Elementarna matematika 2

Bilješke s predavanja prof. Borisa Muhe *

28. veljače 2019.

Sadržaj

1 Planimetrija - geometrija ravnine **2**

1.1 Aksiomi . . . 2
1.2 Osnovna svojstva izometrija . . . 5
1.3 Rotacija . . . 7
1.4 Kut . . . 7
1.5 Relacija uređaja među kutovima . . . 8
1.6 Konstrukcija mjerenja kuta . . . 9
1.7 Kružnica . . . 10

2 Klasična geometrija trokuta **15**

2.1 Četverokut . . . 15
2.2 Poligoni i površine . . . 17
2.3 Sličnost trokuta . . . 20

3 Klasična algebra vektora **23**

3.1 Uvod . . . 23
3.2 Zbroj vektora . . . 23
3.3 Duljina, smjer i orijentacija vektora . . . 24
3.4 Množenje vektora skalarom . . . 25
3.5 Skalarni produkt . . . 25
3.6 "Skok u 3-D" . . . 27
3.7 Vektorski produkt . . . 28
3.8 Mješoviti produkt . . . 30

4 Elementi analitičke geometrije u prostoru **32**

4.1 Uvod . . . 32
4.2 Razni oblici jednadžbe pravca . . . 33
4.3 Analitičko predočenje pravca . . . 35
4.4 Analitičko predočenje ploha . . . 39

*natipkao: Dominik Šime Samac

1 Planimetrija - geometrija ravnine

1.1 Aksiomi

Prvi sustav aksioma (grč. aksios: tvrdnja koja ne izaziva sumnje) s kojima se izgrađuje elementarna geometrija dao je starogrčki matematičar Euklid (3. st.p.n.e.) u djelu *Elementi*:

1. Svake dvije točke moraju biti spojene dužinom.
2. Konačne dužine mogu se proširiti do pravaca.
3. Kružnica je opisana centrom i radijusom.
4. Svi pravi kutovi jednaki su.
5. Ako dužina siječe dvije dužine tako da je suma unutarnjih kutova manja od dva prava kuta, tada se produžetci tih dužina moraju sijeći na toj strani.

Očito je kako su Euklidovi aksiomi nedorečeni, na primjer u 3. aksiomu nije jasna poveznica između "središta" i radijusa. Unatoč tome, kroz povijest je taj sustav aksioma bitno utjecao na razvoj geometrije i doveo do otkrića nekih drugih geometrija (npr. hiperbolička geometrija[1], eliptička geometrija[2]).
Aksiom 5. ekvivalentan je s tvrdnjom da uz dani pravac p i proizvoljnu točku $A \notin p$ postoji točno jedan pravac q takav da $A \in q$ i $p \parallel q$. U svojim razmatranjima, Euklid razlikuje aksiome (koji definiraju ono što danas nazivamo logikom) i postulate (koji se odnose na geometriju). Dodatno, Euklid uvodi i Aksiome jednakosti:

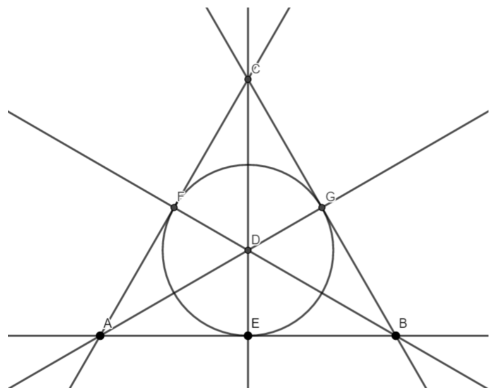
1. Objekti koji su jednaki istom objektu su i međusobno jednaki (tranzitivnost relacije jednako).
2. Ako jednakosti dodamo jednakost, sume su onda jednake.
3. Ako jednakosti oduzmemo jednakost, ostatci su jednaki.
4. Objekti koji se međusobno podudaraju su jednaki.
5. Cjelina je veća od dijela.

Euklidska ravnina (ili ravnina) je skup M (dalje u tekstu oznaka M uvijek će označavati ravninu) čije elemente nazivamo točkama, a neke istaknute podskupove pravcima. Isto kao i *skup*, pojmove *točka* i *pravac* ne definiramo. Oni su određeni aksiomima.

1. Aksiomi incidencije (pripadanja):
   (a) Za svake dvije različite točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac kojem one pripadaju, u oznaci AB.
   (b) Na svakom pravcu leže barem tri različite točke.
   (c) Postoje tri točke koje ne leže na istom pravcu (nekolinearne točke).

[1] Gauss-Lobačevski-Bolyai
[2] Riemann

Primjer (konačne) geometrije koja zadovoljava aksiome incidencije je *Fanova ravnina*:



2. Aksiomi uređaja:

   (a) Na svakom pravcu dana su dva međusobno suprotna, linearna (totalna) uređaja ($\leq$ ili $\geq$)
   Ovaj aksiom omogućava karakterizaciju *ležati između*, temeljni pojam u Hilbertovoj aksiomatici elementarne geometrije.

   Definicija 1 ***Dužina*** $\overline{AB}$ *je skup* $\{T \in M : A \leq T \leq B\}$.

   Definicija 2 ***Polupravac*** *s početnom točkom* $A \in M$ *i koji prolazi kroz točku* $B \in M$ *je skup* $\{T \in M : (A \leq T \leq B) \vee (A \leq B \leq T)\}$.

   Definicija 3 *Skup* $K \subseteq M$ *je* **konveksan** *ako vrijedi* $(\forall A, B \in K) \Longrightarrow (\overline{AB} \subseteq K)$.

   Primjeri konveksnih skupova su dužina, polupravac, pravac.

   Napomena 4 *Neka je* $\{A_i : i \in I\}$ *familija konveksnih skupova gdje je* I *neki indeksni skup; tada je i* $\bigcap_{i\in I} A_i$ *konveksan skup. Dokaz je jednostavan. Naime, ako uzmemo dvije proizvoljne točke* $C, D \in \bigcap_{i\in I} A_i$ *treba pokazati kako je i dužina* $\overline{CD}$ *u presjeku. Kako su* $C, D \in A_i, \forall i$, *a* A_i *je konveksan za* $\forall i$ *to je i* $\overline{CD} \in A_i, \forall i$ *pa slijedi kako je* $\overline{CD}$ *u presjeku.*

   Definicija 5 *Neka je* $S \subseteq M$. *Tada je* $convS$ *najmanji konveksni skup koji sadrži skup* S.

   Neka su $A, B \in M$, tada je $conv\{A, B\} = \overline{AB}$.

   Definicija 6 ***Trokut*** $\triangle ABC := conv\{A, B, C\}$ *gdje su* $A, B, C \in M$ *nekolinearne točke.*

   (b) (*Paschov aksiom*) Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici, onda siječe još bar jednu stranicu toga trokuta.

3. Aksiomi metrike:
   Zadano je preslikavanje $d : M \times M \to \mathbb{R}$.

   (a) $d(A, B) \geq 0$ i $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$, za $\forall A, B \in M$

(b) $d(A,B) = d(B,A)$, za $\forall A, B \in M$

(c) (*nejednakost trokuta*) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$, za $\forall A, B, C \in M$

(d) Za svaki polupravac s vrhom u $V \in M$ i svaki realni broj $x \geq 0$ postoji jedinstvena točka $T \in M$ na tom polupravcu takva da je $d(V,T) = x$.

Definicija 7 *Funkcija $d : M \times M \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava aksiome metrike (a), (b) i (c) naziva se* ***metrika****, a uređeni par (M, d) naziva se* ***metrički prostor****.*

$d(A,B)$ ćemo označavati s $|AB|$. Ukoliko svojstvo 4.(a) zamijenimo s nešto slabijim zahtjevom, $d(A,B) \geq 0$ i $A = B \Rightarrow d(A,B) = 0$, za $\forall A,\ B \in M$ tada se funkcija d naziva kvazimetrika.

Primjer 8 *Preslikavanje $d : A \times A \to \mathbb{R}$ koje je za $\forall x, y \in A$ definirano*

$$d(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

je metrika i naziva se diskretna metrika, a (A, d) je diskretni metrički prostor.

Definicija 9 *Preslikavanje $f : M \to M$ je izometrija ravnine ako vrijedi*

$$d(A,B) = d(f(A), f(B)),\ \forall A, B \in M$$

4. Aksiomi simetrije:

(a) Za svaki pravac $p \subset M$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$ različita od identitete, za koju vrijedi $s_p(T) = T$, $\forall T \in p$. Ta izometrija naziva se **osna simetrija** s obzirom na pravac p, a pravac p nazivamo **os simetrije**.

(b) Za svaka dva polupravca $A_1,\ A_2 \subset M$ s vrhom $A \in M$, postoji barem jedan pravac $p \subset M$ takav da $s_p(A_1) = A_2$.

Propozicija 10 *Pravac $p \subset M$ koji ne prolazi niti jednim vrhom $\triangle ABC$ ne siječe sve tri stranice trokuta.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji pravac $p \subset M$ takav da $p \cap \overline{AB} = \{R\}$, $p \cap \overline{AC} = \{Q\}$, $p \cap \overline{BC} = \{P\}$. Tada su P, Q i R različite točke te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $P \leq Q \leq R$. Promotrimo $\triangle AQR$. Tada pravac BC siječe dužinu $\overline{QR}$ u P, ali ne siječe dužine $\overline{AQ}$ i $\overline{AR}$ $\quad \Rightarrow\Leftarrow$

$\square$

Definicija 11 *Neka je $p \subset M$ pravac. Definirajmo binarnu relaciju Ω na $M \setminus p$ na sljedeći način: $A \Omega B \Longleftrightarrow \overline{AB} \cap p = \emptyset$*

Propozicija 12 *Relacija Ω je relacija ekvivalencije koja $M \setminus p$ rastavlja na dvije klase ekvivalencije koje nazivamo* ***poluravnine*** *definirane s p.*

Dokaz: Refleksivnost i simetričnost su očiti. Tranzitivnost: $(\forall A, B, C \in M \setminus p)\, (\overline{AB} \cap p = \emptyset \wedge \overline{BC} \cap p = \emptyset) \Rightarrow (\overline{AC} \cap p = \emptyset)$. Obrat po kontrapoziciji je $(\exists A, B, C \in M \setminus p)\, ((\overline{AC} \cap p \neq \emptyset) \Rightarrow (\overline{BC} \cap p \neq \emptyset) \vee (\overline{AB} \cap p \neq \emptyset))$ Sada po Paschovom aksiomu tvrdnja slijedi.

□

Propozicija 13 *Za svaki orijentirani pravac p i svaku točku $A \in p$ postoji jedinstvena rastuća bijekcija $f : p \to \mathbb{R}$ t.d. $f(A) = 0$ i $|f(B) - f(A)| = |AB|$, za $\forall A, B \in p$.*

Korolar 14 *Za svake dvije točke $A, B \in M$, $A \neq B$, $\exists! C \in \overline{AB}$ t.d. $d(A, C) = d(C, B)$. (C je* ***polovište*** *od $\overline{AB}$)*

Propozicija 15 *Svaka osna simetrija je involucija, tj. $s_p \circ s_p = id$. Nadalje, s_p nema drugih fiksnih točaka* [3] *osim na p, a poluravninu određenu sa p preslika u drugu poluravninu određenu s p. Posebno, s_p je bijekcija i $s_p = s_p^{-1}$.*

S id ćemo označavati identitetu, tj. id je funkcija za koju vrijedi $id : A \to A$, $id(x) = x$, $\forall x \in A$.

Propozicija 16 *Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Tada postoji jedinstveni pravac $p \subset M$ t.d. $s_p(A) = B$.*

Dokaz: *Egzistencija: Neka je S polovište $\overline{AB}$, a A_1 i B_1 polupravci u M s zajedničkim vrhom S i koji sadrže redom A i B. Iz aksioma 5.(b) slijedi kako postoji barem jedan pravac $p \subset M$ t.d. $s_p(A_1) = B_1$.*

$$|AS| = |BS| \Rightarrow |s_p(A)S| = |s_p(B)S| \Rightarrow s_p(A) = B$$

Jedinstvenost: Neka su p i q pravci za koje $s_p(A) = B = s_q(A)$. $(s_p \circ s_q)(A) = A$ i $(s_p \circ s_q)(B) = B$ iz čega slijedi kako je svaka točka iz AB fiksna točka za $s_p \circ s_q$ zbog prethodne propozicije. No, $s_{AB} \neq s_p \circ s_q$ jer s_{AB} "čuva" poluravninu zadanu s AB. Pa slijedi kako je $s_p \circ s_q = id \Rightarrow p = q$.

