vec{0}$

II ako $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ nisu kolinearni onda za $\vec{c} := v(\vec{a}, \vec{b})$ vrijedi:

(a) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

(b) smjer vektora $\vec{c}$ je takav da je $\vec{c} \perp \vec{a}$ i $\vec{c} \perp \vec{b}$

(c) orijentacija vektora $\vec{c}$ je takva da je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desna baza prostora V^3

Takvo preslikavanje zovemo **vektorsko množenje**, dok vrijednost $v(\vec{a}, \vec{b})$ nazivamo **vektorski produkt**, te pišemo $v(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$.

Propozicija 3.7.1. *Vektorsko množenje je* ***antikomutativno****, odnosno vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \qquad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$$

Dokaz. Kada su ti vektori kolinearni tvrdnja je trivijalna. Po definiciji vektorskog množenja vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ imaju isti smjer i modul. No, zamjenom dvaju vektora desna baza postaje lijeva i obratno. Dakle, orijentacija vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je suprotna orijentaciji vektora $\vec{b} \times \vec{c}$. Direktno slijedi tvrdnja. □

Propozicija 3.7.2. *Za neka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vrijedi da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako i samo ako su vektori kolinearni. Specijalno:*

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} \qquad \forall \vec{v} \in V^3$$

Dokaz. Ukoliko su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, po definiciji vektorskog množenja vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Dokažimo sada drugi smjer. Pretpostavimo da vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
Tada je

$$0 = |\vec{0}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Sada imamo tri slučaja:

I $|\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

II $|\vec{b}| = 0 \iff \vec{b} = \vec{0}$

III $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

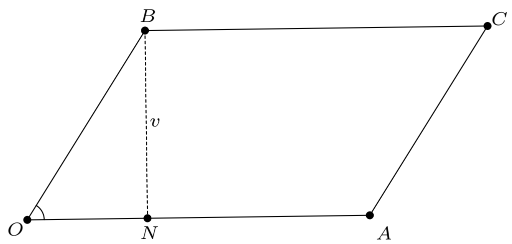
Prva dva slučaja se analogno rješavaju napomenom da je nulvektor kolinearan sa svakim drugim vektorom.
Treći slučaj daje dvije mogućnosti: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ili $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$. Kako bilo, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni.

□

Propozicija 3.7.3. *Pretpostavimo da su vektori $[\overrightarrow{OA}], [\overrightarrow{OB}] \in V^3$ nekolinearni, te da je točka $C \in E^3$ takva da je $[\overrightarrow{OC}] = [\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OB}]$. Tada je $OACB$ paralelogram. Površina tog paralelograma iznosi*

$$|\vec{a} \times \vec{b}|$$

Dokaz. Spustimo visinu iz vrha B na pravac OA. Neka je nožište te visine $N \in \overline{OA}$, bez smanjenja općenitosti (pošto, ako nožište visine iz B na OA nije na stranici $\overline{OA}$, onda će nožište iz C biti). Neka je $v = |BN|$.



Trokut $\triangle ONB$ je pravokutan pa vrijedi

$$v = |BN| = |OB| \sin \sphericalangle BOA = |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Prema formuli za površinu paralelograma vrijedi

$$P(OACB) = v \cdot |OA| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

□

Teorem 3.7.1. *Vektorsko množenje ima sljedeća svojstva:*

I kvaziasocijativnost

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

II distributivnost

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$$

Dokaz.

I Ako je $\lambda = 0$ ili su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni tvrdnja je trivijalna pa pretpostavljamo da je $\lambda \neq 0$ i da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni.

Smjer vektora vektora $\lambda\vec{a}$ je jednak smjeru vektora $\vec{a}$. Dakle, smjer vektora $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ je jednak smjeru vektora $\vec{a} \times \vec{b}$, pa i vektoru $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Kada je $\lambda > 0$, orijentacija vektora $\lambda\vec{a}$ jednaka je orijentaciji vektora $\vec{a}$, što znači da je $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ jednake orijentacije kao i vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, odnosno kao i vektor $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Za modul vrijedi:

$$|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|$$

Kada je $\lambda < 0$, orijentacija vektora $\lambda\vec{a}$ suprotna je orijentaciji vektora $\vec{a}$, što znači da je

$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ suprotne orijentacije od vektora $\vec{a} \times \vec{b}$. Vektor $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ je također suprotne orijentacije vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$, pa je ona jednaka onoj vektora $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$. Za modul vrijedi:

$$|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|$$

II Ako je bilo koji od vektora nul-vektor tvrdnja je trivijalna. Pretpostavljamo da su svi različiti od nul-vektora. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}], \vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$ i neka je $\phi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Neka je π ravnina kroz točku O okomita na vektor $\vec{a}$.

Da je ravnina okomita na neki pravac p znači da je svaki pravac u toj ravnini koji siječe p okomit na p. Intuitivno ćemo pretpostavljati da takva ravnina postoji.

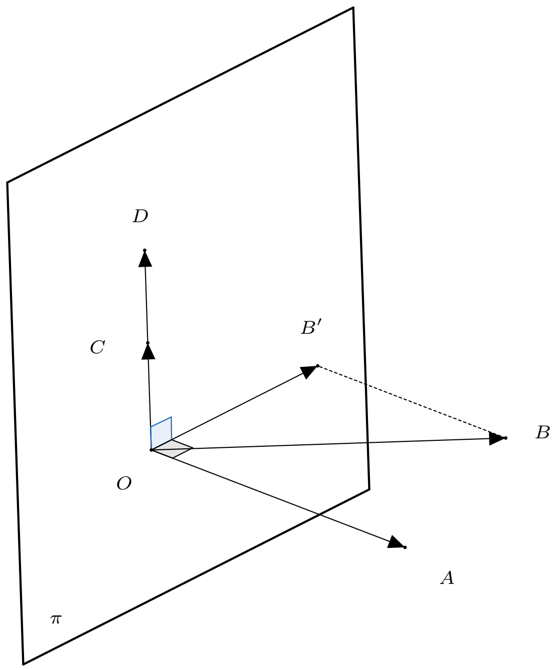
Neka je sada B' ortogonalna projekcija točke B na ravninu π. Promatrajmo orijentiranu dužinu $\overrightarrow{OB'}$. Vrijedi

$$|OB'| = |\vec{b}| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = |\vec{b}| \cdot \sin \phi$$

Neka je sada točka $C \in \pi$ takva da je $|OC| = |OB'|, OC \perp OB'$ i da je $([\overrightarrow{OA}], [\overrightarrow{OB'}], [\overrightarrow{OC}])$ desna baza. Pošto je OC okomit na OA i OB', okomit je i na ravninu koju određuju ta dva pravca, pa je $OC \perp OB$.

Dodajmo sada točku $D \in \pi$ tako da je

$$[\overrightarrow{OD}] = |\vec{a}| \cdot [\overrightarrow{OC}]$$



Onda vrijedi

$$|\overrightarrow{OD}| = |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{OC}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\phi = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Nadalje, kako je po konstrukciji $OD \perp OA$ i $OD \perp OB$, te je $([\overrightarrow{OA}], [\overrightarrow{OB}], [\overrightarrow{OD}])$ desna baza, vrijedi

$$[\overrightarrow{OD}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Sada označimo

$$\vec{s} = \vec{b} + \vec{c}$$

Možemo analogno provesti konstrukciju za $\vec{a} \times \vec{c}$, te $\vec{a} \times \vec{s}$.

Uočimo da reprezentanti vektora $\vec{b}, \vec{c}, \vec{s}$ čine trokut radi definicije vektorskog zbrajanja. Nadalje, ortogonalna projekcija tog trokuta na ravninu je opet trokut. Konstrukcija točke C je zapravo rotacija na ravnini π za $\frac{\pi}{2}$, pa se taj projicirani trokut ponovo preslikava u trokut.

Konačno, imamo množenje svih stranica trokuta s $|\vec{a}|$, što preslikava trokut u sličan trokut. Pošto reprezentanti $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{s}$ čine trokut, vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{s} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$$

□

Korolar 3.7.1. *Za vektorsko množenje vrijedi:*

I $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

II $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}), \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$

Dokaz.

I $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = -[(\lambda \vec{b}) \times \vec{a}] = -[\lambda(\vec{a} \times \vec{b})] = [(-1)\lambda](\vec{b} \times \vec{a}) = \lambda[-(\vec{b} \times \vec{a})] = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

II $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = -[\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})] = -[\vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}] = -[-\vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}] = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

□

Sada ćemo proučiti koordinate vektorskog produkta u proizvoljnoj desnoj ortonormiranoj bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Prvo razmotrimo problem za sam skup $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Naime, pošto ta tri vektora čine desnu bazu $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ i imaju module jednake jedan, znači da će vrijediti:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

Antikomutativnost nam sada daje

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

Zamjena neka druga dva mjesta daje lijevu bazu pa je recimo

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \implies \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

Također, konačno imamo i

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \implies \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Sada možemo kreirati tablicu koju ćemo ubuduće moći koristiti u dokazivanju identiteta koji se tiču vektorskog produkta. Uočimo da se u prvom stupcu nalazi prvi operand, a u prvom retku drugi operand vektorskog množenja.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Propozicija 3.7.4. *Neka dane koordinate vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *u nekoj ortonormiranoj bazi:*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Tada vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - b_3 a_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Dokaz. Vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

Pošto znamo da vrijedi distributivnost s obje strane, smijemo izmnožiti ove dvije zagrade kako smo navikli, "svaki sa svakim", pazeći pritom na poredak članova prve i druge sume. Nadalje, vrijedi kvaziasocijativnost s obje strane pa smijemo "izvući realni faktor ispred svakog sumanda". Naravno, zbrajanje vektora je komutativno pa poredak sumanada nije bitan. Dobivamo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

$$= a_1b_1\vec{i}\times\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\times\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\times\vec{k} + a_2b_1\vec{j}\times\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\times\vec{j} + a_2b_3\vec{j}\times\vec{k} + a_3b_1\vec{k}\times\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\times\vec{j} + a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}$$

Sada ćemo iskoristiti ranije napisanu tablicu i izračunati produkte vektora ortonormirane baze:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1b_1\vec{0} + a_1b_2\vec{k} + a_1b_3(-\vec{j}) + a_2b_1(-\vec{k}) + a_2b_2\vec{0} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} + a_3b_2(-\vec{i}) + a_3b_3\vec{0}$$

Sada pomoću komutativnosti zbrajanja i distributivnosti množenja vektora skalarom konačno dobivamo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Odnosno, zapisano pomoću koordinata:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$\square$

Propozicija 3.7.5. *Za sve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi:*

I $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

II $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Dokaz. Odaberimo neku ortonormiranu bazu $\{i, j, k\}$ i zapišimo koordinate vektora u toj bazi

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{c} &= (c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

Prema prethodnoj propoziciji, zaključujemo da vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - a_2b_1) = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - b_3a_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Ako pomnožimo taj izraz zdesna s $\vec{i}$ dobivamo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{i} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} \times \vec{i} + (a_3b_1 - b_3a_1)\vec{j} \times \vec{i} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \times \vec{i} =$$

$$= -(a_3b_1 - b_3a_1)\vec{k} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{j} =$$

$$= a_1b_1\vec{i} + a_1b_2\vec{j} + a_1b_3\vec{k} - a_1b_1\vec{i} - a_2b_1\vec{j} - a_3b_1\vec{k} =$$

$$= a_1(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) - b_1(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})$$

$$\iff (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{i} = a_1\vec{b} - b_1\vec{a}$$

$$\implies (\vec{a} \times \vec{b}) \times (c_1\vec{i}) = a_1c_1\vec{b} - b_1c_1\vec{a}$$