□

Korolar 17 *Neka su A_1 i A_2 dva polupravca s zajedničkom početnom točkom A. Tada postoji jedinstveni pravac p t.d. $s_p(A_1) = A_2$. Taj pravac prolazi točkom A i zove se* ***simetrala*** *polupravaca A_1 i A_2.*

Dokaz: *slijedi iz aksioma 5.(b) i prethodne propozicije.*

1.2 Osnovna svojstva izometrija

Definicija 18 *Fiksna točka preslikavanja $f : M \to M$ je točka $T \in M$ za koju vrijedi $f(T) = T$.*

Napomena 19 *Osna simetrija $s_p : M \to M$ je izometrija kojoj su sve točke pravca p fiksne točke.*

Primjer 20 *Ukoliko je preslikavanje $f : M \to M$ identiteta, tada su sve točke iz M fiksne točke.*

Teorem 21 *Svaka izometrija ravnine preslikava pravac na pravac.*

Dokaz: *Bijektivnost ćemo dokazati kasnije u Korolaru 29. Neka je $f : M \to M$ izometrija i $A, B, C \in M$ proizvoljne kolinearne točke ravnine M i neka bez smanjenja općenitosti vrijedi $A \leq C \leq B$. $|AB| = |AC| + |CB| \Rightarrow |f(A)f(B)| = |f(A)f(C)| + |f(C)f(B)| \Rightarrow f(C)$ leži na pravcu $f(A)f(B)$ jer vrijedi $f(A) \leq f(C) \leq f(B)$. Izometrija čuva kolinearnosti i ležati između.*

[3] vidi Def. 18

$\square$

Propozicija 22 *Neka je $f : M \to M$ izometrija. Tada vrijedi:*

1. *Slika dužine $\overline{AB}$ je $\overline{f(A)f(B)}$.*
2. *Slika polupravca s početkom u točki A je polupravac s početkom u točki $f(A)$.*
3. *Slika poluravnine omeđene pravcem p je poluravnina omeđena pravcem $f(p)$.*

Propozicija 23 *Neka je $f : M \to M$ izometrija ravnine.*

1. *Ako su A i B fiksne točke od f, onda je svaka točka na pravcu AB fiksna točka od f.*
2. *Ako je $f(A) = B$ i $f(B) = A$ tada je polovište dužine $\overline{AB}$ fiksna točka od f.*
3. *Ako su $A, B, C \in M$ tri nekolinearne fiksne točke od f onda je $f = id$.*
4. *$s_p = s_q \Rightarrow p = q$.*

Teorem 24 *Neka su $A, B \in M, A \neq B$. Skup svih fiksnih točaka koje su jednako udaljene od A i B je os jedinstvene osne simetrije f za koju vrijedi $(f(A) = B) \wedge (f(B) = A)$. Taj pravac naziva se* ***simetrala*** *dužine $\overline{AB}$.*

Dokaz: *Neka je p pravac takav da $s_p(A) = B$. Za $T \in p \Rightarrow d(A,T) = d(s_p(A), s_p(T)) = d(B,T)$. Obratno, neka je $T \in M$ t.d. $d(A,T) = d(B,T)$. Neka je q simetrala polupravaca iz T kroz A i B. Tada slijedi $s_q(A) = B \Rightarrow q = p$.*

$\square$

Definicija 25 *Kažemo da je pravac q okomit (ortogonalan) na pravac p ako je $p \neq q$ i $s_q(p) = p$. Pišemo $p \perp q$.*

Teorem 26 *Neka su $p, q \subset M$. Ako je $q \perp p$ tada je i $p \perp q$. Posebno, q i p se sijeku.*

Dokaz: *Neka je $A \in p$, $A \notin q$ i $s_q(p) = p$. Tada je $B = s_q(A) \neq A$ za $B \in p$. Neka je S polovište dužine $\overline{AB} \Rightarrow S \in p \cap q \Rightarrow s_q(S) = S$. Sada je $s_p(q)$ simetrala $\overline{s_p(A)s_p(B)} = \overline{BA} = \overline{AB} \Rightarrow s_p(q) = q \Rightarrow p \perp q$.*

$\square$

Korolar 27 *Kroz svaku točku A prolazi jedan i samo jedan pravac okomit na pravac p.*

Propozicija 28 *Neka su $A \neq B$ fiksne točke izometrije $f : M \to M$, $p = AB$. Tada je $f = id$ ili $f = s_p$.*

Teorem 29 *(Osnovni teorem o izometrijama) Svaka izometrija $f : M \to M$ je kompozicija najviše tri osne simetrije.*

Dokaz: *razlikujemo dva slučaja.*

1. *Ako* $f = id$, *tada je* $f = s_p \circ s_p$ *za svaku osnu simetriju* s_p.

2. *Ako* $f \neq id$ *tada* $\exists A \in M$ *t.d.* $A' = f(A) \neq A$. *Neka je* a *simetrala dužine* $\overline{AA'}$. *Definirajmo* $g := s_a \circ f$. *Sada ponovno razlikujemo dva slučaja:*

   (a) $g = id$, *tada je* $s_a \circ f = id \Rightarrow f = s_a$.

   (b) $g \neq id$, *tada* $\exists B \in M$ *t.d.* $B' = g(B) \neq B, (A \neq B)$. *Neka je* b *simetrala dužine* $\overline{BB'}$ *i* $h := s_b \circ g$. $|AB| = |g(A)g(B)| = |AB'| \Rightarrow A \in b \Rightarrow h(A) = s_b(g(A)) \Rightarrow h(A) = s_b(A) = A$. $h(B) = s_b(g(B)) = s_b(B') = B'$. *Iz prethodne propozicije imamo dvije mogućnosti:*

      i. $h = id$, *tada je* $h = s_b \circ g = s_b \circ s_a \circ f = id \Rightarrow f = s_a \circ s_b$.

      ii. $h = s_{AB}$, *tada je* $s_{AB} = s_b \circ s_a \circ f \Rightarrow f = s_a \circ s_b \circ s_{AB}$.

$\square$

Korolar 30 1. *Svaka izometrija je bijekcija.*

2. *Ako je* $f : M \to M$ *izometrija, tada je i* $f^{-1} : M \to M$ *izometrija.*

3. *Ako su* $f, g : M \to M$ *izometrije t.d. se podudaraju u tri nekolinearne točke tada je* $f = g$.

Napomena 31 *Ako s* $ISO(M)$ *označimo skup svih izometrija ravnine* M *onda je* $ISO(M)$ *nekomutativna grupa s obzirom na operaciju komponiranja izometrija.*

1.3 Rotacija

Definicija 32 *Rotacija s obzirom na točku* $A \in M$ *je izometrija kojoj je jedina fiksna točka točka* A.

Teorem 33 1. *Ako su* $p, q \subset M$ *dva pravca t.d. je* $p \cap q = \{B\}$, *tada je* $s_p \circ s_q$ *rotacija oko točke* B.

2. *Neka je* $r : M \to M$ *rotacija s centrom* $C \in M$ *i pravac* $p \subset M$ *t.d.* $C \in p$. *Tada postoje pravci* $m, n \subset M$ *t.d.* $m \cap n = \{C\}$ *i za koje vrijedi* $s_m \circ s_p = r = s_m \circ s_n$.

Korolar 34 *Skup svih rotacija u ravnini oko točke* A *čini grupu.*

Definicija 35 *Neka je* $A \in M$. *Tada* $s^A : M \to M$ *zovemo centralna izometrija ako je izometrija i za svaku točku* $T \in M$ *vrijedi kako je* A *polovište dužine* $\overline{Ts^A(T)}$.

Teorem 36 *Centralna simetrija* $s^A : M \to M$ *s centrom u* A *je kompozicija bilo koje dvije osne simetrije* $s_p, s_q : M \to M$ *gdje su* p *i* q *okomiti pravci u* M *i koji prolaze kroz točku* A. *Nadalje vrijedi* $s_p \circ s_q = s_q \circ s_p$.

1.4 Kut

Pojam "kut" nije lagano definirati, često se pod "kutom" podrazumijevaju različite stvari kao npr. dio ravnine određen s dva polupravca koji imaju zajednički vrh ili možda kao unija dva polupravca koji imaju zajednički vrh ili pak kao neka mjera kuta itd.

Definicija 37 *Neka su Ox, Oy dva polupravca s zajedničkim vrhom. Neka su A_x i A_y dva pravca koji sadrže redom Ox i Oy. Neka su p_x i p_y poluravnine određene s A_x i A_y na način da $Oy \subset p_x$ i $Ox \subset p_y$.* ***Otvoreni kutni isječak*** *definiramo kao presjek $p_x \cap p_y$.* ***Zatvoreni kutni isječak*** *definiramo kao $(p_x \cap p_y) \cup Ox \cup Oy$.*

Definicija 38 *Uređeni parovi polupravaca (Ox, Oy) i (Ox', Oy') (t.d. svaki par polupravaca ima zajednički vrh) su* ***kongruentni*** *ako postoji izometrija $f : M \to M$ t.d. $f(Ox) = Ox'$ i $f(Oy) = Oy'$.*

Napomena 39 *Kongruencija je relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije nazivamo* ***neorijentirani kutovi*** *u oznaci $\angle xOy$. Ako se polupravci Ox i Oy podudaraju, odnosno ako su komplementarni, pripadne klase nazivamo* ***nul-kut****, odnosno* ***ispruženi kut****.*

Propozicija 40 *Neka je Ox polupravac, a P zatvorena poluravnina omeđena s $p \supset Ox$. Za svaki neorijentirani kut α postoji jedinstveni reprezentant oblika (Ox, Oy), gdje je $Oy \subset P$.*

1.5 Relacija uređaja među kutovima

Fiksirajmo polupravac Ox i zatvorimo poluravninom P određenom s pravcem koji sadrži Ox.

Propozicija 41 *Za svaki neorijentirani kut α postoji jedinstveni polupravac $Oy \subset P$ t.d. je $\angle xOy$ kongruentan s α, odnosno preslikavanje $Oy \longmapsto \angle xOy$ je bijekcija između skupa polupravaca iz P s vrhom u O i skupa svih neorijentiranih kutova.*

$\alpha = \angle xOy \longmapsto S_\alpha$ je pripadni zatvoreni kutni isječak (za ispruženi kut $S_\alpha = P$, za nul-kut $S_\alpha = Ox$).

Definicija 42 *Neka je $\mathbb{K}$ skup svih neorijentiranih kutova. Definirajmo uređaj na $\mathbb{K}$ na idući način:*

$$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow S_\alpha \subseteq S_\beta$$

gdje su S_α i S_β zatvoreni kutni isječci koji odgovaraju redom kutovima α i β.

Propozicija 43 *Relacija $\leq$ ne ovisi o izboru reprezentanta i ona je relacija totalnog uređaja na skupu $\mathbb{K}$.*

Teorem 44 *Relacija $\leq$ na $\mathbb{K}$ relacija je linearnog uređaja i svaki podskup od $\mathbb{K}$ ima infimum i supremum.*

Pod oznakom $S(Ox, Oy)$ podrazumijevamo zatvoreni kutni isječak određen s polupravcima Ox i Oy.

Definicija 45 *Definiramo zbroj kutova α i β, u oznaci $\gamma := \alpha + \beta$, ako postoje polupravci Ox, Oy, Oz takvi da $\alpha = \angle xOy$, $\beta = \angle yOz$, $\gamma = \angle xOz$ i takvi da je $S(Ox, Oz) = S(Ox, Oy) \cup S(Oy, Oz)$. Ukoliko je Oz komplementaran s Ox tada kažemo da je β suplement od α i $\alpha + \beta$ je ispruženi kut.*

Iz definicije slijedi kako je $\gamma = \alpha + \beta$ ekvivalentno i s $\alpha = \gamma - \beta$ i $\beta = \gamma - \alpha$.
Također, očito slijedi i kako zbroj $\alpha + \beta$ nije uvijek definiran, npr. ako je kut α u P poluravnini, a β samo dijelom u poluravnini P. Iz svega navedenog slijedi kako je zbrajanje kutova komutativno i asocijativno te vrijedi $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$.