Analogno, množeći s $c_2\vec{j}$ i $c_3\vec{k}$ dobivamo jednakosti

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(c_2\vec{j}) = a_2c_2\vec{b} - b_2c_2\vec{a}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(c_3\vec{k}) = a_3c_3\vec{b} - b_3c_3\vec{a}$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}) = (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\vec{b} - (b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\vec{a}$$

$$\iff (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

Mogli smo naravno napisati $((a_1, a_2, a_3)\times(b_1, b_2, b_3))\times(c_1, c_2, c_3)$ i izmnožiti direktno, no ovako smo skratili raspis. Zbog antikomutativnosti vrijedi

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = -((\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

pa je dokazana i druga tvrdnja. □

Korolar 3.7.2. *Za sve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi **Jacobijev identitet**[1]*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \vec{0}$$

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji vrijedi:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$$

$$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Zbrajanjem tih triju jednakosti slijedi tražena tvrdnja. □

Uočimo po prethodnoj propoziciji da vektorsko množenje nije asocijativna operacija. Također, ne može imati jedinicu, pošto je $\vec{e}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{e} = \vec{a}$ u kontradikciji s antikomutativnosti. Ukoliko u vektorskom prostoru nad poljem definiramo operaciju množenja koja ima svojstva kao u teoremu 3.7.1 i korolaru 3.7.1, odnosno vrijedi kvaziasocijativnost i distributivnost, na oba člana takvu strukturu zovemo **algebra** nad danim poljem.
Ukoliko (neasocijativna) algebra nad nekim poljem u kojoj je množenje antikomutativno zadovoljava Jacobijev identitet takvu algebru zovemo **Liejeva algebra**[2]. Dakle, u prethodnom izlaganju dokazali smo sljedeći teorem:

Teorem 3.7.2. *Vektorski prostor V^3 je uz vektorsko množenje Liejeva algebra.*

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (10. prosinac 1804. - 18. veljače 1851.) - njemački matematičar
[2] Marius Sophus Lie (17. prosinca 1842. - 18. veljače 1899.) - norveški matematičar

3.8 Mješoviti produkt

Definicija 3.8.1. Neka je dano preslikavanje $m : V^3 \times V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ definirano sa

$$m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

za sve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$. To preslikavanje zovemo mješovito ili **vektorsko-skalarno množenje**, a rezultat tog preslikavanja nazivamo **mješoviti produkt**. Često ćemo ga označavati i s

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Propozicija 3.8.1. *Mješoviti produkt triju vektora jednak je nuli ako i samo ako su ta tri vektora komplanarni.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni.
Ako je ikoji od njih jednak nul-vektoru, tvrdnja je trivijalna pa ćemo pretpostaviti da su svi različiti od nul-vektora. Pošto su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je okomit na tu ravninu. To znači da je okomit i na vektor $\vec{c}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c} \implies (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

S druge strane, ako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, onda imamo tri slučaja:

I $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

II $\vec{c} = \vec{0}$

III $\vec{c} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

Prvi slučaj po propoziciji 3.7.2 implicira da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori. Tada je skup $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ linearno zavisan, odnosno dimenzija prostora razapetog skupom $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ je najviše dva jer je onda i taj skup zavisan, pa su ta tri vektora komplanarni.
Drugi slučaj također implicira da je skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ linearno zavisan, što znači da su ta tri vektora komplanarna. Treći slučaj se rješava analogno prvom smjeru: ukoliko je vektor $\vec{c}$ okomit na pravac koji je okomit na ravninu koju razapinju $\vec{a}$ i $\vec{c}$, onda je $\vec{c}$ komplanaran s ta dva vektora. □

Propozicija 3.8.2. *Neka su dani vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ koji su dani na sljedeći način koordinatama u odnosu na neku ortonormiranu bazu:*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

Tada vrijedi:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Dokaz. Neka je zadana ortonormirana baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Prvo ćemo izračunati vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$. Naime, po propoziciji 3.7.4 vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Uvedimo sada da skratimo zapis:

$$x_1 = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$x_2 = a_3b_1 - a_1b_3$$

$$x_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

tada je $\vec{a} \times \vec{b} = (x_1, x_2, x_3)$. Izračunajmo sada skalarni produkt izračunatog vektorskog produkta i vektora $\vec{c}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (c_1, c_2, c_3)$$

Prema propoziciji 3.6.4 dobivamo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (c_1, c_2, c_3) = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3$$

Sada ćemo ponovo uvrstiti x_1, x_2 i x_3:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 =$$

$$= c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Zadnja jednakost vrijedi radi La Placeovog razvoja po trećem retku te matrice. Time je tvrdnja dokazana. □

Korolar 3.8.1. *Za proizvoljne vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

Rigorozni dokaz prethodnog korolara bio bi potpuno mehanički, no bitno je znati da se ideja bazira na sljedećem:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

Analogno se dobivaju i sve ostale jednakosti. Ovime se direktno dobiva:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Zadnja jednakost vrijedi zbog komutativnosti skalarnog množenja. Time smo dokazali sljedeći korolar:

Korolar 3.8.2. *Za sve vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi:*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Pošto bi razmatranje raznih geometrijskih oblika u prostoru bilo suviše sofisticirano i nema smisla aksiomatsko zasnivanje volumena i geometrijskih tijela uvrstiti u ovakav materijal. Stoga ćemo navedene pojmove uzimati potpuno intuitivno i doživljavati ih *prirodno*, kako smo se s njima susretali tokom obrazovanja do sada.

Definicija 3.8.2. Neka su dan linearno nezavisan skup vektora $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset V^3$. Neka su sada dane točke $O, A, B, C, A', B', C', O'$ takve da vrijedi:

$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{A'O'} \in \vec{a}$$

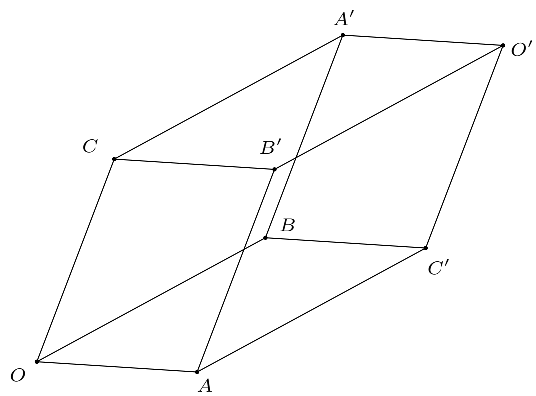
$$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'O'} \in \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{C'O'} \in \vec{c}$$

Tada dio prostora omeđenog paralelogramima (očito paralelogramima radi definicije vektora)

$$OAB'C, BC'O'A', OBA'C, AC'O'B', CB'O'A', OAC'B$$

nazivamo **paralelepiped** $OAC'BCB'O'A'$.

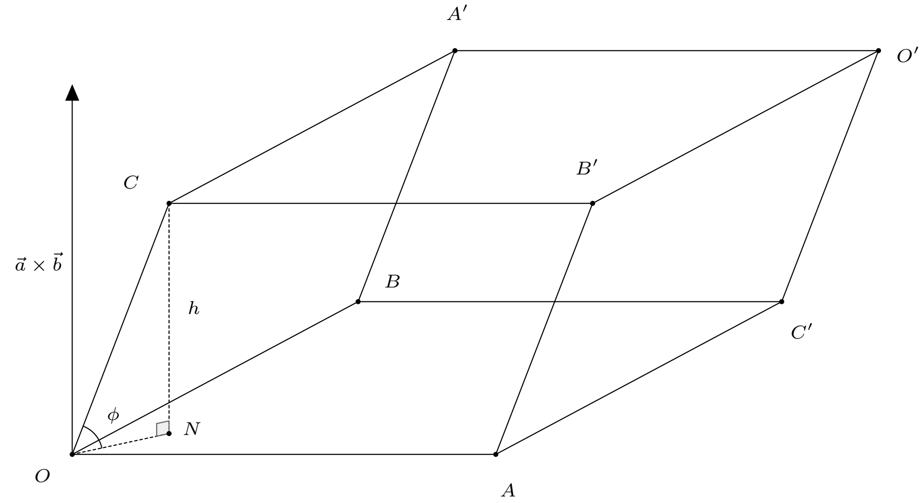


Uočimo da su parovi navedenih paralelograma koji nemaju zajedničkih vrhova na paralelnim ravninama. Primjerice, za paralelograme $OAB'C$ i $BC'O'A'$ vrijedi, pošto su $AC'O'B'$ i $OBA'C$ paralelogrami, da su $AB' \parallel O'C'$ i $OC \parallel A'B$, pa su ravnine na kojima leže paralelne. To znači da je paralelepiped prizma. Specijalno, kada su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u parovima međusobno okomiti, govorimo o paralelepipedu kojeg zovemo **kvadar**. Ukoliko ti vektori imaju i jednake module takav paralelepiped zovemo **kocka**.

Teorem 3.8.1. *Volumen paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ je jednak*

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

Dokaz. Neka je dan paralelepiped s vrhovima kao u definiciji. Kako $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ čine desnu bazu imamo dva slučaja. Ili je skup $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ lijeva, ili je desna baza. Baza sigurno jest pošto je po definiciji paralelepipeda linearno nezavisan. Možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti da je desna baza, jer kad ne bi bio, onda možemo samo promatrati $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, pa se apsolutna vrijednost miješanog produkta ne mijenja.



Sada se krajnje točke reprezentanata vektora $\vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ iz točke O nalaze s iste strane ravnine π na kojoj leže točke O, A i B. Neka je N nožište okomice (koju smo spomenuli da uzimamo intuitivno) iz točke C na π. Označimo sada $\phi = \sphericalangle CON$. Kako je $\triangle ONC$ pravokutan, vrijedi

$$h = |CN| = |OC| \cdot \sin\phi = |\vec{c}| \cdot \sin\phi$$

Kako je paralelepiped prizma, njegov volumen iznosi

$$V = B \cdot h$$

Gdje je B osnovica ili baza prizme, u ovom slučaju paralelogram $OAC'B$.
Prema propoziciji 3.7.3 zaključujemo da je

$$B = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Tada je

$$V(OAC'BCB'O'A') = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot h = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\sin(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle(\vec{c}, \vec{a}\times\vec{b})) = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{c}, \vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

U ovom slučaju vrijedi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ jer se radi o desnoj bazi pa su $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ s iste strane ravnine, pa je $\sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < \frac{\pi}{2} \implies \cos\sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) > 0$.

□

Korolar 3.8.3. *Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ dani svojim koordinatama*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

onda je površina paralelepipeda jednaka

$$\left| \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right|$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno izračunavanjem površine pomoću prethodnog teorema, te uvrštavanjem

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

što dobivamo pomoću propozicije 3.8.2. □

Poglavlje 4

Analitička geometrija u prostoru

4.1 Kartezijev koordinatni sustav

Definicija 4.1.1. Odaberimo proizvoljnu točku $O \in E^3$. Tu točku ćemo zvati **ishodište**. Neka je sada

$$V^3(O) := \{\overrightarrow{OT} : T \in E^3\}$$

skup svih orijentiranih dužina čija je O početna točka. Element $\vec{r_a} \in V^3(O)$ zovemo **radij-vektor**.

Propozicija 4.1.1. *Funkcija $r : V^3 \to V^3(O)$ definirana sa*

$$r([\overrightarrow{OA}]) := \overrightarrow{OA}$$

je bijekcija.

Dokaz. Prvo pokažimo da je funkcija surjekcija. Naime, za bilo koju točku $T \in E^3$ i pripadajući radij-vektor $\overrightarrow{OT}$ očito postoji vektor $[\overrightarrow{OT}]$ takav da je

$$f([\overrightarrow{OT}]) = \overrightarrow{OT}$$

S druge strane, ako postoje vektori $[\overrightarrow{OA}]$ i $[\overrightarrow{OB}]$ koji se preslikavaju u isti radijvektor, dobivamo očitu kontradikciju jer svaka klasa ima točno jedan reprezentant iz točke O, te kada bi ti reprezentanti bili jednaki, nalazili bi se u dvije različite klase i to je u kontradikciji s tvrdnjom da su klase ekvivalencije disjunktne. $\square$

Propozicija 4.1.2. *Definirajmo preslikavanje $+ : V^3(O) \times V^3(O) \to V^3(O)$ tako da*

$$\vec{r_a} + \vec{r_b} := r(r^{-1}(\vec{r_a}) + r^{-1}(\vec{r_b})) \qquad \forall \vec{r_a}, \vec{r_b} \in V^3(O)$$

i preslikavanje $\cdot : \mathbb{R} \times V^3(O) \to V^3(O)$ takvo da je

$$\alpha\vec{r_a} := r(\alpha r^{-1}(\vec{r_a})) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{r_a} \in V^3(O)$$

Tada je $V^3(O)$ s te dvije operacije vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Ovu propoziciju nećemo posebno dokazivati jer je dokaz izrazito mehanički. Bitna je iznesena ideja, a to je da zapravo umjesto svake klase uzmemo točno jednog predstavnika i da ih zbrajamo po *pravilu paralelograma*, odnosno da obavimo operaciju kao da se radi o običnim vektorima i promatramo samo reprezentant dobivene klase koji počinje iz O. To zaista jest vektorski prostor. Isto tako možemo preuzeti modul, smjer i orijentaciju iz vektorskog prostora V^3. Nećemo ulaziti u detalje dokaza jer nije potrebno već je isključivo tehničke prirode.

Napomena: Uočimo da i sada, kada smo koordinatizirali prostor pomoću nekog koordinatnog sustava postoji prirodna bijekcija između točaka i radijvektora koja svakoj točki T pridružuje radijvektor OT. Stoga ćemo često u narednom izlaganju na svojevrstan način identificirati radijvektore s njihovim krajnjim točkama pa ćemo reći primjerice da skup vektora čini ravninu. Neka vas to ne zbuni.

Definicija 4.1.2. Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora V^3 te neka je O ishodište. Tada neka je dana točka $T \in E^3$ takva da je

$$[\overrightarrow{OT}] = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Tada uređenu trojku $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nazivamo pravokutne ili **Kartezijeve koordinate** točke T u odnosu na **Kartezijev** ili pravokutni koordinatni sustav $\{O; , \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Radijvektore $\overrightarrow{OI} = r(\vec{i}), \overrightarrow{OJ} = r(\vec{j})$ i $\overrightarrow{OK} = r(\vec{k})$ nazivamo **koordinatni vektori**. Pravce OI, OJ i OK nazivamo **osi koordinatnog sustava**, a ravnine OIJ, OJK i OKI nazivamo **koordinatne ravnine**.
Za sustav $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kažemo da je **lijevi**, odnosno **desni**, koodinatni sustav ako je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lijeva, odnosno desna baza.

Mi ćemo sva daljnja razmatranja raditi pretpostavljajući da se radi o desnom koordinatnom sustavu.

Definicija 4.1.3. Neka je dano preslikavanje $k : E^3 \to \mathbb{R}^3$ takvo da je

$$k : T \to \vec{r_t} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \mapsto (x, y, z)$$

Takvo preslikavanje nazivamo **koordinatizacija** prostora E^3. Tada zapisujemo

$$T = (x, y, z) \text{ ili } T(x, y, z)$$

Propozicija 4.1.3. *Neka su dane točke $A(x_a, y_a, z_a), B(x_b, y_b, z_b) \in E^3$ u odnosu na neki koordinatni sustav. Tada vektor $[\overrightarrow{AB}]$ ima u tom sustavu koordinate*

$$[\overrightarrow{AB}] = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$

Dokaz. Po definiciji zbrajanja vektora imamo

$$[\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{OB}] \implies [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}]$$

$$\iff [\overrightarrow{AB}] = (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) - (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) = (x_b - x_a)\vec{i} + (y_b - y_a)\vec{j} + (z_b - z_a)\vec{k}$$

Time je tvrdnja dokazana. □

Dokaz. Neka su dane točke $A(x_a, y_a, z_a), B(x_b, y_b, z_b) \in E^3$ u odnosu na neki koordinatni sustav. Tada vrijedi:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

□

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji vrijedi

$$[\overrightarrow{AB}] = (x_b - x_a)\vec{i} + (y_b - y_a)\vec{j} + (z_b - z_a)\vec{k}$$

Nadalje, prema definiciji $|[\overrightarrow{AB}]| = d(A, B)$, pa prema propoziciji 3.6.4 direktno slijedi tvrdnja. □

4.2 Jednadžba ravnine

U sustavu vektora prostora, u prethodnom poglavlju, komentirali smo kako je linearna ljuska dvaju nekolinearnih vektora skup svih vektora komplanarnih s ta dva vektora, još konkretno vektorski potprostor.
Promotrimo sada radij-vektore. Naime neka su $\vec{r_a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{r_b} = \overrightarrow{OB}$ dva radijvektora.
Promotrimo linearnu ljusku $[\{\vec{r_a}, \vec{r_b}\}] = \{\alpha\vec{r_a} + \beta\vec{r_b} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ skupa ta dva vektora. Naime, analogno razmatranju pri kraju odjeljka *Trodimenzionalni vektorski prostor* zaključujemo da će, radi svojstava operacija zbrajanja i množenja skalarom, svi radij-vektori u toj linearnoj ljusci biti komplanarni s $\vec{r_a}$ i $\vec{r_b}$. Konkretnije, radit će se o svim radij-vektorima $\overrightarrow{OT} : T \in \pi$ gdje je π ravnina jednoznačno određena točkama O, A i B. Uočimo da smo tako odredili koordinate svih točaka na ravnini π. No, uočimo i sljedeće: koje god radij-vektore uzeli, ravnina koju tako dobivamo sadrži točku O.
Postavlja se pitanje kako možemo dobiti bilo koju ravninu. Naime, pošto proizvoljna ravnina na kojoj ne leži ishodište nije (očito po svojstvima vektorskih prostora) potprostor prostora radij-vektora.
Za svaku ravninu π koja ne prolazi ishodištem postoji točno jedna ravnina ω paralelna s π koja prolazi ishodištem. Tada je skup $\Omega = \{\overrightarrow{OT} : T \in \omega\}$ potprostor prostora radij-vektora.

Definicija 4.2.1. Neka je M potprostor vektorskog prostora V. Svaki skup oblika

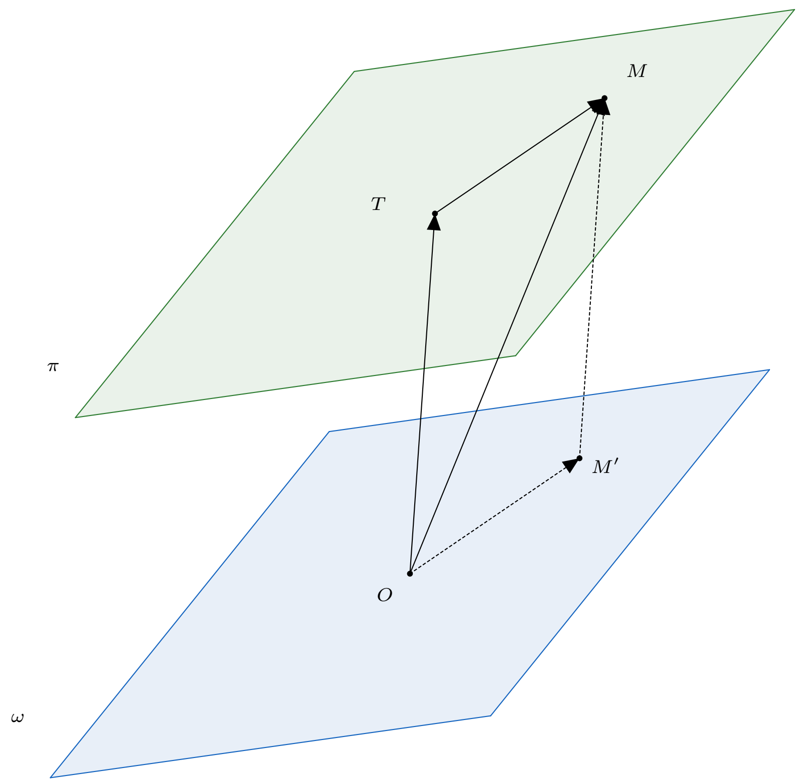
$$x + M := \{x + a : a \in M\}$$

naziva se **linearna mnogostrukost** u smjeru potprostora M.

Uzmimo sada bilo koji radij-vektor $\overrightarrow{OT}$ takav da je $T \in \pi$.
Sada tvrdimo da je skup $\Pi = \{\overrightarrow{OM} : M \in \pi\}$ linearna mnogostrukost u smjeru vektorskog potprostora Ω.
Naime, neka je $M \in \pi$ proizvoljna točka u ravnini π. Sada vrijedi da je

$$[\overrightarrow{OT}] + [\overrightarrow{TM}] = [\overrightarrow{OM}]$$

Želimo pokazati da postoji točka $M' \in \omega$ takav da je $\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM}$. Slučaj kada je $T = M$ je trivijalan pa pretpostavimo $T \neq M$.



Promotrimo sada ravninu γ koja prolazi točkama O, T i M. $TM = \pi \cap \gamma$, te neka je $p = \omega \cap \gamma$. Sada vrijedi $TM \parallel p$, jer leže na istoj ravnini γ, a kada bi se sjekli po pretpostavci paralelne ravnine π i ω morale bi se sjeći, pa bismo ulazili u kontradikciju. Sada povucimo pravac q kroz M paralelan s OT. Taj pravac također leži u ravnini γ. Uzmimo sada da je $\{M'\} = p \cap q$. Po konstrukciji je $OM'MT$ paralelogram pa je

$$[\overrightarrow{TM}] = [\overrightarrow{OM'}]$$

što dovršava dokaz tvrdnje da su svi radij-vektori skupa Π prikazivi kao zbroj $\overrightarrow{OT}$ i elementa skupa Ω. Da izvan te ravnine ne postoji takvih točaka vrlo se jednostavno dokazuje kontradikcijom.

Naime, da postoji točka $N \notin \pi$ takva da je $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{ON'}$ za neku točku $N' \in \omega$. Sada povucimo ravninu δ kroz točke T, N' i O. Tada mora postojati pravac na ω paralelan pravcu TN', no jedan takav pravac je $\delta \cap \pi$, pa ulazimo u kontradikciju s aksiomom o paralelama.