1.6 Konstrukcija mjerenja kuta

Definicija 46 ***Mjera neorijentiranih kutova*** *je svaka strogo rastuća funkcija* $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *takva da je* $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *za koje je definiran zbroj kutova.*

Označimo s ω ispruženi kut.

Definicija 47 ***Unutarnja simetrala kuta*** $\angle xOy$ *je pravac* p *takav da je* $s_p(Ox) = Oy$.

Simetrala kuta α određuje kut $\frac{\alpha}{2}$. Induktivno se dobije kut $\alpha_N := 2^{-N}\alpha$ za svaki $N \in \mathbb{N}$.

Definicija 48 ***Pravi kut*** γ *jedinstveno je određeni kut sa svojstvom* $\gamma + \gamma = \omega$ *tj.* $\gamma = 2^{-1}\omega$.

Propozicija 49 *Za svaki neorijentirani kut* α *postoji* $n \in \mathbb{N}$ *t.d. vrijedi*

$$2^{-n}\omega \leq \alpha$$

Teorem 50 *Za svaki* $s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *postoji jedinstvena mjera* $f : \mathbb{K} :\to [0, s]$ *t.d.* $f(\omega) = s$ *i* f *je bijekcija.*

Ovime smo mjeru kuta definirali na prirodan način. Ako je $s = 180$ onda kažemo kako je mjera kuta izražena u stupnjevima, ako je $s = 200$ onda je pripadna mjera u gradima, a ako $s = \pi$ onda je pripadna mjera izražena radijanima.
Uočimo kako simetrala dijeli kut na dva kuta jednake mjere tj. na dva jednaka kuta, dok zbog bijektivnosti iz prethodnog teorema vrijedi i obrat, tj. ako dva kuta imaju istu mjeru, oni su onda i jednaki.

Definicija 51 *Kut s mjerom između 0 i* $\frac{\pi}{2}$ *zovemo* ***šiljasti****, a inače* ***tupi****. Također definiramo i* ***izbočene kutove****, za* $\alpha = \angle yOx$ *pripadni izbočeni kut je* $(M \setminus S_\alpha) \cup (Ox) \cup (Oy)$*. Mjera izbočenog kuta je* $360 - \alpha$ *u stupnjevima, tj.* $2\pi - \alpha$ *u radijanima.*

Napomena 52 $\triangle ABC$ *ima unutarnje kutove* $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ *i* $\gamma = \angle ACB$.

Definicija 53 *Vanjski kut pri vrhu* A *je kut između polupravaca* AB *i* p *gdje je* p *polupravac komplementaran polupravcu* AC.

Uočimo da je vanjski kut trokuta pri bilo kojem vrhu uvijek strogo manji od ispruženog kuta. Također, vanjski kut jednak je sumi preostala dva unutarnja kuta trokuta (suma svih kutova u trokutu je 180 stupnjeva što ćemo kasnije i dokazati).

Propozicija 54 *U* $\triangle ABC$ *vrijedi ekvivalencija* $|AB| = |AC| \iff \gamma = \beta$.

Dokaz: $d(A, B) = d(A, C) \Rightarrow A$ *je na simetrali dužine* $\overline{BC}$ *tj. postoji izometrija* $s_p(A) = A$, $s_p(B) = C$ *i* $s_p(C) = B \Rightarrow s_p(\angle ABC) = \angle ACB \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$.
Obrnuto, neka je $\angle ABC = \angle ACB$*. Neka je* p *simetrala dužine* $\overline{BC}$*. Neka je* $A' = s_p(A)$*. Vrijedi* $s_p(\angle ACB) = \angle A'BC \Rightarrow \angle A'BC = \angle ACB = \angle ABC$ *iz pretpostavke. Točke* A *i* A' *su s iste strane pravca* BC *(vrijedi dokaz propozicije o jedinstvenosti simetrale dužine), kutovi* $\angle A'BC$ *i* $\angle ABC$ *imaju zajednički krak,* $\angle A'BC = \angle ABC \Rightarrow$ *točka* A' *leži na* $\overline{BA} \Rightarrow$ *polupravci* BA *i* BA' *se podudaraju. Analogno se pokaže da se polupravci* CA *i* CA' *podudaraju.* $(CA \cap BA = A) \wedge (CA' \cap BA') \Rightarrow A = A')$.

$\square$

Propozicija 55 *1. U svakom trokutu nasuprot veće stranice nalazi se veći kut i obrnuto, tj.* $(\alpha \geq \beta) \Longleftrightarrow (|BC| \geq |AC|$.

2. *Vrijedi nejednakost trokuta, tj. u svakom trokutu je zbroj duljina bilo koje dvije stranice veći od duljine treće stranice.*

3. *Vanjski kut je veći od bilo kojeg nasuprotnog unutarnjeg kuta.*

1.7 Kružnica

Definicija 56 *Za točku* $S \in M$ *i realni broj* $r > 0$ *skup* $K(S,r) := \{T \in M : d(S,T) = r\}$ *nazivamo* ***kružnica*** *sa središtem u* S *i polumjerom* r*.* ***Tetiva*** *je dužina koja spaja dvije različite točke kružnice. Tetiva koja prolazi središtem kružnice naziva se dijametar ili* ***promjer****.*

Definicija 57 *Neka je* $S \in M$ *i* $r \in \langle 0, +\infty \rangle$ *te* $K(S,r)$ *kružnica i neka su* $A, B \in K(S,r)$*. Ako* $S \notin \overline{AB}$ *tada* $\angle ASB$ *nazivamo središnji kut nad* $\overline{AB}$*. Presjek središnjeg kuta nad* $\overline{AB}$ *i kružnice* $K(S,r)$ *nazivamo* ***luk*** *nad* $\overline{AB}$ *i označavamo s* $\widehat{AB}$*. Ako je* $T \in K(S,r) \setminus \widehat{AB}$ *tada* $\angle ATB$ *nazivamo* ***obodni kut*** *nad* $\overline{AB}$*.*

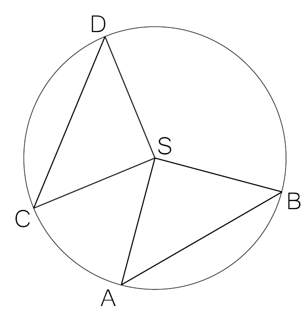
Definicija 58 *Za točku* $S \in M$ *i realni broj* $r > 0$ *skup* $\overline{K}(S,r) := \{T \in M : d(S,T) \leq r\}$ *nazivamo* ***krug*** *sa središtem u* S *i polumjerom* r*.*

Teorem 59 *Neka je* $K(S,r)$ *kružnica. Tada vrijedi*

1. *središnji kutovi nad tetivama istih duljina jednaki su.*

2. *svi obodni kutovi nad tetivom jednaki su i iznose polovinu središnjeg kuta nad istom tetivom.*

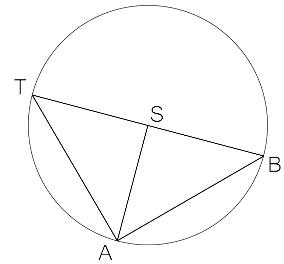
Dokaz:



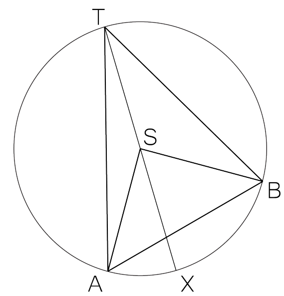
1. *Neka su* $A, B, C, D \in K(S,r)$ *t.d. je* $|AB| = |CD|$*. Tada vrijedi* $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ *po* $S-S-S$ *jer su im sve tri stranice istih duljina (dvije stranice duljine su* r*, a treća je po pretpostavci jednake duljine). Sada slijedi* $\angle ASB = \angle CSD$*.*

2. *Neka je* $\overline{AB}$ *tetiva i* $\angle ATB$ *obodni kut nad tetivom* $\overline{AB}$ *za neku točku* $T \in K(S,r)$*. Sada imamo tri slučaja:*

(a) $S \in \overline{BT}$, tada je $\triangle AST$ jednakokračan $\Rightarrow$ $\angle ATS = \angle TAS$ pa je $\angle ASB$ vanjski kut $\triangle ATS \Rightarrow \angle ASB = \angle TAS + \angle ATS = 2\angle ATS = 2\angle ATB$.



(b) $S \in \angle ATB$, definirajmo X kao presjek kružnice i pravca TS. Promotrimo obodni kut $\angle ATX$ nad tetivom $\overline{AX}$, sada je $S \in \overline{TX}$. Prema (a) slučaju imamo $\angle ATX = \frac{1}{2}\angle ASX$. Analognim razmatranjem dobivamo $\angle BTX = \frac{1}{2}\angle BSX$. Sada imamo:

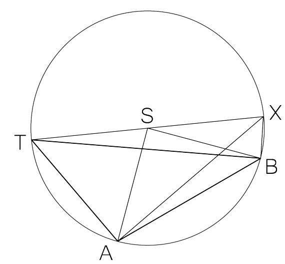


$$\angle ATB = \angle ATX + \angle BTX = \frac{1}{2}\angle ASX + \frac{1}{2}\angle BSX = \frac{1}{2}\angle ASB$$

(c) $S \notin \angle ATB$, neka je opet X presjek kružnice i pravca TS. Gledamo tetive $\overline{AX}$ i $\overline{BX}$. Prema (a) dijelu imamo:

$$\angle ATX = \frac{1}{2}\angle ASX$$

$$\angle BTX = \frac{1}{2}\angle BSX$$



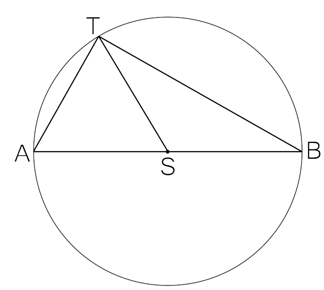
$$\Rightarrow \angle ATB = \angle ATX - \angle BTX = \frac{1}{2}\angle ASX - \frac{1}{2}\angle BSX = \frac{1}{2}\angle ASB$$

$\square$

Teorem 60 *(Talesov poučak) Neka je $K(S,r)$ kružnica i $\overline{AB}$ promjer kružnice te $T \in K(S,r)$ proizvoljna točka t.d. $T \neq A$ i $T \neq B$. Tada vrijedi $\angle ATB = \frac{\pi}{2}$.*

Dokaz: očito vrijedi $\pi = \angle AST + \angle BST$. Sada kako je $\angle AST$ vanjski kut $\triangle BST$ imamo $\angle AST = \angle STB + \angle SBT$ i analognim razmatranjem imamo $\angle BST = \angle ATS + \angle TAS$. Jer su $\triangle AST$ i $\triangle TSB$ jednakokračni imamo:

$$\pi = 2\angle ATS + 2\angle STB = 2\angle ATB \Longrightarrow \angle ATB = \frac{\pi}{2}$$



$\square$

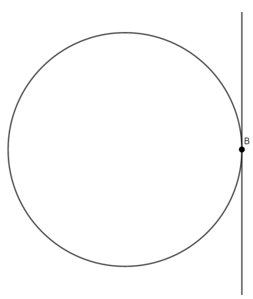
Teorem 61 *Neka je $\triangle ABC$ i neka su $A_1 \in \overline{BC}$, $B_1 \in \overline{AC}$ i $C_1 \in \overline{AB}$. Tada se dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ sijeku u jednoj točki ako i samo ako vrijedi*

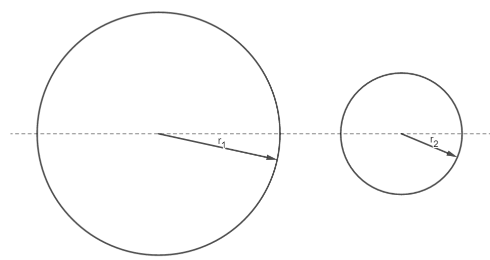
$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|} = \frac{|CA_1|}{|A_1B|} = \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1$$

Definicija 62 *Neka je $T \in M$ proizvoljna i p proizvoljni pravac. Udaljenost točke T od pravca p je $d(T,p) := min\{d(T,x) : x \in p\}$.*