Ova kratka digresija nam govori da možemo svaku ravninu prikazati na sljdeći način.
Neka je π proizvoljna ravnina, te $T, A, B \in M$ neke proizvoljne točke nekolinearne točke te ravnine. Neka su sada $\vec{a} = [\overrightarrow{TA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{TB}]$ pripadajući vektori. Prema ranije dokazanom vrijedi:

$$X \in \pi \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{r_x} = \vec{r_t} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Jednadžbe ravnina i pravaca u pravilu zapisujemo na sljedeći način

$$\pi \ldots \vec{r} = \vec{r_t} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Ovakav zapis ravnine naziva se **vektorski parametarski oblik jednadžbe ravnine**.

Ukoliko su nam date koordinate

$$\begin{aligned} T =& (X_0, Y_0, Z_0) \\ \vec{a} =& (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} =& (b_x, b_y, b_z) \end{aligned}$$

Tada za neku točku $X = (x, y, z)$ vrijedi

$$X \in \pi \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} x = X_0 + \alpha a_x + \beta b_x \\ y = Y_0 + \alpha a_y + \beta b_y \\ z = Z_0 + \alpha a_z + \beta b_z \end{array}$$

Ovaj zapis naziva se **parametarski oblik jednadžbe ravnine**.

Korolar 4.2.1. *Neka je π proizvoljna ravnina, te $T, A, B \in M$ neke proizvoljne točke nekolinearne točke te ravnine. Neka su sada $\vec{a} = [\overrightarrow{TA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{TB}]$ pripadajući vektori. Ukoliko su nam date koordinate*

$$\begin{aligned} T &= (X_0, Y_0, Z_0) \\ \vec{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} &= (b_x, b_y, b_z) \end{aligned}$$

Tada za neku točku $X = (x, y, z)$ vrijedi

$$X \in \pi \iff \begin{vmatrix} x - X_0 & y - Y_0 & z - Z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

Dokaz. Točka X je u ravnini π ako i samo ako su vektori $[\overrightarrow{TX}], \vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni. Ta tvrdnja je po propoziciji 3.8.1 ekvivalentna tvrdnji $([\overrightarrow{TX}], \vec{a}, \vec{b}) = 0$, što dalje po propoziciji 3.8.2 daje traženu tvrdnju. □

Teorem 4.2.1. *Neka su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ takvi da je barem jedan od brojeva A, B, C različit od 0. Tada je*

$$\{X(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0\}$$

*ravnina u E^3. Takav zapis ravnine zove se **opći oblik jednadžbe ravnine**.*

Dokaz. Promotrimo slučaj kada je $D = 0$. Neka je bez smanjenja općenitosti $C \neq 0$. Tada vrijedi:

$$Ax + By + Cz = 0 \iff Cz = -Ax - By \iff z = -\frac{Ax + By}{C} = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y$$

Označimo sada s π skup svih točaka koje zadovoljavaju tu jednadžbu. Neka je tada $\Pi = \{\vec{r_x} : x \in \pi\}$ skup radij-vektora čije završne točke leže u tom skupu. Tada su sve uređene trojke (x, y, z) nultočaka te jednadžbe koordinate elemenata skupa Π. To znači da je

$$\Pi = \{(x, y, -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Odnosno, svaki se takav vektor može rastaviti na:

$$(x, y, -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y) = x(1, 0, -\frac{A}{C}) + y(0, 1, -\frac{B}{C})$$

Tada je zapravo Π linearna ljuska vektora $(1, 0, -\frac{A}{C})$ i $(0, 1, -\frac{B}{C})$. Kako su ta dva vektora linearno nezavisna zbog prva dva člana, ta linearna ljuska je očito dimenzije 2, što znači da je skup π ravnina. Dakle, za $D = 0$ je tvrdnja dokazana.

Pretpostavimo sada da $D \neq 0$.
Ponovo pretpostavljamo da $C \neq 0$. Tada vrijedi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \iff Cz = -Ax - By - D \iff z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

Dakle, analogno prethodnom slučaju zaključujemo da se radi o vektorima oblika $(x, y, -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C})$. Sada svaki takav vektor možemo prikazati na sljedeći način:

$$(x, y, -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}) = x(1, 0, -\frac{A}{C}) + y(0, 1, -\frac{B}{C}) + (0, 0, -\frac{D}{C})$$

Ako linearnu ljusku vektora $(1, 0, -\frac{A}{C})$ i $(0, 1, -\frac{B}{C})$ označimo kao:

$$\Gamma = \{x(1, 0, -\frac{A}{C}) + y(0, 1, -\frac{B}{C}) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

onda je očito

$$\Pi = (0, 0, -\frac{D}{C}) + \Gamma$$

odnosno skup svih radij-vektora s krajnjim točkama u skupu π je linearna mnogostrukost skupa Γ, što znači da je π ravnina. □

Korolar 4.2.2. *Neka je dan vektor $\vec{\eta} = (A, B, C)$, tada je taj vektor okomit na ravninu π.*

Dokaz. Dokažimo da je taj vektor okomit na svaki vektor linearne ljuske $\Gamma = \{x(1, 0, -\frac{A}{C}) + y(0, 1, -\frac{B}{C}) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Pošto je ravnina π paralelna sa ravninom α koja je skup krajnjih točaka vektora iz Γ, onda će $\vec{\eta}$ biti okomit i na π. Naime, za svaki vektor $\vec{v} = (x, y, -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y) \in \Gamma$ različit od nul-vektora vrijedi:

$$\vec{v} \cdot \vec{\eta} = Ax + By + C(-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y) = Ax + By - Ax - Ay = 0$$

a znamo da je $\vec{v} \cdot \vec{\eta}$ jednako 0 samo ako je jedan od tih vektora nul-vektor, ili ako su okomiti. Kako po pretpostavci A, B ili C nije jednako 0, $\vec{\eta} \neq \vec{0}$, a pretpostavili smo i $\vec{v} \neq \vec{0}$, zaključujemo da je $\vec{\eta} \perp \vec{v}$. □

Definicija 4.2.2. Udaljenost točke T od ravnine π definiramo kao

$$d(T,\pi) := \inf\{d(T,X), X \in \pi\}$$

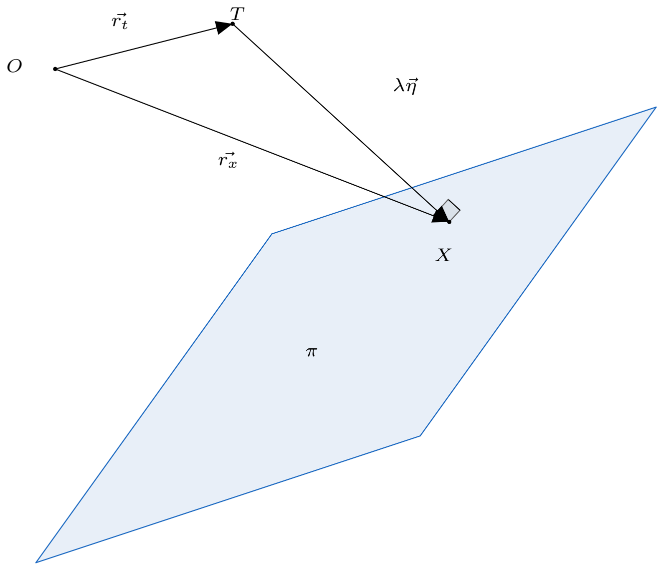
Teorem 4.2.2. *Neka je dana ravnina $\pi \ldots Ax+By+Cz+D=0$ i neka je $T=(x_0,y_0,z_0) \in E^3$ proizvoljna točka u prostoru.*
Tada vrijedi

$$d(T,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Dokaz. Neka je $\vec{\eta}=(A,B,C)$ vektor normale ravnine π. Označit ćemo $\Pi=\{\overrightarrow{OX} : X \in \pi\}$Slično propoziciji 1.3.7 argumentiramo da je najkraća udaljenost od točke do ravnine jednaka udaljenosti od točke do nožišta okomice iz te točke na ravninu.
Stoga ćemo pribrojiti vektoru $\vec{r_t}$ vektor $\vec{\eta}$ pomnožen s nekim skalarom λ tako da zbroj ta dva vektora leži na ravnini. Ukoliko zbroj ta dva vektora leži na ravnini, onda će koordinate krajnje točke te radij-vektora, odnosno koordinate samog vektora zadovoljavati jednadžbu ravnine.
Dakle,

$$\Pi \ni \vec{r_x} = \vec{r_t} + \lambda\vec{\eta} = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(A,B,C) = (x_0+\lambda A, y_0+\lambda B, z_0+\lambda C)$$

Sada nas zanima koliki je taj λ ako točka s tim koordinatama leži u ravnini π.



Treba vrijediti

$$\begin{gathered}
A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+C(z_0+\lambda C)+D=0 \\
\iff Ax_0+By_0+Cz_0+D = -\lambda(A^2+B^2+C^2) \\
\iff \lambda = -\frac{Ax_0+By_0+Cy_0+D}{A^2+B^2+C^2}
\end{gathered}$$

Sada je udaljenost točke T od ravnine π jednaka modulu vektora $\lambda\vec{\eta}$.

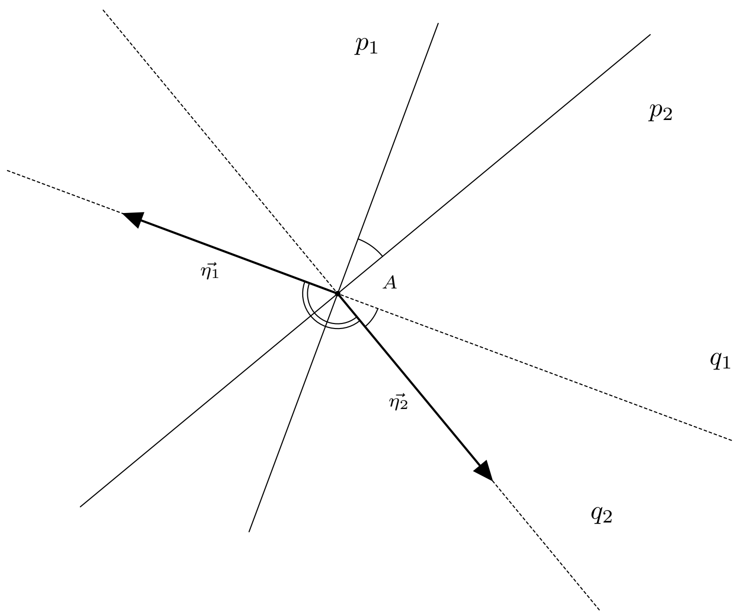
$$d(T,\pi) = |\lambda\vec{\eta}| = |\lambda| \cdot |\vec{\eta}| =$$

$$= \left| -\frac{Ax_0 + By_0 + Cy_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cy_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$\square$

Definicija 4.2.3. Neka su dane ravnine π_1 i π_2 čiji je presjek pravac p. Neka je sada $A \in p$ proizvoljna točka na tom pravcu. Neka je sada γ ravnina okomita na pravac p koja prolazi točkom A. Neka je $p_1 = \gamma \cap \pi_1$ i $p_2 = \gamma \cap \pi_2$. Sada se kut između ravnina π_1 i π_2 je manji od dva kuta koje zatvaraju pravci p_1 i p_2.
Taj kut označavamo s $\sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$.

Nedostaje dokaz da taj kut ne ovisi o odabiru točke A koji je prepušten čitatelju.
Uočimo da svaka dva pravca koja se sijeku zatvaraju dva kuta koji u sumi daju π. To znači da je barem jedan od ta dva kuta manji od $\frac{\pi}{2}$. Također, kosinus funkcija je nenegativna na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Također, neka su $\vec{\eta_1}$ i $\vec{\eta_2}$ vektori normala redom ravnina π_1 i π_2. Nacrtajmo pravce q_1 i q_2 u smjeru $\vec{\eta_1}$ i $\vec{\eta_2}$, redom, kroz točku A. Sada vrijedi $q_1 \perp p_1$ i $q_2 \perp p_2$.



S obzirom da postoji rotacija (za $\frac{\pi}{2}$) oko točke A koja šalje q_1 u p_1, te ta ista rotacija šalje q_2 u p_2, onda su kutovi između q_1 i q_2, te p_1 i p_2 jednaki. S obzirom da kut između vektora ovisi naravno i o orijentaciji, onda kut između vektora $\vec{\eta_1}$ i $\vec{\eta_2}$ ili jednak kutu između ravnina π_1 i π_2 ili njegovom suplementarnom kutu. Pošto je $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, tada vrijedi

$$|\cos(\pi - \sphericalangle(\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2}))| = |\cos\sphericalangle(\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2})| = \cos\sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$$

Tako dolazimo do sljedeće propozicije.

Propozicija 4.2.1. *Neka su dane dvije neparalelne ravnine π_1 i π_2 te njihovi vektori normala $\vec{\eta_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{\eta_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Tada vrijedi:*

$$\cos\sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Dokaz. U ranijem izlaganju smo pokazali da je $\cos\sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = |\cos\sphericalangle(\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2})|$.
Po definiciji skalarnog produkta vrijedi

$$\vec{\eta_1} \cdot \vec{\eta_2} = \cos\sphericalangle(\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2}) \cdot |\vec{\eta_1}| \cdot |\vec{\eta_2}|$$

Djelovanjem funkcije apsolutne vrijednosti dobivamo

$$|\vec{\eta_1} \cdot \vec{\eta_2}| = |\cos\sphericalangle(\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2})| \cdot |\vec{\eta_1}| \cdot |\vec{\eta_2}|$$

Koristimo činjenicu da $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) \neq (0, 0, 0)$ radi pretpostavki opće formule ravnine. Sada možemo podijeliti s modulima vektora normale i dobivamo

$$\cos\sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = |\cos\sphericalangle(\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2})| = \frac{|\vec{\eta_1} \cdot \vec{\eta_2}|}{|\vec{\eta_1}| \cdot |\vec{\eta_2}|}$$

Uvrštavanjem propozicije 3.6.4 dobivamo.

$$\cos\sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

□

Korolar 4.2.3. *Nužan i dovoljan uvjet za okomitost dviju ravnina je*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Dokaz. Jasno je da su dvije dužine okomite ako i samo ako je kosinus kuta među njima jednak 0. Uvrštavanjem u prethodnu propoziciju dobivamo direktno tvdnju korolara. □

4.3 Analitička predočenja pravca

Razmatranje na početku ovog odjeljka analogno je onomu na početku prethodnog. Naime, bilo koji pravac kroz ishodište je skup krajnjih točaka radij-vektora vektorskog potprostora dimenzije 1 prostora $V^3(O)$. Tako ukoliko uzmemo bilo koji pravac $p \subset E^3$ i pravac $q \parallel p$ takav da je $O \in q$, te skupove $Q = \{\overrightarrow{OX} : X \in q\}$ i $P = \{\overrightarrow{OX} : X \in p\}$, onda je Q vektorski potprostor. Ukoliko je $T \in p$, onda je $P = \vec{r_t} + Q$ linearna mnogostrukost. To znači da je pravac skup

$$p = \{X \in E^3 : \vec{r_x} = \vec{r_t} + \lambda\vec{q}\}$$

Tako dolazimo do oblika zapisa pravca koji nazivamo **vektorski parametarski oblik jednadžbe pravca**:

$$p \ldots \vec{r} = \vec{r_t} + \lambda\vec{q}$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\vec{q} \in Q$. Neka je sada opet $T = (x_0, y_0, z_0) \in p$, te neka je $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z) \in Q$. Tada za točku $X = (x, y, z)$ vrijedi

$$X \in p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{c} x = x_0 + \lambda \vec{q_x} \\ y = y_0 + \lambda \vec{q_y} \\ z = z_0 + \lambda \vec{q_z} \end{array}$$

Taj oblik zapisa nazivamo **parametarska jednadžba pravca**.

Pošto su vektori $\vec{r_x} - \vec{r_t}$ i $\vec{q}$ kolinearni vrijedi $(\vec{r_x} - \vec{r_t}) \times \vec{q} = \vec{0}$.
To po propoziciji 3.7.4 daje

$$((y - y_0)q_z - (z - z_0)q_y)\vec{i} + ((x - x_0)q_z - (z - z_0)q_x)\vec{j} + ((x - x_0)q_y - (y - y_0)q_x)\vec{k} = \vec{0}$$

Pošto su sve koordinate nul-vektora nule, mora vrijediti

$$\begin{aligned} (y - y_0)q_z - (z - z_0)q_y &= 0 \\ (x - x_0)q_z - (z - z_0)q_x &= 0 \\ (x - x_0)q_y - (y - y_0)q_x &= 0 \end{aligned}$$

Sada množimo te tri jednakosti s $\frac{1}{q_z q_y}, \frac{1}{q_z q_x}, \frac{1}{q_y q_x}$ i dobivamo

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}$$

što se naziva **normalna jednadžba pravca**.

Definicija 4.3.1. Neka su dani pravci $p, q \in E^3$ u prostoru. Neka je sada p' pravac paralelan s p koji siječe q. **Kut između pravaca** p i q se definira kao manji od dva suplementarna kuta koje zatvaraju pravci p' i q. Taj kut označavamo s

$$\sphericalangle(p, q)$$

Uočimo kako je relacija paralelnosti pravaca i dalje u prostoru relacija ekvivalencije, što znači da mi zapravo tvrdimo kako za bilo koje $p, p' \in s_p$ i $q, q' \in s_q$ takve da je $p \cap q \neq \emptyset, q' \cap p' \neq \emptyset$ vrijedi $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p', q')$. Taj argument dobivamo kada dodamo ravninu na kojoj leže p i p', te ravninu na kojoj leže q i q', pa se tvrdnja svodi na tvrdnju o postojanju kuta među ravninama.

Definicija 4.3.2. Neka je dan pravac $p \subset E^3$ i ravnina $\pi \subset E^3$. Definiramo preslikavanje $f : p \to \pi$ takvo da je

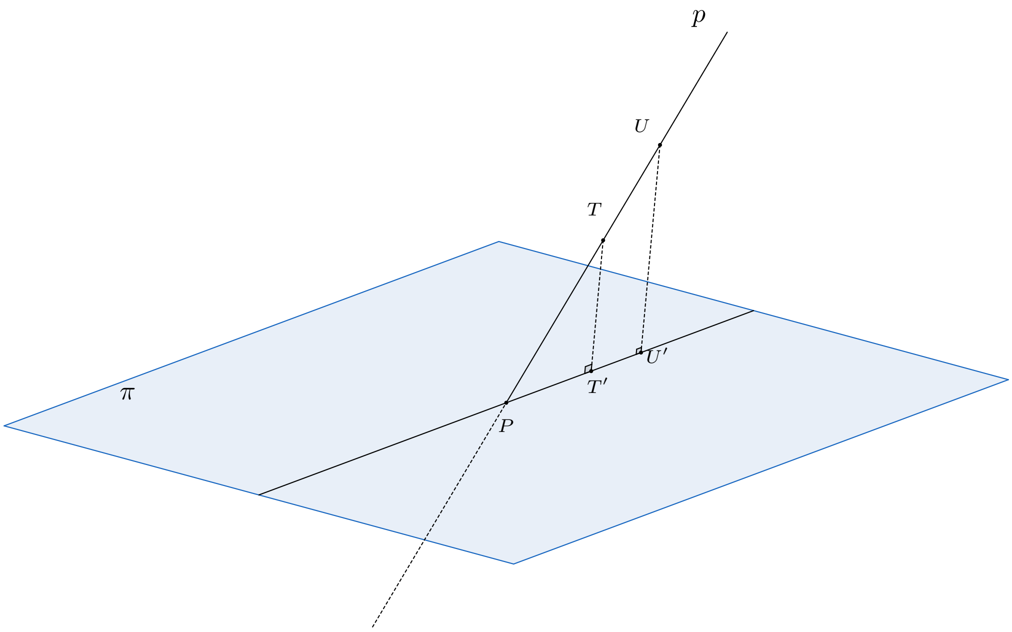
$$f(T) = \begin{cases} T' : TT' \perp \pi & \text{ako } T \notin \pi \\ T & \text{ako } T \in \pi \end{cases} \qquad \forall T \in p$$

Takvo preslikavanje ćemo zvati **ortogonalna projekcija** pravca p na ravninu π.

Također, u daljnjem izlaganju ćemo sliku te funkcije nazivati ortogonalnom projekcijom pravca na ravninu.

Propozicija 4.3.1. *Slika ortogonalne projekcije pravca p na ravninu π je ili pravac ili točka.*

Dokaz. Uočimo kako su svaka dva pravca okomita na ravninu π paralelna. Pretpostavit ćemo da p ne leži na ravnini π. Sada uzmimo točke $T, U \in p \backslash \pi$. Neka su točke dobivene preslikavanjem $T' = f(T), U' = f(U)$. Uzmimo sada ravninu α na kojoj leže pravci p i TT', uz pretpostavku $p \neq TT'$.



Pošto su pravci TT' i UU' paralelni, a točka U leži u toj ravnini, onda mora i pravac UU' ležati na toj ravnini. Također, pošto je TT' presjek te ravnine i ravnine π, onda mora biti $U' \in \pi \cap \alpha$. Tako smo pokazali da preslike svih ostalih točaka leže na tom pravcu. Slučaj kada pravac leži na ravnini je trivijalan, pošto je tada ortogonalna projekcija identiteta. Preostaje slučaj kada $TT' = p$, no p ne leži na π. U tom slučaju je $p \cap \pi = \{T'\}$, te je po definiciji ortogonalne projekcije $TT' \perp \pi$, što znači da je $UT' \perp \pi : \forall U \in TT' \backslash \{T'\}$. Tada je, dakle $\{T'\}$ slika funkcije. □

Propozicija 4.3.2. *Neka su zadani neparalelni pravci $p \ldots \vec{r} = \vec{r_p} + \lambda\vec{a}$ i $q \ldots \vec{r} = \vec{r_q} + \lambda\vec{b}$. Ako su zadane koordinate*

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$
$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

tada vrijedi

$$\cos \sphericalangle(p, q) = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Dodatno, pravci p i q su paralelni ako i samo ako pstoji $k \in \mathbb{R}$ tako da je

$$a_x = kb_x \qquad a_y = kb_y \qquad a_z = kb_z$$

Dokaz. Vidimo da je, pošto je pravac mnogostrukost, smjer pravca p jednak smjeru vektora $\vec{a}$ i smjer pravca q jednak smjeru vektora $\vec{b}$. Ovisno o orijentaciji ta dva vektora kut između p i q može biti jednak kutu među tim vektoriam ili njegovom suplementarnom kutu. U svakom slučaju, pošto je zbog definicije kut između pravaca manji ili jednak pravom kutu, njegov je kosinus pozitivan, pa vrijedi

$$\cos\sphericalangle(p,q) = |\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})|$$

Analogno dokazu propozicije 4.2.1 direktno slijedi prva tvrdnja.