Propozicija 63 *Neka je dan pravac p i kružnica $K(S,r)$. Ako je*

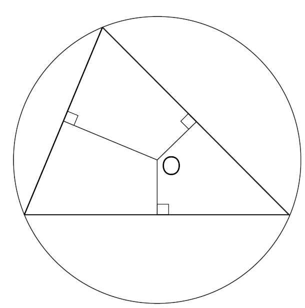
1. *$d(S,p) < r$, onda p siječe kružnicu $K(S,r)$ u točno dvije točke.*
2. *$d(S,p) = r$, onda p siječe kružnicu $K(S,r)$ u točno jednoj točki. Još kažemo da p dira kružnicu $K(S,r)$, a točku presjeka X nazivamo **dirałište**. Pravac okomit na p koji prolazi kroz X prolazi i kroz središte kružnice. Pravac p još zovemo i **tangenta** kružnice $K(S,r)$ u točki X.*
3. *$d(S,p) > r$, onda p ne siječe $K(S,r)$.*
4. *Kružnice $K(S_1,r_1)$ i $K(S_2,r_2)$ s različitim središtima sijeku se ako i samo ako $|r_1 - r_2| \leq d(S_1,S_2) \leq (r_1 + r_2)$. Ako vrijedi jedna od nejednakosti onda se sijeku u točno jednoj točki ("diraju se"), a ako su obje nejednakosti stroge, onda se sijeku u dvije točke.*





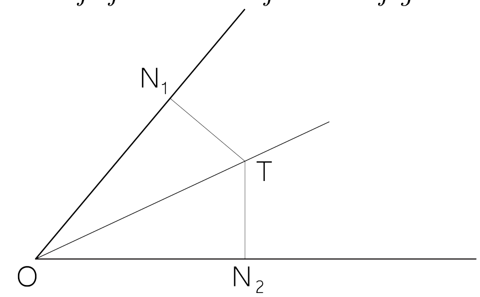
Teorem 64 *(O sjecištu simetrala) Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki i ta je točka središte tom trokutu opisane kružnice.*

<u>Dokaz:</u> Neka je a simetrala dužine $\overline{BC}$, b simetrala dužine $\overline{CA}$ i c simetrala dužine $\overline{AB}$. $S := a \cap b$. $(|SC| = |SA|) \wedge (|SC| = |SB|) \Rightarrow (|SA| = |SB|) \Rightarrow S \in c$. Kako je S jednako udaljena od svake stranice (jer je na simetralama stranica) slijedi kako je i središte opisane kružince tome trokutu.



□

Propozicija 65 *Točka je na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.*

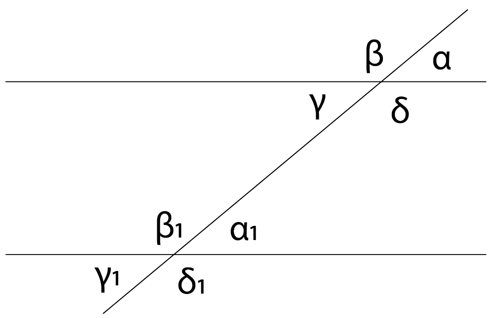


Dokaz: *T je točka na simetrali. Spustimo okomice N_1 i N_2 na krakove. $\triangle OTN_1 \cong \triangle OTN_2$ (K-S-K) $\Rightarrow |TN_1| = |TN_2|$. Obrnuto, neka je $|TN_1| = |TN_2| \Rightarrow \triangle OTN_1 \cong \triangle OTN_2$ (S-S-K) $\Rightarrow \angle TON_1 = \angle TON_2 \Rightarrow T$ je na simetrali.*

□

(Aksiom o paralelama) *Neka je $p \subset M$ pravac i $T \in M$ točka t.d. $T \notin p$. Tada postoji točno jedan pravac $q \subset M$ t.d. je $T \in q$ i $p \parallel q$.*

Definicija 66 *Neka su $p \neq q$ paralelni pravci. Svaki pravac t koji siječe p i q nazivamo transverzala od p i q.*

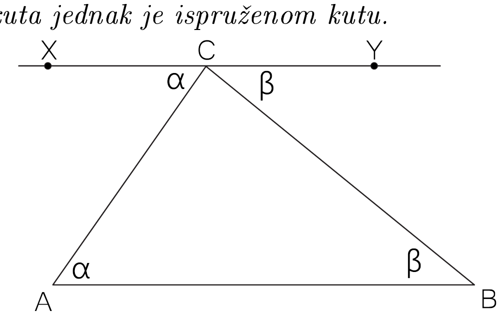


Propozicija 67 *Uz oznake kao na slici vrijedi $\alpha = \gamma = \alpha_1 = \gamma_1$ te $\beta = \delta = \beta_1 = \delta_1$. Vrijedi i obrat tj. ako je $\alpha = \alpha_1$ onda su p i q paralelni.*

Dokaz: *Dokažimo prvo $\alpha = \alpha_1 \Rightarrow p \parallel q$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $x = p \cap q$. Vanjski kut je uvijek veći od unutarnjeg. α je vanjski kut $\triangle AXB$ stoga je strogo veći od α_1. To je kontradikcija s $\alpha = \alpha_1$.*
Obrnuto, pretpostavimo suprotno, tj. $\alpha = \alpha_1$. Neka je q' pravac kroz B koji sa q zatvara kut α. No, tada je $q' \parallel p$ što je kontradikcija s aksiomom.

□

Propozicija 68 *Zbroj unutarnjih kutova svakog trokuta jednak je ispruženom kutu.*



Dokaz: *U proizvoljnom trokutu povucimo kroz točku C paralelu p sa stranicom $\overline{AB}$. Na pravcu p sa svake strane točke C označimo dvije proizvoljne točke X i Y. Tada je po prethodnoj propoziciji $\angle BAC = \angle ACX$ i $\angle ABC = \angle BCY$.*

□

Korolar 69 *Vanjski kut trokuta u nekom vrhu jednak je zbroju dva preostala unutarnja kuta.*

Dokaz: *Trivijalno slijedi iz prethodne propozicije.*

2 Klasična geometrija trokuta

Definicija 70 *Kažemo da su* $\triangle ABC$ *i* $\triangle A'B'C'$ *sukladni ako postoji bijekcija* $f : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$ *t.d.* $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $a = a'$, $b = b'$ *i* $c = c'$. *Tada pišemo* $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Primjetimo kako je $\cong$ relacija ekvivalencije.

Napomena 71 *Uočimo kako smo prethodnu definiciju mogli elegantnije zapisat: trokuti* $\triangle ABC$ *i* $\triangle A'B'C'$ *sukladni su ako postoji izometrija* $f : M \to M$ *t.d.* $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Pitanje: je li potrebno u prethodnoj napomeni pod uvjete izometrije navesti sve tri točke?

Teorem 72 *(O sukladnosti trokuta) Dva trokuta sukladna su ako se podudaraju*

1. *(S-S-S) u duljinama sve tri stranice.*
2. *(S-K-S) u duljinama 2 stranice i kuta između njih.*
3. *(K-S-K) u duljini jedne stranice i 2 kuta uz tu stranicu.*
4. *(S-S-K) u duljini dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.*

Dokaz:

1. *Neka je* f *izometrija t.d.* $f(A_1) = A_2$, $f(B_1) = B_2$ *i* $f(C_1) = D$. *Želimo pokazati* $D = C_2$. *Tada* f *preslikava poluravninu određenu s* A_2B_2.
   (a) *neka* D *i* C_2 *leže u istoj poluravnini s obzirom na* A_2B_2. *Pretpostavimo* $D \neq C_2$. *Neka je* O *polovište* $\overline{DC_2}$. *Pa imamo*
   $$|A_2D| = |A_1C_1| = |A_2C_2| \Longrightarrow A_2 \text{ je na simetrali } DC_2$$
   $$|B_2D| = |B_1C_1| = |B_2C_2| \Longrightarrow B_2 \text{ je na simetrali } DC_2$$
   Dakle, O, A_2 *i* B_2 *leže na istom pravcu pa* D *i* C_2 *moraju biti s različitih strana pravca* $A_2B_2 \Rightarrow\Leftarrow$

   (b) *neka su* D *i* C_2 *s različitih strana pravca* A_2B_2. *Definirajmo* $g := s_{A_2B_2} \circ f$ *pa zaključujemo da* g *zadovoljava uvjete prvog slučaja odakle slijedi tvrdnja.*

$\square$

2.1 Četverokut

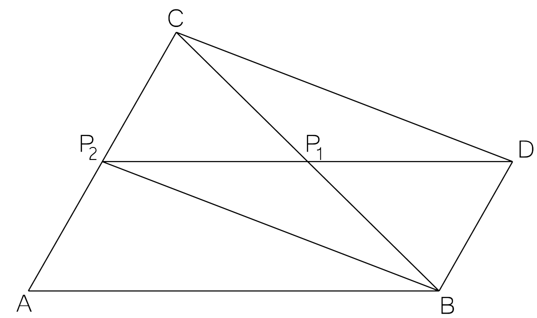
Primjer: kvadrat, pravokutnik, romb, trapez...

Teorem 73 *(O paralelogramu)*

1. *Suprotne stranice i suprotni kutovi paralelograma jednaki su.*
2. *Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.*
3. *Ako za četverokut* $ABCD$ *vrijedi* $|AD| = |BC|$ *i* $AD \parallel BC$, *onda je* $ABCD$ *paralelogram.*

Teorem 74 *(O srednjici trokuta) Srednjica trokuta paralelna je trećoj stranici i jednaka je polovici njezine duljine.*

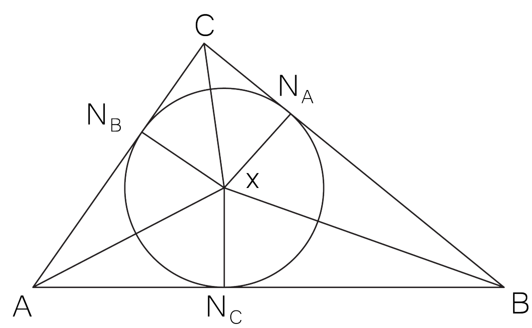
<u>Dokaz:</u> Neka je dan $\triangle ABC$. Neka su P_2 i P_1 redom polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Definirajmo točku $D \in M$ t.d. vrijedi $|P_1P_2| = |P_1D|$ tj. P_1 je polovište dužine $\overline{P_2D}$. P_2BDC je paralelogram jer mu se dijagonale raspolavljaju. Vrijedi $|BD| = |P_2C| = |AP_2|$ pa po prethodnom teoremu (3.) slijedi kako je i $ABDP_2$ paralelogram. Pa vrijedi $\overline{AB} \parallel \overline{P_2D}$ i $|AB| = 2|P_1P_2|$.



□

Teorem 75 *(O simetralama kutova) Sve tri simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo* ***središte upisane kružnice*** *trokuta te postoji kružnica sa središtem u toj točki koja dodiruje sve tri stranice trokuta.*

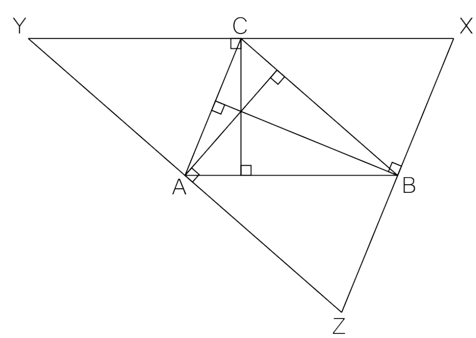
<u>Dokaz:</u> Neka je x sjecište simetrala a kuta $\angle BAC$ i b kuta $\angle ABC$. Neka su N_A, N_B i N_C nožišta okomica iz x na redom $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. $(x \in a \Rightarrow |xN_b| = |xN_c|) \wedge (x \in b \Rightarrow |xN_C| = |xN_A|) \Rightarrow |xN_A| = |xN_B|$ iz čega slijedi kako $x \in c$ tj. sve tri simetrale sijeku se u x. Uz $r := |xN_A|$ slijedi kako je udaljenost točke x od stranica trokuta upravo $r \Rightarrow K(x, r)$ dodiruje sve stranice trokuta.