Dva su pravca paralelna ukoliko su mnogostrukosti u smjeru istog potprostora. Odnosno, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ moraju pripadati istom potprostoru, što znači da mora postojati $k \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

odnosno

$$(a_x, a_y, a_z) = (kb_x, kb_y, kb_z)$$

□

Definicija 4.3.3. Kut između pravca p **i ravnine** π definiramo kao kut između pravca p i njegove ortogonalne projekcije na ravninu π, ukoliko je ona pravac. Ukoliko je slika ortogonalne projekcije točka, definiramo da je taj kut pravi. Kut između pravca i ravnine označavamo s

$$\sphericalangle(p,\pi)$$

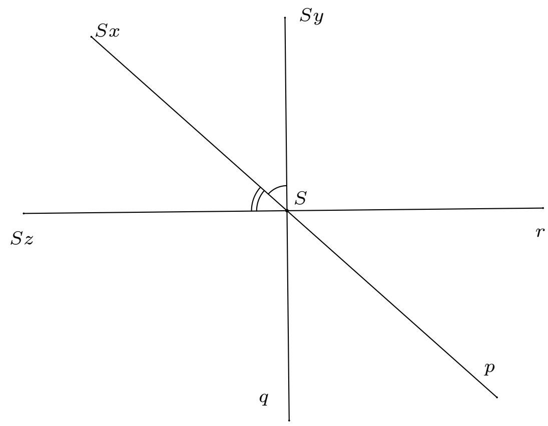
Propozicija 4.3.3. *Neka je dan pravac* $p \ldots \vec{r} = \vec{r_p} + \lambda\vec{a}$*, gdje su koordinate vektora* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$*. Nadalje, neka je dana ravnina* $\pi \ldots Ax + By + Cz + D$*. Tada vrijedi*

$$\sin\sphericalangle(p,\pi) = \frac{|Aa_x + Ba_y + Ca_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Dokaz. Neka je $\vec{\eta} = (A, B, C)$ vektor normale na ravninu π. Ako je $p \parallel \pi$, onda je $\sphericalangle(p,\pi) = 0$. Tada je vektor normale ravnine okomit i na pravac p, pa vrijedi
$\vec{a}\cdot\vec{\eta} = 0 \iff Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$.
Ukoliko pravac i ravnina nisu paralelni, sijeku se u točno jednoj točki $\{S\} = \pi \cap p$. Neka je q pravac paralelan u smjeru vektora $\vec{\eta}$ koji prolazi točkom S.
Ukoliko je vektor $\vec{\eta}$ paralelan s pravcem p, onda je $p \ldots \vec{r} = \vec{r_p} + \lambda\vec{\eta}$. To znači da je

$$\sin\sphericalangle(p,\pi) = \sphericalangle(q,\pi) = \frac{|A^2 + B^2 + C^2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1$$

Sada pretpostavimo da je $p \neq q$. Dodajmo ravninu α na kojoj leže ta dva pravca. Neka je $r = \alpha \cap \pi$. Neka su sada polupravci $Sx \subset p, Sy \subset q, Sz \subset r$ takvi da se Sx i Sy nalaze s iste strane pravca r, a Sz i Sx s iste strane pravca q.



Vidimo da je $\sphericalangle zSx + \sphericalangle xSz = \sphericalangle zSy = \frac{\pi}{2}$. Dakle,

$$\sin \sphericalangle(p, \pi) = \sin \sphericalangle(p, r) = \sin(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle(q, p)) = \cos \sphericalangle(n, p)$$

Sada slijedi tvrdnja. □

U idućoj propoziciji dajemo analitički izračun udaljenosti točke od pravca. Definicija udaljenosti ostaje ista kao u prvom poglavlju.
Neka je dana neka točka T i pravac P. Sada dodajmo ravninu π koja sadrži točku T i pravac p. Sada primjenimo propoziciju 1.3.7 i dobivamo da je dužina duljine $d(T, p)$ dužina koja spaja točku T i nožište iz T na pravac p.

Propozicija 4.3.4. *Neka je dan pravac* $p \ldots \vec{r} = \vec{r_p} + \lambda \vec{a}$ *gdje je* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{r_p} = (x_0, y_0, z_0)$ *i* $T = (x, y, z)$. *Tada je*

$$d(T, p) = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

gdje su

$$X = \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ a_y & a_z \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} z - z_0 & x - x_0 \\ a_z & a_x \end{vmatrix} \qquad Z = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix}$$

Dokaz. Neka je N nožište okomice iz točke T na p. Nadalje, neka je

$$[\overrightarrow{T_0 A}] = \vec{a}$$

Sada vrijedi

$$P(\triangle T T_0 A) = \frac{1}{2} |T_0 A| \cdot |TN|$$

Također, znamo po propoziciji 3.7.3 da je površina paralelograma čija su tri uzastopna vrha T, T_0 i A jednaka

$$|[\overrightarrow{T_0 T}] \times [\overrightarrow{T_0 A}]| = |(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \times (a_x, a_y, a_z)|$$

To znači da je

$$P(\triangle TT_0A) = \frac{|[\overrightarrow{T_0T}] \times [\overrightarrow{T_0A}]|}{2}$$

Prema propoziciji 3.7.4, vrijedi da je

$$[\overrightarrow{T_0T}] \times [\overrightarrow{T_0A}] = (X, Y, Z)$$

gdje je

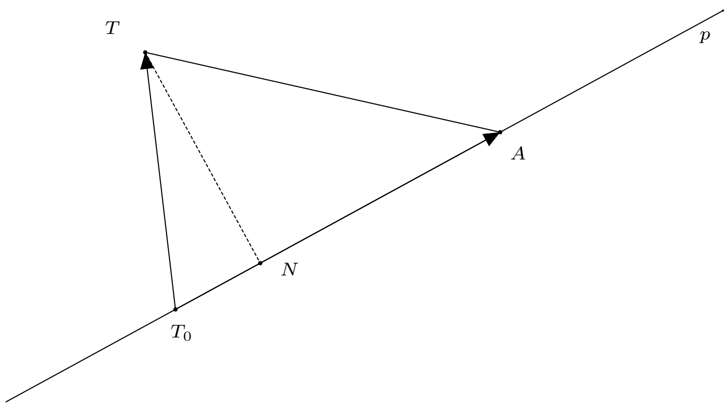
$$X = (y - y_0)a_z - (z - z_0)a_y = \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Analogno dobivamo i

$$Y = \begin{vmatrix} z - z_0 & x - x_0 \\ a_z & a_x \end{vmatrix} \qquad Z = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix}$$

Dakle,

$$P(\triangle TT_0A) = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{T_0T}] \times [\overrightarrow{T_0A}]| = \frac{1}{2}|(X, Y, Z)| = \frac{1}{2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$



$$\frac{1}{2}|T_0A| \cdot |TN| = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot d(T, p) = \frac{1}{2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\iff d(T, p) = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\iff d(T, p) = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

□

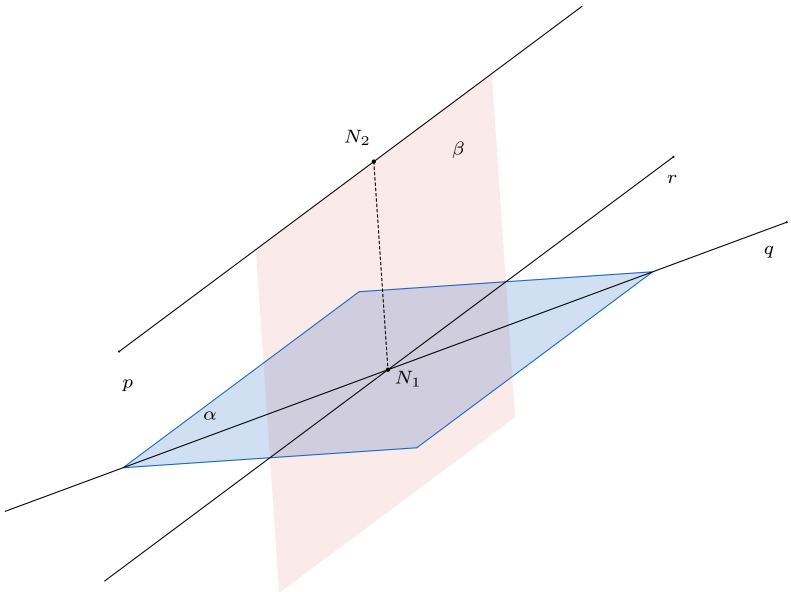
Definicija 4.3.4. Neka su dani pravci $p, q \subset E^3$. Udaljenost pravaca p i q definiramo kao

$$d(p, q) := \inf\{d(P, Q) : P \in p, Q \in q\}$$

Propozicija 4.3.5. *Ako su zadani pravci $p, q \subset E^3$ u prostoru, onda postoji pravac n takav da je $n \perp p$ i $n \perp q$, n siječe oba pravca p i q.*
Takav pravac n ćemo zvati ***zajednička normala*** *pravaca p i q.*

Dokaz. Imamo tri glavna slučaja u dokazu. Naime, ako se pravci p i q sijeku, onda uzmimo ravninu na kojoj leže ta dva pravca i povucimo okomicu na tu ravninu kroz sjecište tih pravaca i to je pravac koji zadovoljava uvjete propozicije.
Ako je $p \parallel q$, onda uzmimo ravninu na kojoj leže ta dva pravca i povucimo u toj ravnini okomicu na p. Tada je ta okomica okomita i na q, pa zadovoljava uvjete propozicije.

Ako su p i q mimoilazni, postoji ravnina α na kojoj leži pravac q koja je paralelna s pravcem p. Nadalje, neka je sada ravnina β takva da je $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$. Neka je sada $r = \alpha \cap \beta$. Spustimo li okomicu AR iz bilo koje točke $A \in \beta$ na pravac r, te okomicu BR u ravnini α na pravac r. Sada je $AR \perp BR$ i $AR \perp r$. To znači da je $AR \perp \alpha$.



Nadalje, pošto $p \parallel \alpha \implies r \parallel p$. Kada bi bilo $r \parallel q$, značilo bi da je $p \parallel q$ što je kontradikcija s pretpostavkom. Sada postoji točka N_1 takva da je $\{N_1\} = q \cap r$. Povucimo sada okomicu iz N_1 na p, te neka je N_2 nožište te okomice. Sada vrijedi
$N_1N_2 \cap p = \{N_2\}$, $N_1N_2 \cap q = \{N_1\}, N_2N_1 \perp p$. Kako je $N_2N_1 \perp p$ i $p \parallel r$, zaključujemo $N_1N_2 \perp r$. To sada znači da je, prema prethodno dokazanom, $N_1N_2 \perp \alpha$, pa je $N_1N_2 \perp q$, te pravac $n = N_1N_2$ zadovoljava uvjete propozicije.

□

Propozicija 4.3.6. *Neka su $p, q \subset E^3$ mimoilazni pravci. Neka je pravac n njihova zajednička normala, te neka su $n \cap p = \{N_p\}$ i $n \cap q = \{N_q\}$ presjeci normale s pravcima. Tada vrijedi*

$$d(p, q) = |N_pN_q|$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljne točke $P \in p$ i $Q \in q$. Dokazat ćemo $|PQ| \geq |N_pN_q|$.
Pošto je $P = N_p$ i $Q = N_q$, trivijalan slučaj, bez smanjenja općenitosti ćemo pretpostaviti da $Q \neq N_q$. Neka je π ravnina na kojoj leži pravac p i paralelna je s pravcem q. Prema dokazu

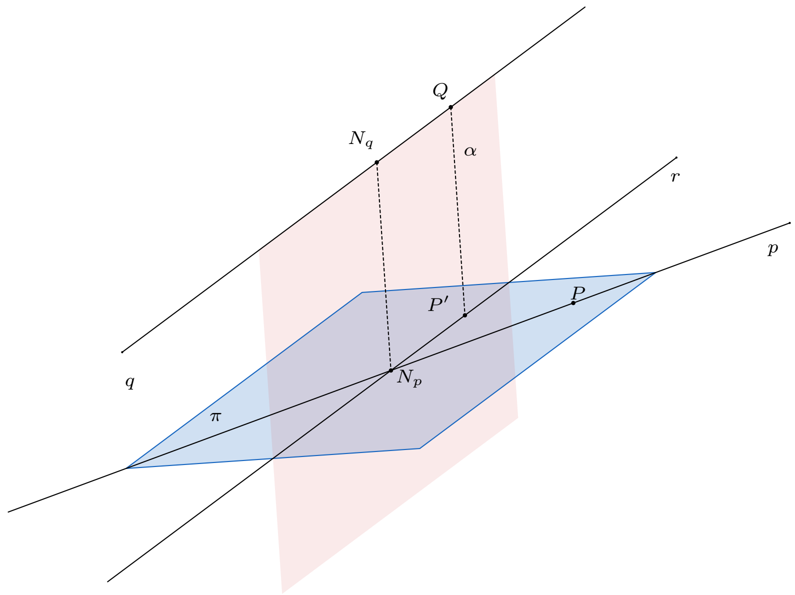
prethodne propozicije i konstrukcije normale dvaju pravaca, vrijedi $n \perp \pi$. Neka je sada $P' \in \pi$ takva da je $OP' \perp \pi$.
Sada promotrimo ravninu na kojoj leže P, Q i P'. Koristeći propoziciju 1.3.7 dobivamo

$$|QP| \geq |QP'|$$

jer je $QP' \perp PP'$.
Također, ako definiramo ravninu α kao ravninu na kojoj leže pravci q i n, onda je $\alpha \perp \pi$.

$$P' \in r = \alpha \cap \pi$$

Sada je $QP'N_pN_q$ paralelogram, štoviše pravokutnik, jer je $q \parallel r$, $n \perp r$ i $QP' \perp r$.



Sada smo dobili $|QP'| = |N_pN_q|$.

$$|QP| \geq |QP'| = |N_pN_q|$$

Pošto je udaljenost proizvoljne dvije točke na tim pravcima veća ili jednaka udaljenosti sjecišta tih pravaca s normalom dokazali smo da je $|N_pN_q| = \inf\{|PQ| : P \in p, Q \in q\} = d(p, q)$.

$\square$

Propozicija 4.3.7. *Neka su dani pravci*

$$p \ldots \vec{r} = \vec{r_P} + \lambda \vec{p}$$

$$q \ldots \vec{r} = \vec{r_Q} + \lambda \vec{q}$$

takvi da su koordinate pripadajućih vektora i točaka redom:

$$\begin{aligned} P =& (x_p, y_p, z_p) \\ \vec{p} =& (p_x, p_y, p_z) \\ Q =& (x_q, y_q, z_q) \\ \vec{q} =& (q_x, q_y, q_z) \end{aligned}$$

Tada vrijedi

$$d(p,q) = \frac{\begin{vmatrix} x_q - x_p & y_q - y_p & z_q - z_p \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}}{\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) - (p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z)^2}}$$

Dokaz. Neka je pravac $n = N_p N_q$ normala pravaca p i q, uz $N_p \in p, N_q \in q$. Sada odaberimo točku $T \in E^3$ takvu da je $[\overrightarrow{N_pT}] = [\overrightarrow{PQ}]$. Uočimo da je sada N_pPQT paralelogram. Tada je $N_pP \parallel TQ$, pa je $TQ \subset \pi$, gdje je π ravnina paralelna s p na kojoj leži pravac q. To znači da je $\sphericalangle N_pN_qT = \frac{\pi}{2}$, odnosno $\triangle N_qN_pT$ je pravokutan trokut, pa za njega vrijede trigonometrijski identiteti.

$$|N_pN_q| = |N_pT| \cdot \cos \sphericalangle NqN_pT$$

S druge strane, prema definiciji skalarnog produkta vrijedi

$$[\overrightarrow{N_pT}] \cdot [\overrightarrow{N_pN_q}] = |N_pT| \cdot |N_pN_q| \cdot \cos \sphericalangle([\overrightarrow{N_pT}], [\overrightarrow{N_pN_q}]) = |N_pT| \cdot |N_pN_q| \cdot \cos \sphericalangle N_qN_pT$$

$$\iff \cos \sphericalangle N_qN_pT = \frac{[\overrightarrow{N_pT}] \cdot [\overrightarrow{N_pN_q}]}{|N_pT| \cdot |N_qN_p|}$$

Uvrštavanjem sada vrijednosti $\cos \sphericalangle N_qN_pT$ u ranije dobivenu jednakost dobivamo

$$d(p,q) = |N_pN_q| = |N_pT| \cdot \frac{[\overrightarrow{N_pT}] \cdot [\overrightarrow{N_pN_q}]}{|N_pT| \cdot |N_qN_p|} = \frac{[\overrightarrow{N_pT}] \cdot [\overrightarrow{N_pN_q}]}{|N_pN_q|}$$

Uvrstimo sada $[\overrightarrow{N_pT}] = [\overrightarrow{PQ}]$:

$$d(p,q) = [\overrightarrow{PQ}] \cdot \frac{[\overrightarrow{N_pN_q}]}{|N_pN_q|}$$

Uočimo da je $[\overrightarrow{N_pN_q}] \perp \vec{p}$ i $[\overrightarrow{N_pN_q}] \perp \vec{q}$. To znači da je smjer vektora jednak smjeru vektora $\vec{p} \times \vec{q}$. Tada vrijedi sljedeća jednakost:

$$\frac{[\overrightarrow{N_pN_q}]}{|N_pN_q|} = \pm \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{|\vec{p} \times \vec{q}|}$$

Predznak ovisi o orijentacijama vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$, a pošto ih još u dokazu nismo koristili, možemo umjesto $\vec{p}$ uzeti $-\vec{p}$ kako bi predznak bio $+$.
Također, zapišimo $[\overrightarrow{PQ}] = \vec{r_Q} - \vec{r_P}$, te uvrštavanjem dobivamo

$$d(p,q) = (\vec{r_Q} - \vec{r_P}) \cdot \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{|\vec{p} \times \vec{q}|} = \frac{(\vec{r_Q} - \vec{r_P}), \vec{p}, \vec{q}}{|\vec{p} \times \vec{q}|}$$

Sada koristimo propoziciju 3.8.2 i dobivamo:

$$d(p,q) = \frac{\begin{vmatrix} x_q - x_p & y_q - y_p & z_q - z_p \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Lema 4.3.1. ***(Lagrangeov identitet)*** *Za vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vrijedi*

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$$

Prethodna se lema može dokazati jednostavno mehanički pa je dokaz iste prepušten čitatelju. Iskorištavanjem te leme, te uvrštavanjem koordinata u dobiveno slijedi direktno tvrdnja propozicije.

$\square$

4.4 Plohe drugog reda

Neka je dan polinom drugog stupnja s realnim koeficijentima u tri varijable

$$p(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0$$

Promatrat ćemo skupove nultočaka tog polinoma, odnosno skup

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : p(x, y, z) = 0\}$$

Za taj skup govorimo da ima jednadžbu $p(x, y, z) = 0$.

Sada ćemo nabrojati neke takve skupove:

I **Eliptički cilindar**

Ako su $a, b > 0$, skup koji ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 0z = 1$$

nazivamo eliptički cilindar. Uočimo da ako stavimo preduvjet $z = 0$ dobivamo skup točaka koje u ravnini zadanoj s $z = 0$ dobivamo elipsu. Sada je naš skup trag te elipse kada se giba po z-osi.

II **Hiperbolički valjak**

Ako su $a, b > 0$, skup koji ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 0z = 1$$

nazivamo hiperbolički cilindar. Uočimo da ako stavimo preduvjet $z = 0$ dobivamo skup točaka koje u ravnini zadanoj s $z = 0$ dobivamo hiperbolu. Sada je naš skup trag te hiperbole kada se giba po z-osi.

III **Parabolički valjak**

Skup rješenja jednadžbe

$$y^2 = 2px + 0z \qquad p \neq 0$$

se zove parabolički valjak. Znamo da $y^2 = 2px$ crta parabolu u xy ravnini, pa je parabolički valjak trag parabole koja se giba duž z-osi.

IV **Elipsoid**

Ako su $a, b, c > 0$, skup koji ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nazivamo elipsoid, a vrijednosti a, b i c nazivamo **poluosi elipsoida.**

Ukoliko vrijedi $a = b$, dobivamo **rotacioni elipsoid** koji nastaje rotacijom oko z-osi. Ako je pak $a = b = c$ onda se elipsoid zove **sfera** radijusa a.

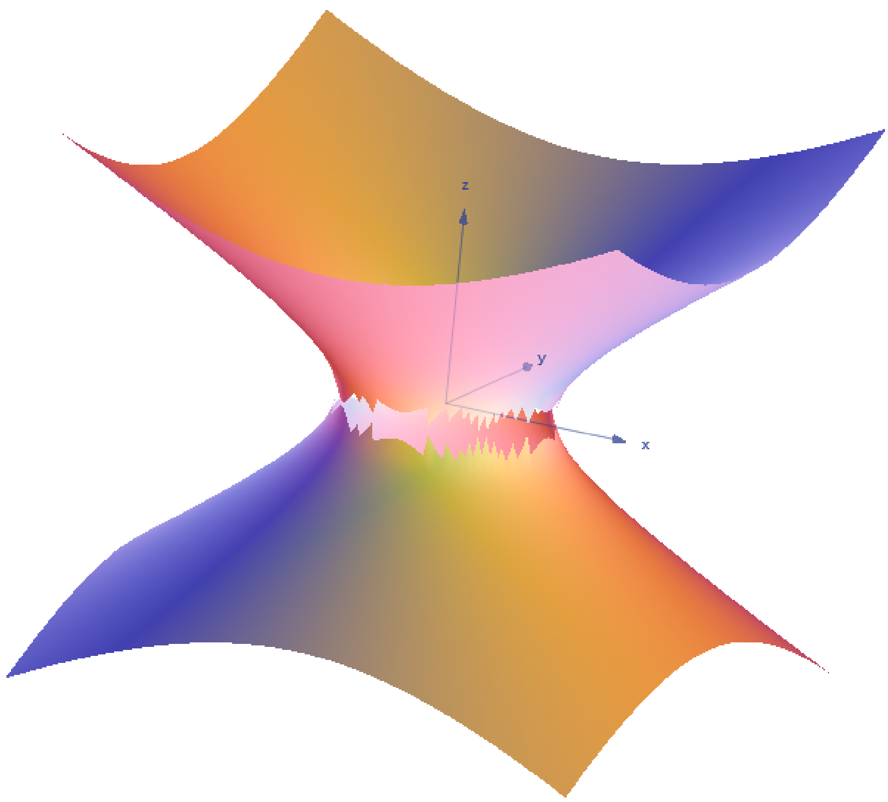
V **Jednokrilni hiperboloid**

Ako su $a, b, c > 0$, nultočke jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

čine skup koji nazivamo jednokrilni hiperboloid.