□

Teorem 76 *(O visinama trokuta) Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koju zovemo* ***ortocentar*** *trokuta.*

<u>Dokaz:</u> Kroz A povucimo paralelan pravac s $\overline{BC}$, kroz B povucimo paralelan pravac s $\overline{AC}$ i kroz C povucimo paralelan pravac s $\overline{AB}$. Sjecišta tih pravaca označimo s X, Y i Z. Očito vrijedi $XY \parallel AB$, $XZ \parallel AC$ i $YZ \parallel BC$. $ABCY$ je paralelogram $\Rightarrow |CY| = |AB|$, $|AY| = |BC|$; $ABXC$ je paralelogram $\Rightarrow |BX| = |AC|$, $|XC| = |AB|$; $ACBZ$ je paralelogram $\Rightarrow |AZ| = |BC|$, $|BZ| = |AC|$



Slijedi kako je A polovište $\overline{YZ}$, B polovište $\overline{XZ}$ i C polovište $\overline{XY}$. $AB \parallel XY \Rightarrow$ visina iz C na AB je okomita na AB pa je okomita i na XY. Slijedi kako je visina iz C na AB simetrala stranica $\overline{XY}$ u $\triangle XYZ$. Visine u $\triangle ABC$ simetrale su stranica u $\triangle XYZ$, dakle sijeku se u jednoj točki.

□

2.2 Poligoni i površine

Definicija 77 *Poligonalna linija je unija* $\cup_{k=0}^{n-1}\overline{A_kA_{k+1}}$ *koja se ne "samopresijeca", tj.* $\overline{A_iA_{i+1}} \cap \overline{A_jA_{j+1}} = \emptyset$ *za* $\forall i, j \in \{0,\, 1, \ldots n-1\}$, $j \neq i-1,\, i,\, i+1$ *i* $\overline{A_iA_{i+1}} \cap \overline{A_{i+1}A_{i+2}} = A_{i+1}$, $\forall i \in \{0,\, 1, \ldots n-3\}$.
Zatvorena poligonalna linija je unija dužina $(\cup_{k=0}^{n-1}\overline{A_kA_{k+1}}) \cup \overline{A_0A_n}$ *koja se ne "samopresijeca", tj.* $\overline{A_iA_{i+1}} \cap \overline{A_jA_{j+1}} = \emptyset$ *za* $\forall i, j \in \{0,\, 1, \ldots n-1\}$, $j \neq i-1,\, i,\, i+1$ $(A_{n+1} \equiv A_0,\, A_{n+2} \equiv A_1)$ *i* $\overline{A_iA_{i+1}} \cap \overline{A_{i+1}A_{i+2}} = A_{i+1}$, $\forall i \in \{0,\, 1, \ldots n-3\}$.

Neka je L zadana zatvorena poligonalna linija. Kažemo da su dvije točke *u istom području* s obzirom na L ako postoji poligonalna linija koja ih spaja i koja ne siječe L.

Teorem 78 *(Jordan) Svaka zatvorena poligonalna linija* L *dijeli ravninu na točno dva područja. Jedno je neomeđeno i zovemo ga* ***vanjština*** *od* L*, a drugo je omeđeno i zovemo ga poligon ili* ***unutrašnjost*** *od* L*.*

U prethodnom teoremu preciznije je za vanjštinu reći kako je neomeđena nego beskonačna kako se negdje može pročitati. Naime, ukoliko neki skup nije konačan onda je beskonačan, a nisu svi beskonačni skupovi ujedno i neomeđeni.
Postavlja se pitanje kako mjeriti površinu poligona? Što je površina?

Definicija 79 *Neka su* p *i* q *okomiti pravci u ravnini* M*. Sa* $\mathbb{P}$ *označimo skup svih pravokutnika sa stranicama paralelnim* p *i* q*. Za pravokutnik* $A \in \mathbb{P}$ *sa stranicama* a *i* b *definiramo njegovu površinu s* $\mu(A) := a \cdot b$.

Definicija 80 *Skup* $S \subseteq M$ *je jednostavan ako za neki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $S = \cup_{i=1}^{n} P_i$ *gdje su* $P_i \in \mathbb{P}, \forall i$ *te su u parovima disjunktni, tj.* $P_i \cap P_j = \emptyset$, $\forall i,\, j,\, i \neq j$*. Definiramo površinu od* S *kao* $\mu(S) := \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)$.

Definicija 81 *Neka je* $A \subseteq M$ *proizvoljan. Definirajmo:*

$$\mu_+(A) := inf\{\mu(S) : S\ jednostavan, A \subseteq S\} \qquad \mu_-(A) := sup\{\mu(S) : S\ jednostavan, S \subseteq A\}$$

Ukoliko je $\mu_+(A) = \mu_-(A)$*, kažemo kako je skup* A *izmjeriv i definiramo njegovu površinu kao* $\mu(A) := \mu_+(A) = \mu_-(A)$.

Ukoliko postoji bijekcija između dva skupa, imaju li oni nužno i jednaku površinu? Odgovor je ne. Promotrimo funkciju $f : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ koja je definirana na sljedeći način, za $x = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots$ i $y = 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$

$$f(0.a_1a_2a_3a_4\ldots,\, 0.b_1b_2b_3b_4\ldots) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\ldots \qquad \forall x, y \in \langle 0,1\rangle$$

Lako se pokaže kako je funkcija f i bijekcija. Površina skupa $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ je 1, dok je površina dužine jednaka 0. [4]

Primjer 82 *Proizvoljna točka* $A \in M$ *ima površinu nula.*

[4] Uočimo kako ova funkcija pokazuje ekvipotentnost dužine i kvadrata, a sličnim razmatranjem pokazuje se i ekvipotentnost dužine i kocke. Dužina, kvadrat i kocka imaju jednak broj točaka.

Teorem 83 *1. Ako su S_1 i S_2 izmjerivi i disjunktni, onda je $S_1 \cup S_2$ izmjeriv te vrijedi $\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$.*

2. Ako postoji izometrija koja preslikava izmjerivi skup S_1 u skup S_2, onda je skup S_2 izmjeriv te vrijedi $\mu(S_1) = \mu(S_2)$.

3. Ako je P poligon, a L poligonalna linija koja ga definira, onda su i P i $P \cup L$ izmjerivi te vrijedi $\mu(P) = \mu(P \cup L)$.

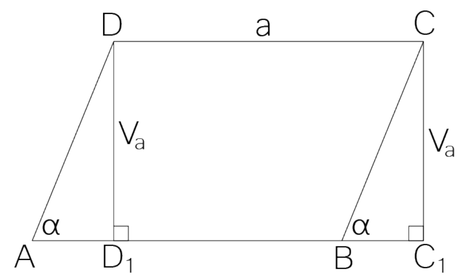
Primjer 84 *Neka je skup $A := \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Tada je $\mu(A) = 0$ dok za $B := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ vrijedi $\mu(B) = 1$.*

Teorem 85 *1. Površina paralelograma $ABCD$ sa stranicom a i visinom V_a je $\mu(ABCD) = a \cdot V_a$.*

2. Površina $\triangle XYZ$ sa stranicom x nad kojom je visina V_x je $\mu(\triangle XYZ) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot V_x$.

<u>Dokaz:</u>

1. dokazujemo površinu paralelograma:



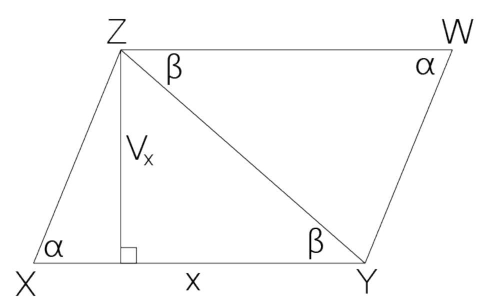
Neka su D_1 i C_1 nožišta okomica na pravac AB. Uočimo CDD_1C_1 paralelogram $\Rightarrow |CC_1| = |DD_1| =: V_a$. Također, uočimo kako je AB transverzala pravaca AD i BC. Sada slijedi:

$$\angle DAD_1 = \angle CBC_1 \qquad \angle DD_1A = \angle CC_1B = \frac{\pi}{2}$$

Sada po teoremu o sukladnosti trokuta (S-K-S) slijedi $\triangle ADD_1 \cong \triangle BCC_1$. Po prethodnom teoremu je $\mu(\triangle(ADD_1) = \mu(\triangle BCC_1)$.

$$\mu(ABCD) = \mu(DCC_1D_1) + \mu(\triangle AD_1D) - \mu(\triangle BC_1C) = \mu(DCC_1D_1) = |DC| \cdot |CC_1| = a \cdot V_a$$

2. dokažimo sada i za trokut, ideja je iskoristiti prethodni dio dokaza:



Neka je $W \in M$ t.d. je $XY \parallel ZW$ i $YW \parallel XZ$. Tada je $XYWZ$ paralelogram. Pokažimo kako vrijedi $\triangle XYZ \cong \triangle YWZ$. Prvo uočimo kako očito vrijedi $\angle YXZ = \angle ZWY$ jer je $XYWZ$ paralelogram. Nadalje, jer vrijedi $XY \parallel ZW$ slijedi kako $\angle XYZ = \angle YZW$ (kutovi uz presječnicu) pa smo pokazali kako su trokuti sukladni, tj. imaju istu površinu.

$$\mu(XYWZ) = x \cdot V_x = \mu(\triangle XYZ) + \mu(\triangle YWZ) \Longrightarrow \mu(\triangle XYZ) = \frac{x \cdot V_x}{2}$$

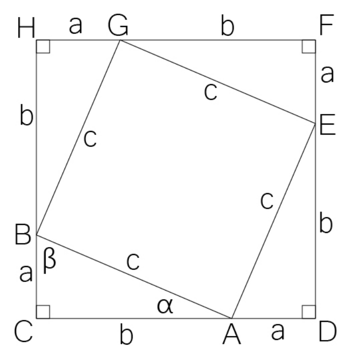
$\square$

Teorem 86 *(Pitagorin poučak[5]) U pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ s pravim kutom u vrhu C vrijedi*

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

Nadalje, vrijedi i obrat, tj. ukoliko u $\triangle DEF$ vrijedi $|DF|^2 + |EF|^2 = |DE|^2$, onda je on pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu F.

Dokaz: Produljimo stranicu $\overline{CA}$ do točke D preko točke A t.d. $|AD| = |BC| =: a$. Analogno, produljimo stranicu $\overline{BC}$ do točke H preko točke B t.d. $|BH| = |AC| =: b$. Neka je F sjecište paralele s CA kroz točku H i paralele s BC kroz toču D. $CDFH$ je kvadrat (kutovi su pravi). Neka je $G \in \overline{FH}$ t.d. $|GH| = a$ i $E \in \overline{DF}$ t.d. $|EF| = a$. Po teoremu o sukladnosti trokuta (S-K-S) slijedi:



$$\triangle ABC \cong \triangle ADE \cong \triangle EFG \cong \triangle HGB$$

$$\Longrightarrow (\angle BAC = \angle AED = \angle FGE = \angle HBG =: \alpha) \wedge (\angle CBA = \angle EAD = \angle FEG = \angle HGB =: \beta)$$

$$\Longrightarrow |AB| = |AE| = |EG| = |GB| = c$$

Suma kutova u $\triangle ABC$ je $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$$\angle BAC + \angle BAE + \angle EAD = \pi \Rightarrow \angle BAE = \frac{\pi}{2}$$

Analogno vrijedi

$$\angle AEG = \angle EGB = \angle GBA = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow AEGB \textit{ je kvadrat sa stranicom } c$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 = \mu(CDFH) = 4 \cdot \mu(\triangle ABC) + \mu(AEGB) = 2 \cdot a \cdot b + c^2$$

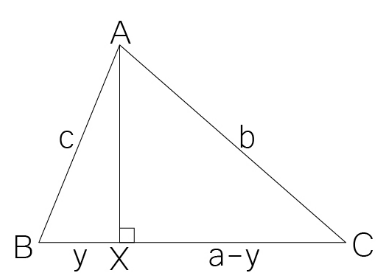
$$a^2 + b^2 = c^2$$

□

Korolar 87 *(Heronova formula) Površina $\triangle ABC$ sa stranicama a, b i c je*

$$P(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Dokaz: $P(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |AX|$ gdje je X nožište visine iz vrha A. Neka je bez smanjenja općenitosti $X \in \overline{BC}$ (ukoliko nije, nožište visine iz drugog vrha će pasti na suprotnu stranicu). Označimo $y = |BX|$. Sada su $\triangle ABX$ i $\triangle ACX$ pravokutni pa imamo $|AX|^2 = c^2 - y^2$ i $|AX|^2 = b^2 - (a-y)^2$.