Tipični presjeci jednokrilnog hiperboloida i ravnina paralelnih s ravninom xy su elipse. Presjeci jednokrilnog hiperboloida i ravnina paralelnih s ravninama xz odnosno yz su hiperbole.



jednokrilni hiperboloid

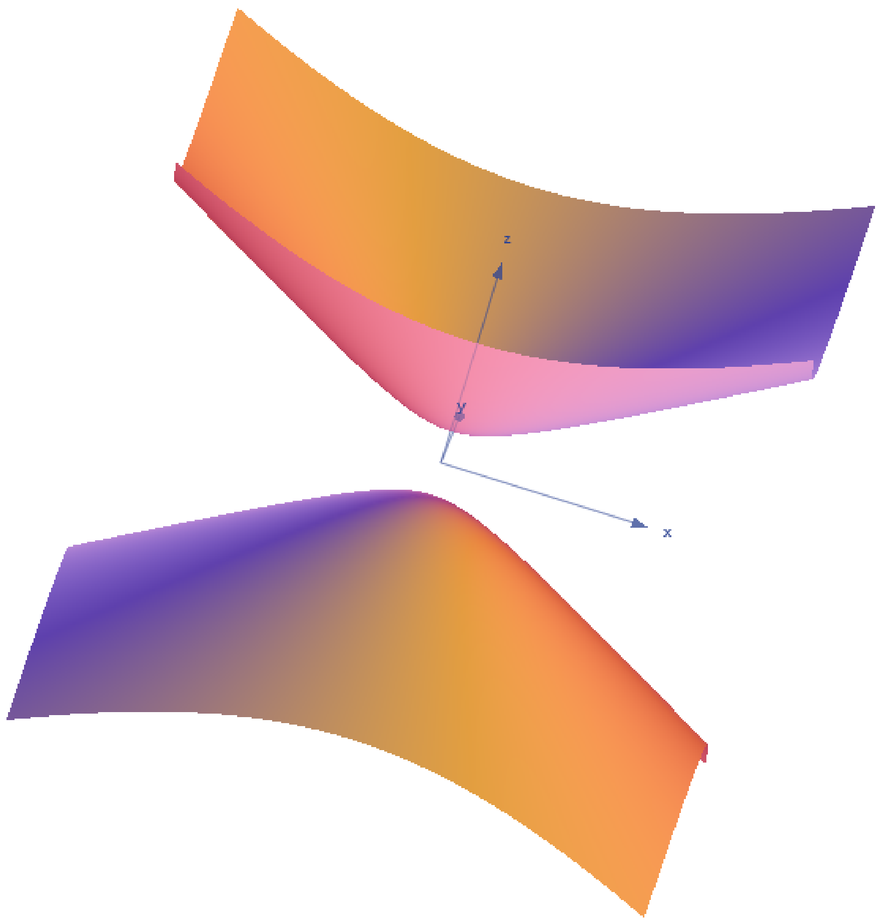
Slično kao i kod elipsoida, kada je $a = b$ radi se o **rotacionom jednokrilnom hiperboloidu**.

VI **Dvokrilni hiperboloid**

Dvokrilni hiperboloid ima jednadžbu

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a, b, c > 0$$

Tipični presjeci dvokrilnog hiperboloida i ravnina paralelnih s ravninom xy su elipse, s time da postoje ravnine paralelne s xy takve da je presjek sa dvokrilnim hiperboloidom jednak praznom skupu.
Presjeci jednokrilnog hiperboloida i ravnina paralelnih s ravninama xz odnosno yz su hiperbole.



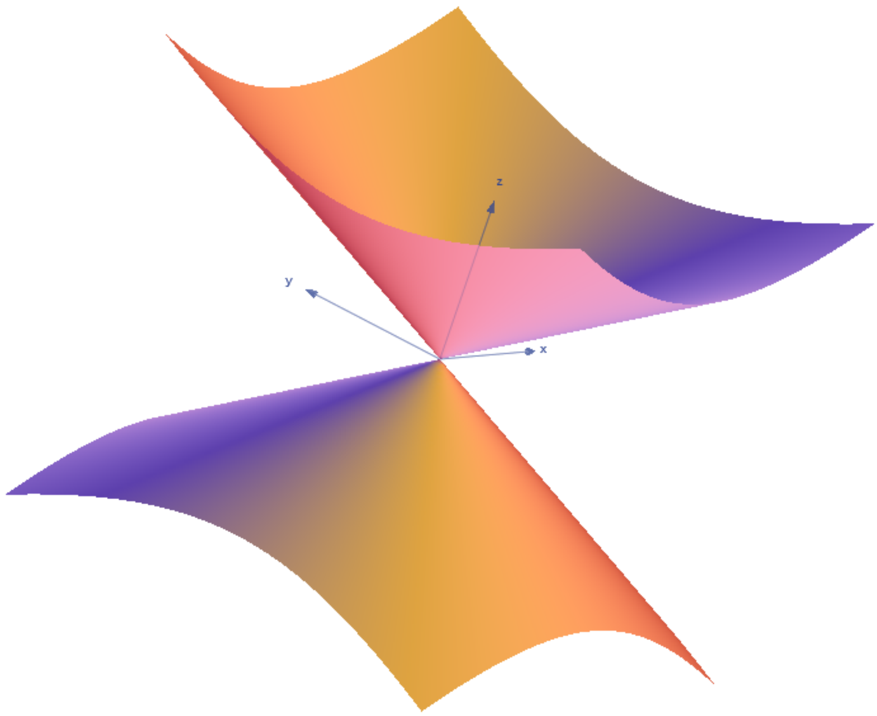
dvokrilni hiperboloid

VII **Eliptički stožac**

ili eliptički konus je skup rješenja jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Tipični presjeci eliptičkog stošca s ravninama paralelnim s xy su elipse. Ukoliko je $a = b$, radi se o kružnicama pa dobivamo **rotacioni (uspravni) stožac**.
Tipični presjeci s ravninama paralelnim s ravninama xz, odnosno yz, su hiperbole.



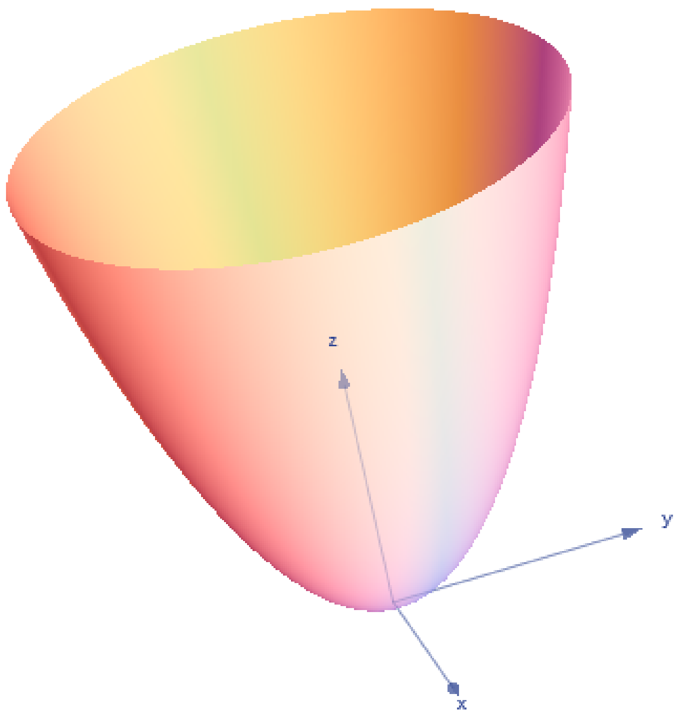
eliptički stožac

VIII **Eliptički paraboloid**

Eliptički paraboloid ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \qquad a, b, p \neq 0$$

Tipični presjeci elitičkog paraboloida s ravninama paralelnim s xz, odnosno yz, su parabole, a presjeci s ravninama paralelnim s xy su elipse.



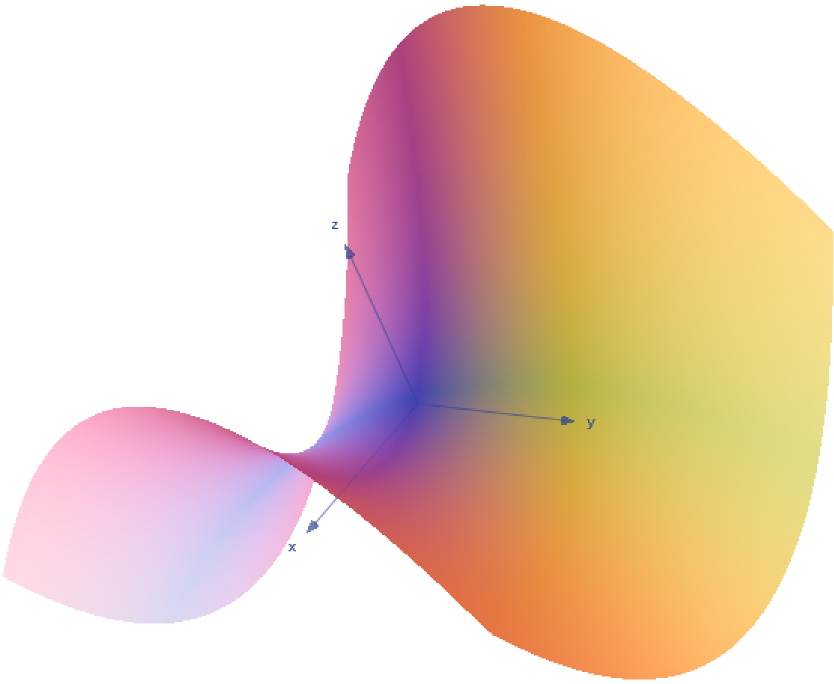
eliptički paraboloid

IX **Hiperbolički paraboloid**

Hiperbolički paraboloid ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \qquad a, b, p \neq 0$$

Ponekad se radi oblika naziva i **sedlasta ploha**. Tipični presjeci hiperboličkog paraboloida i ravnina paralelnih s xy su hiperbole, dok su presjeci s ravninama paralelnim s xz i yz parabole.



hiperbolički paraboloid

Sada ćemo navesti bez dokaza teorem koji govori o mogućnostima oblika skupa nultočaka.

Teorem 4.4.1. *Skup S svih nultočaka polinoma drugog stupnja u tri varijable je jedan od ovih skupova:*

A *prazan skup, skup od jedne točke, pravac, ravnina, unija dvaju (paralelnih ili ne) ravnina;*

B *eliptički cilindar, hiperbolički cilindar, parabolički cilindar, elipsoid, jednokrilni hiperboloid, dvokrilni hiperboloid, eliptički stožac, eliptički paraboloid, hiperbolički paraboloid;*

Dokaz navedenog teorema je većinom mehanički i svodi se na rastavljanje na slučajeve. Možete ga pronaći u [7].

Skupovi navedeni pod B nazivaju se **plohe drugog reda**, a skupove navedene pod A se ponekad naziva **degeneriranim plohama drugog reda**.

Bibliografija

[1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb 1992.

[2] N. V. Efimov, *Higher geometry*, Mir publishers, 1980.

[3] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb 1979.

[4] B. Guljaš, *Matematička analiza 1& 2*, skripta

[5] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1981.

[6] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb 2008.

[7] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb 1975.

[8] D. Š. Samac, *Bilješke s predavanja prof. Borisa Muhe*, Zagreb 2019.