[5] U knjizi "The Pythagorean Proposition", Elisha S. Loomis 1968., zapisano je 367 različitih dokaza Pitagorinog poučka.

$$c^2 - y^2 = b^2 - (a-y)^2 \Longrightarrow y = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$|AX|^2 = c^2 - y^2 = (c-y)(c+y) = \left(c - \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\right)\left(\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}\right) = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a+b+c)(a-b+c)}{4a^2}$$

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\cdot a \cdot \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a+b+c)(a-b+c)}{4a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}}$$

$$\Longrightarrow P(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

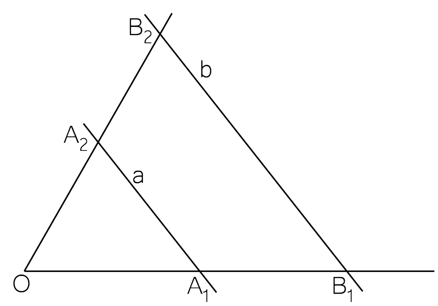
□

2.3 Sličnost trokuta

Propozicija 88 *(Talesov teorem o proporcionalnosti) Neka je $\angle A_1OA_2$ zadani kut te a i b paralelni pravci koji sijeku krakove tog kuta u točkama A_1, A_2, B_1, B_2 kao na slici. Tada vrijedi:*

$$(a)\quad \frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|}, \qquad (b)\quad \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|} = \frac{|OA_2|}{|A_2B_2|}, \qquad (c)\quad \frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|}.$$

Dokaz:



$$P(\triangle OA_1B_2) = P(\triangle OA_1A_2) + P(\triangle A_1A_2B_2) =$$

$$= P(\triangle OA_1A_2) + \frac{1}{2}\cdot|A_1A_2|\cdot d(B_2,a) = [a \parallel b] =$$

$$= P(\triangle OA_1A_2) + \frac{1}{2}\cdot|A_1A_2|\cdot d(B_1,a) =$$

$$= P(\triangle OA_1A_2) + P(\triangle A_1A_2B_1) = P(\triangle OB_1A_2)$$

$$\Rightarrow \frac{P(\triangle OA_1A_2)}{P(\triangle OA_1B_2)} = \frac{P(\triangle OA_1A_2)}{P(\triangle OB_1A_2)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cdot|OA_2|\cdot d(A_1,OA_2)}{\frac{1}{2}\cdot|OB_2|\cdot d(A_1,OB_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|OA_1|\cdot d(A_2,OA_1)}{\frac{1}{2}\cdot|OB_1|\cdot d(A_2,OB_1)}$$

odakle slijedi (a) jednakost.

$$\frac{|A_1B_1|}{|OA_1|} = \frac{|OB_1| - |OA_1|}{|OA_1|} = \frac{|OB_1|}{|OA_1|} - 1 = [po\ (a)] = \frac{|OB_2| - |OA_2|}{|OA_2|} = \frac{|A_2B_2|}{|OA_2|}$$

čime je dokazana tvrdnja pod (b).
Dokažimo još zadnju tvrdnju. Neka je $p = OA_2$ pravac te $q \parallel p$ koji prolazi kroz točku A_1. Označimo $Q = q \cap b$. Primijenimo (a) na $\angle B_2B_1O$ presječen paralelnim pravcima p i q:

$$\frac{|A_1B_1|}{|OB_1|} = \frac{|QB_1|}{|B_1B_2|}, \qquad \frac{|A_1B_1|}{|OB_1|} = \frac{|OB_1| - |OA_1|}{|OB_1|} = 1 - \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$$

$$\Longrightarrow \frac{|QB_1|}{|B_1B_2|} = \frac{|B_1B_2| - |B_2Q|}{|B_1B_2|} = 1 - \frac{|QB_2|}{|B_1B_2|} =$$

$$= [A_1QB_2A_2 \textit{ je paralelogram}] = 1 - \frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|}$$

$$1 - \frac{|OA_1|}{|OB_1|} = 1 - \frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} \Longrightarrow \frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|}$$

□

Definicija 89 *Trokuti* $\triangle A_1B_1C_1$ *i* $\triangle A_2B_2C_2$ ***slični*** *su ako vrijedi* $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$ *te ako postoji* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *t.d.*

$$\frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|} = \frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \lambda$$

Pišemo $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Očito je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih trokuta. Također vrijedi

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2 \Longrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$$

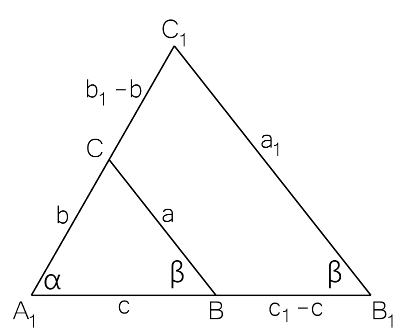
Teorem 90 *(O sličnosti trokuta) Dva trokuta slična su ako*

1. $(K - K)$ *imaju dva sukladna kuta;*
2. $(S - S - S)$ *su im sve tri stranice proporcionalne;*
3. $(S - K - S)$ *su im dva para stranica proporcionalna i kutovi među njima sukladni;*
4. $(S^> - K - S)$ *su im dva para stranica proporcionalni i kutovi nasuprot većim stranicama sukladni.*

Dokaz:

1. *Neka su* $\triangle ABC$ *i* $\triangle A_1B_1C_1$ *t.d.* $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$.
   (a) *ako je* $c_1 = c$ *tada po Teoremu o sukladnosti (K-S-K) vrijedi* $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ *pa su specijalno i slični* ($\lambda = 1$).
   (b) *neka je bez smanjenja općenitosti* $c < c_1$. *Kako su im pripadni kutovi jednaki, očito manji trokut možemo postaviti u veći tako da im se podudara jedan vrh. Neka je* $B \in \overline{A_1B_1}$ *t.d.* $|A_1B| = c$ *te neka je* $C \in \overline{A_1C_1}$ *t.d. je* $\angle CBA_1 = \beta$. *Kako je i* $\angle C_1B_1A_1 = \beta$ *to su* $BC \parallel B_1C_1$. *Sada po Talesovom teoremu o proporcionalnosti imamo:*

$$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a}{a_1}.$$

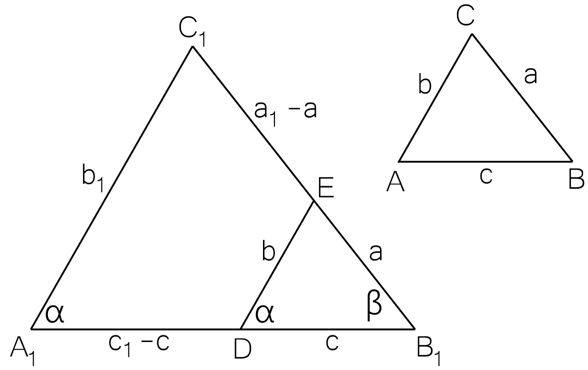


2. *Neka su* $\triangle ABC$ *i* $\triangle A_1B_1C_1$ *t.d.* $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$. *Treba dokazati* $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$.

   (a) *ako je* $a_1 = a$ *onda su trokuti sukladni po (S-S-S) pa su posebno i slični.*

   (b) *neka je sada bez smanjenja općenitosti* $a < a_1$.

   Neka je $D \in \overline{A_1B_1}$ *t.d.* $|B_1D| = c$. *Označimo još s* E *presjek pravca* B_1C_1 *i paralele s* A_1C_1 *kroz točku* D. *Kako je* $\angle EB_1D = \angle A_1B_1C_1$ *i jer su* $DE \parallel A_1C_1$ *to je* $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1DE$ *pa su po prvom dijelu ovog teorema* $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle DB_1E$. *Dakle dovoljno je dokazati* $\triangle ABC \sim \triangle DB_1E$. *Sada imamo:*



$$\frac{|B_1D|}{|B_1A_1|} = \frac{|B_1E|}{|B_1C_1|} \Longrightarrow |B_1E| = \frac{|B_1D|}{|B_1A_1|} \cdot |B_1C_1| = \frac{c}{c_1} \cdot a_1 = a$$

$$\frac{|B_1D|}{|B_1A_1|} = \frac{|DE|}{|A_1C_1|} \Longrightarrow |DE| = \frac{|B_1D|}{|B_1A_1|} \cdot |A_1C_1| = \frac{c}{c_1} \cdot b_1 = b$$

   Sada $\triangle B_1ED$ *ima stranice* a, b *i* c *pa po Teoremu o sukladnosti (S-S-S) vrijedi* $\triangle B_1ED \cong \triangle ABC$.

$\square$

Propozicija 91 *Neka su* $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ *t.d.* $\frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|} = \frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \lambda$. *Tada vrijedi:*

1. $O(\triangle A_1B_1C_1) = \lambda \cdot O(\triangle A_2B_2C_2)$, *(O je opseg);*

2. $P(\triangle A_1B_1C_1) = \lambda^2 \cdot P(\triangle A_2B_2C_2)$.

<u>*Dokaz:*</u>

1. *trivijalno.*

2. *iz Heronove formule.*

$\square$

3 Klasična algebra vektora

3.1 Uvod

Definicija 92 *Uređeni par (A, B) nazivamo* ***orijentirana dužina*** *i označavamo s $\overrightarrow{AB}$. A je početak, a B kraj dužine.*

Uočimo kako $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ osim kada je $A = B$.

Definicija 93 *Za orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kažemo da su ekvivalentne i pišemo $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište, tj. ako je četverokut $ACDB$ paralelogram.*

Teorem 94 *Relacija $\approx$ je relacija ekvivalencije na skupu svih orijentiranih dužina.*
Dokaz:

1. *Refleksivnost: $\overline{AB}$ i $\overline{AB}$ imaju isto polovište pa je $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{AB}$*

2. *Simetričnost: $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište $\Rightarrow \overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{AB}$*

3. *Tranzitivnost: $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište; $\overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{EF} \Rightarrow$ dužine $\overline{CF}$ i $\overline{ED}$ imaju isto polovište. Pretpostavimo kako dužine $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$ leže na tri razlilčita pravca. Sada su $ACDB$ i $CEFD$ paralelogrami pa vrijedi $AB \parallel CD \parallel EF$ i $|AB| = |CD| = |EF|$. Pa slijedi i kako je $AEFB$ također paralelogram i $\overline{AF}$ i $\overline{EB}$ imaju isto polovište, tj. $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{EF}$.*

$\square$

Definicija 95 *Klase ekvivalencije relacije $\approx$ zovemo* ***vektori*** *i označavamo ih s $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ itd., a skup svih vektora ravnine M označavamo s $V^2 = M \times M/_{\approx}$. Klasu ekvivalencije čiji element je $\overrightarrow{AB}$ označavamo s $[\overrightarrow{AB}]$, tj. $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} \in V^2 : \overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{PQ}\}$.*

Propozicija 96 *Za svaki vektor $\overrightarrow{a}$ i točku $A \in M$ postoji jedinstvena točka $B \in M$ t.d. $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$.*
Dokaz: Neka je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{CD}]$ za neke $C, D \in M$. Odredimo $B \in M$ t.d. $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$. Neka je P polovište dužine $\overline{AD}$. Neka je točka B centralno simetrična točki C s obzirom na točku P. Tada dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$. Dokažimo sada jedinstvenost. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoje $B_1, B_2 \in M$ t.d. $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB_1}] = [AB_2]$. Slijedi $\overrightarrow{AB_1} \approx \overrightarrow{AB_2}$ tj. dužine $\overline{AB_1}$ i $\overline{AB_2}$ imaju isto polovište. B_1 je centralno simetrična točki A s obzirom na P, kao i B_2 pa vrijedi $B_1 = B_2$.

$\square$

3.2 Zbroj vektora

Definicija 97 *Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ vektori te neka su $A, B \in M$ t.d. $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{BC}]$. Zbroj vektora definiramo kao $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} := [\overrightarrow{AC}]$.*

Propozicija 98 *Definicija zbroja vektora dobro je definirana, tj. ne ovisi o izboru reprezentanta klase.*
Dokaz: Neka su $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{A_1B_1}] = [\overrightarrow{A_2B_2}]$ i $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{B_1C_1}] = [\overrightarrow{B_2C_2}]$. Pokažimo da je $[\overrightarrow{A_1C_1}] = [\overrightarrow{A_2C_2}]$. Kako su $[\overrightarrow{A_1B_1}] \approx [\overrightarrow{A_2B_2}]$ i $[\overrightarrow{B_1C_1}] \approx [\overrightarrow{B_2C_2}]$ to su i $[\overrightarrow{A_1A_2}] \approx [\overrightarrow{B_1B_2}]$ i $[\overrightarrow{B_1B_2}] \approx [\overrightarrow{C_1C_2}]$. Iz tranzitivnosti relacije $\approx$ slijedi $[\overrightarrow{A_1A_2}] \approx [\overrightarrow{C_1C_2}]$ i na kraju $[\overrightarrow{A_1C_1}] \approx [\overrightarrow{A_2C_2}]$.

□

Teorem 99 *Skup svih vektora čini komutativnu grupu s obzirom na zbrajanje.*
Dokaz: Neka su $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$ *i* $\vec{c} = [\overrightarrow{CD}]$.

1. *Asocijativnost:*
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = [\overrightarrow{AB}] + ([\overrightarrow{BC}] + [\overrightarrow{CD}]) = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BD}] = [\overrightarrow{AD}]$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = ([\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}]) + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AD}]$$

2. *Neutralni element: prvo uočimo da za proizvoljne dvije točke* $A, B \in M$ *vrijedi* $\overrightarrow{AA} \approx \overrightarrow{BB}$. *Tada pišemo* $[\overrightarrow{AA}] = \vec{0}$ *i nazivamo ga* ***nul-vektor***. *Neka je sada* $\vec{a}$ *proizvoljan vektor.*
$$\vec{a} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = \vec{0} + \vec{a}$$

3. *Suprotni element: za* $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ *definiramo* $-\vec{a} := [\overrightarrow{BA}]$ *i nazivamo ga* ***suprotni vektor***.
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BA}] = [\overrightarrow{AA}] = \vec{0}$$
$$(-\vec{a}) + \vec{a} = [\overrightarrow{BA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{BB}] = \vec{0}$$

4. *Komutativnost: neka su* $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$ *i* $\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$ *Znamo kako postoji točka* $D \in M$ *t.d.* $\vec{b} = [\overrightarrow{AD}]$. *Sada je* $\overrightarrow{AD} \approx \overrightarrow{BC}$ *pa je i* $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC}$ *tj.* $\vec{a} = [\overrightarrow{DC}]$.
$$\vec{b} + \vec{a} = [\overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{DC}] = [\overrightarrow{AC}] = \vec{a} + \vec{b}$$

□

3.3 Duljina, smjer i orijentacija vektora

Definicija 100 ***Duljina vektora*** $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ *je* $|AB|$ *i označava se s* $|\vec{a}|$.

Propozicija 101 *Duljina vektora dobro je definirana, tj. ne ovisi o izboru reprezentanta.*
Dokaz: Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{A_1B_1}] = [\overrightarrow{A_2B_2}] \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} \approx \overrightarrow{A_2B_2} \Rightarrow A_1A_2B_2B_1$ *je paralelogram* $\Rightarrow |A_1B_1| = |A_2B_2|$.

□

Definicija 102 *Za vektor* $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}], A \neq B$ *i vektor* $\vec{b} = [\overrightarrow{CD}], C \neq D$ *kažemo da su* ***istog smjera*** *ako* $AB \parallel CD$ *i tada pišemo* $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Propozicija 103
1. *Relacija "biti istog smjera" je relacija ekvivalencije.*
2. *Relacija "biti istog smjera" ne ovisi o izboru reprezentanta klase.*

Definicija 104 *Klase ekvivalencije relacije "biti istog smjera" nazivamo* ***smjerovima vektora***.

Definicija 105 *Neka su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *vektori istog smjera te* $O, A, B \in M$ *kolinearne točke t.d.* $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ *i* $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$. *Kažemo da su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ ***iste orijentacije*** *ako* $B \in OA$ *tj. da su suprotne orijentacije ako* $B \notin OA$.

Propozicija 106 *Definicija pojma orijentacija dobro je definirana, tj. ne ovisi o izboru reprezentanta.*

Propozicija 107 *Vektor je jedinstveno određen svojom duljinom, smjerom i orijentacijom.*

Napomena 108 *Suprotni vektori imaju istu duljinu, smjer, ali suprotnu orijentaciju.*

3.4 Množenje vektora skalarom

Definicija 109 *Za vektor* $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ *i za svaki* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *definiramo* $\alpha \cdot \overrightarrow{a}$ *ovako:*

1. *duljina od* $\alpha \cdot \overrightarrow{a}$ *je* $|\alpha| \cdot |\overrightarrow{a}|$.
2. *Smjer od* $\alpha \cdot \overrightarrow{a}$ *je isti kao i smjer od* $\overrightarrow{a}$
3. (a) *ako je* $\alpha > 0$ *onda* $\alpha \cdot \overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{a}$ *imaju istu orijentaciju.*
   (b) *ako je* $\alpha < 0$ *onda* $\alpha \cdot \overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{a}$ *imaju suprotnu orijentaciju.*

Dodatno, ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *tada je* $\alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}, \forall\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; *ako je* $\alpha = 0$ *tada definiramo* $\alpha \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *i* $\alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Korolar 110 *Skup svih vektora* V^2 *s obzirom na operaciju zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom čini jedan vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$.

Sada možemo uvesti standardne pojmove iz linearne algebre: baza, skup izvodnica, nezavisan skup vektora itd.

Propozicija 111 *Vektorski prostor* $(V^2, +, \cdot)$ *je dvodimenzionalan.*
Dokaz: neka su $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *vektori s različitim smjerovima. Pokažimo da je* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ *baza za* V^2. *Neka je* $\overrightarrow{c} \in V^2$ *proizvoljan i* $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$ *i* $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{OC}]$. *Definirajmo* $A_1 :=$ *presjek* OA *i paralele s* OB *kroz* C *te* $B_1 :=$ *presjek* OB *i paralele s* OA *kroz* C. *Iz definicije množenja vektora skalarom slijedi kako postoje* α *i* β *t.d.* $\alpha \cdot \overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA_1}]$ *i* $\beta \cdot \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB_1}]$. *Sada je* $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{OC}] = [\overrightarrow{OA_1}] + [\overrightarrow{OB_1}] = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}$.

□

Definicija 112 *Za dva pravca kažemo da su* ***paralelni*** *ako pripadaju istoj ravnini i ne sijeku se. Za pravce koji ne pripadaju istoj ravnini kažemo da su* ***mimoilazni***.

3.5 Skalarni produkt

Definicija 113 *Neka su* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^2\backslash\{0\}$ *te* $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$ *i* $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$. *Kut između vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je* $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) := \angle AOB \in [0, \pi]$. *Ako je* $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{2}$ *kažemo da su* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ ***okomiti*** *i pišemo* $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Uočimo kako ni kut ne ovisi o izboru reprezentanta.

Definicija 114 *Neka je* $u : V^2 \times V^2 \to \mathbb{R}$ *preslikavanje dano s:*

1. $u(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$ *ako je* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *i(li)* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.
2. $u(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

Broj $u(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ *zovemo* ***skalarni produkt*** *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *i označavamo s* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} := u(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

Teorem 115 *Skalarni produkt ima sljedeća svojstva:*

1. *Komutativnost:* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

2. *Kvaziasocijativnost:* $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2) \quad (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

3. *Distributivnost prema zbrajanju:* $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

4. *Pozitivna definitnost:* $(\forall \vec{a} \in V^2) \quad \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, *jednakost se postiže ako i samo ako* $\vec{a} = \vec{0}$.

<u>*Dokaz:*</u> *dokazat ćemo samo tvrdnju pod 2. Razlikujemo tri slučaja:*

- $\lambda = 0$ *i(li)* $\vec{a} = \vec{0}$ *i(li)* $\vec{b} = \vec{0}$, *očito su obje strane jednakosti jednake nuli.*
- $\lambda > 0$ *slijedi* $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda \cdot \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\lambda < 0$ *slijedi* $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda \cdot \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})) = -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (-cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda \cdot (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

□

Korolar 116 *Vrijede sljedeće jednakosti:*

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

<u>*Dokaz:*</u> *neka su* $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$ *i* $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. *Sada je*

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\angle ABC) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})) =$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

□

Definicija 117 *Neka su* $\vec{i}, \vec{j} \in V^2$ *t.d. vrijedi* $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ *i* $\vec{i} \perp \vec{j}$. *Tada je* $B := \{\vec{i}, \vec{j}\}$ ***ortonormirana baza*** *u* V^2. *Ako je* $\vec{c} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ *kažemo da su* α *i* β *koordinate vektora* $\vec{c}$ *u bazi* B *i pišemo* $\vec{c} = (\alpha, \beta)$.

Propozicija 118 *Neka su* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ *i* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2)$ *proizvoljni vektori u* V^2. *Tada vrijedi sljedeće:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2$
2. $|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$
3. *za* $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ *vrijedi sljedeće:*

$$cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$$

Dokaz: *Dokazat ćemo samo tvrdnju pod 1. nakon čega tvrdnje pod 2. i 3. slijede trivijalno.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}) \cdot (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}) =$$

$$= [prema\, prethodnom\, Teoremu] = (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}) \cdot (\beta_1 \vec{i}) + (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}) \cdot (\beta_2 \vec{j}) =$$

$$= (\alpha_1\beta_1)(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (\alpha_2\beta_1)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + (\alpha_1\beta_2)(\vec{j} \cdot \vec{i}) + (\alpha_2\beta_2)(\vec{j} \cdot \vec{j}) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2$$

gdje smo iskoristili činjenicu kako je $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ *i* $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ *te distributivnost, komutativnost i kvaziasocijativnost u trećem retku.*

□

3.6 "Skok u 3-D"

E. A. Abbot: "Flatland: A romance of many dimensions" (1884.)
Aksiomi incidencije u 3-D:
2.(a), 2.(b) i 2.(c) ostaju te dodatno imamo:

- Za svake tri točke koje ne leže na istom pravcu postoji jedna ravnina koja ih sadrži.
- Ako točke A i B leže u nekoj ravnini, onda i svaka točka pravca AB leži u toj ravnini.
- Ako točka A leži u presjeku ravnina π_1 i π_2, onda postoji još barem jedna točka u tom presjeku.
- Postoje bar četiri točke koje ne leže u istoj ravnini.

Definicija vektora, zbroj vektora, skalarnog produkta i množenja vektora skalarom ostaju potpuno iste kao i u 2-D. Jedina je promjena u definiciji paralelnih pravaca u 3-D i smjera vektora.

Definicija 119 *Pravci u prostoru* ***paralelni*** *su ako pripadaju istoj ravnini i ne sijeku se. Pravce koji ne pripadaju istoj ravnini zovemo* ***mimoilazni*** *(mimosmjerni).*

Uočimo kako je "biti paralelan" i dalje relacija ekvivalencije.

Definicija 120 *Neka su* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in V^3$ *t.d.* $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ *te* $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ *i* $\vec{j} \perp \vec{k}$. *Tada je* $B := \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *ortonormirana baza u* V^3. *Ako je* $\vec{c} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ *kažemo da su* α, β *i* γ *koordinate vektora* $\vec{c}$ *u bazi* B *i pišemo* $\vec{c} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Propozicija 121 *Neka su* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *i* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *proizvoljni vektori u* V^3. *Tada vrijedi sljedeće:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_3$
2. $|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3}$
3. $cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$

Definicija 122 *Vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ ***kolinerarni*** *su ako imaju isti smjer.*

Uočimo: $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinerarni su $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni $\Longleftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ t.d. $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow O$, A i B leže na istom pravcu.

Definicija 123 *Vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ paralelan je s ravninom π ako je pravac AB paralelan s ravninom π, tj. ako postoji pravac $p \in \pi$ t.d. $AB \parallel p$.*

Definicija 124 *Skup vektora $S \subseteq V^3$ je **komplanaran** ako postoji ravnina s kojom su paralelni svi vektori iz S.*

Uočimo kako je skup $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ uvijek komplanaran. Naime, neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$. Tada ravnina π određena s točkama O, A i B sadrži oba vektora.

Teorem 125

1. *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ nekolinearni vektori. Vektor $\vec{c} \in V^3$ komplanaran je s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.d. $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*
2. *Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ nekomplanarni vektori. Za proizvoljni vektor $\vec{d} \in V^3$ postoje jedinstveni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.d. $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.*

3.7 Vektorski produkt

Definicija 126 *Preslikavanje $v : V^3 \times V^3 \to V^3$ definiramo ovako:*

1. *ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, stavimo $v(\vec{a}, \vec{b}) := \vec{0}$.*
2. *ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni onda za $\vec{c} := v(\vec{a}, \vec{b})$ vrijedi:*
   (a) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$
   (b) *smjer od $\vec{c}$ određen je zahtjevom $\vec{a} \perp \vec{c}$ i $\vec{b} \perp \vec{c}$.*
   (c) *orijentacija od $\vec{c}$ takva je da uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ predstavlja "desnu bazu"[6] u V^3.*

Preslikavanje v nazivamo vektorski produkt i pišemo $v(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$.

Teorem 127 *Vektorski produkt ima sljedeća svojstva:*

1. *antikomutativnost:* $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3)\;\; \vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$.
2. *kvaziasocijativnost:* $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3)\;\; (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.
3. *distributivnost:* $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3)\;\; \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$.
4. *<u>nije</u> asocijativan:*
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$
5. *vrijedi Jacobijev identitet:*
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

[6] $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je desna baza ako postavljanjem prstiju desne ruke u smjeru vektora $\vec{a}$ i prilikom zakretanja prstiju prema vektoru $\vec{b}$ najkraćim putem palac pokazuje orijentaciju vektora $\vec{c}$.

Dokaz:

1. *Očito* $\vec{b} \times \vec{a}$ *i* $\vec{a} \times \vec{b}$ *imaju isti smjer i duljinu, ali suprotnu orijentaciju (po definiciji).*

2. *Razlikujemo tri slučaja:*

   (a) $\lambda = 0$ *tada je očito s obje strane jednakosti* $\vec{0}$.

   (b) $\lambda > 0$ *prvo uočimo* $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\lambda\vec{a}, \vec{b})$. *Nadalje,* $|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|$. *Vektor* $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ *okomit je na* $\vec{a}$ *i na* $\vec{b}$ *pa ima isti smjer kao i vektor* $\vec{a} \times \vec{b}$. *Također su im iste i orijentacije, koje je ista kao i kod vektora* $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ *jer je* $\lambda > 0$.

   (c) $\lambda < 0$ *prvo uočimo* $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$. *Nadalje,* $|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|$. *Smjer je isti kao i kod uvjeta* $\lambda > 0$. *Orijentacija vektora* $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ *suprotna je orijentaciji od* $\vec{a} \times \vec{b}$, *a orijentacija vektora* $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ *suprotna je orijentaciji od* $\vec{a} \times \vec{b}$ *jer* $\lambda < 0$ *pa* $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ *i* $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ *imaju istu orijentaciju.*

3. *Ako je bilo koji od vektora* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *nul-vektor tvrdnja je očita pa pretpostavimo da su svi različiti od nul-vektora. Neka je* $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ *i* $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$ *te* $\phi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. *Neka je* π *ravnina okomita na* OA *t.d.* $O \in \pi$. *Neka je* P_B *ortogonalna projekcija točke* B *na ravninu* π. $|\overrightarrow{OP_B}| = |\vec{b}| \cdot sin\,\phi$. *Neka je* $X_B \in \pi$ *dobivena rotacijom ravnine* π *oko* O *za kut* $\frac{\pi}{2}$ *t.d. je* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OX_B})$ *desna baza tj.* $|\overrightarrow{OP_B}| = |\overrightarrow{OX_B}| = |\vec{b}| \cdot sin\,\phi$, $\overrightarrow{OX_B} \perp \overrightarrow{OP_B}$ *i* $\overrightarrow{OX_B} \perp \overrightarrow{OB}$. *Neka je* $Y_B \in \pi$ *t.d.* $[\overrightarrow{OY_B}] = |\vec{a}| \cdot [\overrightarrow{OX_B}] \Rightarrow [\overrightarrow{OY_B}] = \vec{a} \times \vec{b}$. *Isti postupak ponovimo i za* $\vec{a} \times \vec{c}$ (P_C, X_C, Y_C) *te za* $\vec{b} \times \vec{c}$ (P_S, X_S, Y_S). $\vec{s} = \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow [\overrightarrow{OS}] = [\overrightarrow{OB}] + [\overrightarrow{OC}] \Rightarrow [\overrightarrow{OP_S}] = [\overrightarrow{OP_B}] + [\overrightarrow{OP_C}]$ *i sada rotiramo za* $\frac{\pi}{2}$ *te slijedi* $[\overrightarrow{OX_S}] = [\overrightarrow{OX_B}] + [\overrightarrow{OX_C}]$ *odakle množenjem s* $|\vec{a}|$ *dobijemo* $[\overrightarrow{OY_S}] = [\overrightarrow{OY_B}] + [\overrightarrow{OY_C}] \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$.

4. $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} \neq (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

5. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} =$
   $= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{c} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{0}$.

□

Korolar 128 1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff$ *vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *su kolinearni.*

2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

3. *Ako* $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ *i* $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$ *nisu kolinearni onda je* $|\vec{a} \times \vec{b}|$ *površina paralelograma sa stranicama* $\overline{OA}$ *i* $\overline{OB}$.

4. $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, $\quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$

Vektorski produkt zajedno s operacijom $\times$ za koju vrijede svojstva 2. i 3. zadnjeg teorema i svojstvo 4. prethodnog korolara zovemo **algebra**. Algebra u kojoj dodatno vrijede svojstva 1. i 5. prethodnog teorema naziva se **Liejeva algebra**.

Teorem 129 V^3 *s vektorskim množenjem čini Liejevu algebru nad* $\mathbb{R}$.

3.8 Mješoviti produkt

Definicija 130 *Neka je* $m : V^3 \times V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ *preslikavanje dano s*

$$m(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$$

m *nazivamo mješovito ili* ***vektorsko-skalarno množenje*** *u* V^3. *Pišemo* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) := m(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Propozicija 131 $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0 \iff$ *vektori* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *su komplanarni.*
Dokaz: Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *komplanarni. Ako je ijedan nul-vektor, onda je tvrdnja očita pa pretpostavimo kako su svi različiti od nul-vektora. Neka je* $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$ *i* $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$ *te* π *ravnina kroz točke* O, A *i* B. *Kako su komplanarni to postoji* $C \in \pi$ *t.d.* $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{OC}]$. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *ima smjer okomit na ravninu* π *pa zbog* $C \in \pi$ *vrijedi* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$.
Obrnuto, neka je $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$. *Tada imamo tri slučaja:*

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ *Tada su* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *kolinearni pa su sva tri komplanarna.*
2. $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ *pa su po definiciji svaka dva vektora automatski komplanarna (tako i* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*).*
3. $\overrightarrow{c}$ *je okomit na* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. *Tada je* $\overrightarrow{c}$ *paralelan s ravninom koja sadrži točke* A, B *i* O *pa su ponovno sva tri vektora komplanarna.*

$\square$

Propozicija 132 1. *Neka je* $\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overrightarrow{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *i* $\overrightarrow{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. *Tada je:*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

2. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = -(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = -(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) = -(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$
3. $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$

Dokaz:

1. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = (\gamma_1 \overrightarrow{i} + \gamma_2 \overrightarrow{j} + \gamma_3 \overrightarrow{k}) \cdot ((\heartsuit) \overrightarrow{i} + (\clubsuit) \overrightarrow{j} + (\diamondsuit) \overrightarrow{k}) =$
$$= (\gamma_1(\heartsuit) + \gamma_2(\clubsuit) + \gamma_3(\diamondsuit)) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$
gdje su $\heartsuit$, $\clubsuit$ *i* $\diamondsuit$ *neke matrice.*
2. *Zamjenom redaka u determinanti dobije se traženi rezultat.*
3. $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$

$\square$

Propozicija 133 *Volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ je $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|$.*

Dokaz: neka je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$ te $\phi = \angle(\overrightarrow{c}, \pi)$ gdje je π ravnina u kojoj leže A, B i O. Pretpostavimo kako su $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ s iste strane ravnine π (inače gledamo vektor $-\overrightarrow{c}$). Volumen paralelepipeda je površina baze puta visina

$$V(paralelepiped) = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| \cdot |PC|$$

gdje je P projekcija točke C na ravninu π. Očito je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \parallel \overline{PC}$. OC je transverzala pravca CP i OS gdje je

$$[\overrightarrow{OS}] = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \Longrightarrow |PC| = |OC| \cdot cos\,\phi$$

pa imamo

$$V = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| \cdot |OC| \cdot cos\,\phi = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{c}| \cdot cos\,\phi = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$$

.

□

4 Elementi analitičke geometrije u prostoru

4.1 Uvod

Euklidski prostor $E^3 \Longrightarrow$ vektorski prostor $\Longrightarrow$ koordinatizacija u V^3

Definicija 134 *Neka je $O \in E^3$ proizvoljna i fiksna točka. Definiramo preslikavanje $r : E^3 \to V^3$ s $r(A) := [\overrightarrow{OA}]$. Pišemo $\overrightarrow{r_A} = [\overrightarrow{OA}] = r(A)$ i kažemo da je $\overrightarrow{r_A}$* ***radij-vektor*** *pridružen točki A. Točku O nazivamo* ***ishodište****.*

Uočimo kako je $r : E^3 \to V^3$ bijekcija.

Definicija 135 *Neka je $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ ortonormirana baza u V^3 te O ishodište. Za točku $T \in E^3$ neka je $[\overrightarrow{OT}] = \overrightarrow{r_T} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}$ (jedinstveni) prikaz vektora u navedenoj bazi. Uređenu trojku $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nazivamo pravokutne ili* ***kartezijeve koordinate*** *točke T u odnosu na koordinatni sustav $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$. Radijvektore $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ i $\overrightarrow{OK}$ t.d. je $\overrightarrow{i} = [\overrightarrow{OI}]$, $\overrightarrow{j} = [\overrightarrow{OJ}]$ i $\overrightarrow{k} = [\overrightarrow{OK}]$ nazivamo* ***koordinatni vektori****. Pravce OI, OJ i OK nazivamo* ***osi koordinatnog sustava****, a ravnine OIJ, OJK i OKI nazivamo* ***koordinante ravnine****.*

Preslikavanje $k : E^3 \to \mathbb{R}^3$ dano s $k : T \to \overrightarrow{r_T} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k} \longmapsto (x, y, z)$ je bijekcija i zovemo ga **koordinatizacija** prostora E^3. Pišemo $T = (x, y, z)$ ili $T(x, y, z)$.

Propozicija 136 *Neka su $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$ točke u E^3 zadane svojim koordinatama u odnosu na neki koordinatni sustav. Tada vektor $[\overrightarrow{AB}]$ u istom koordinatnom sustavu ima koordinate $[\overrightarrow{AB}] = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.*

<u>Dokaz:</u> Neka su

$$[\overrightarrow{OA}] = x_A\overrightarrow{i} + y_A\overrightarrow{j} + z_A\overrightarrow{k}$$

i

$$[\overrightarrow{OB}] = x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j} + z_B\overrightarrow{k}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{AB}] &= [\overrightarrow{AO}] + [\overrightarrow{OB}] = -[\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OB}] = \\
&= -x_A\overrightarrow{i} - y_A\overrightarrow{j} - z_A\overrightarrow{k} + x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j} + z_B\overrightarrow{k} = \\
&= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)
\end{aligned}$$

.

$\square$

Propozicija 137 *Za $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B) \in E^3$ vrijedi:*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

4.2 Razni oblici jednadžbe pravca

Neka je π proizvoljna ravnina te $T_0, T_1, T_2 \in \pi$ proizvoljne nekolinearne točke. Označimo $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{T_0T_1}]$ i $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{T_0T_2}]$. Ako je $X \in \pi$ onda su vektori $[\overrightarrow{T_0X}]$, $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ komplanarni pa postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.d. $[\overrightarrow{T_0X}] = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$. Neka je O ishodište, tada je $\overrightarrow{r_X} - \overrightarrow{r_{T_0}} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ tj.

$$x \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{r_X} = \overrightarrow{r_{T_0}} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Ovaj zapis ravnine naziva se **vektorski parametarski oblik jednadžbe pravca**.

Neka je $T = (X_0, Y_0, Z_0)$, $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \pi$. Za točku $X = (x, y, z)$ i za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$x \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = X_0 + \alpha a_x + \beta b_x \\ y = Y_0 + \alpha a_y + \beta b_y \\ z = Z_0 + \alpha a_z + \beta b_z \end{array}$$

Ovaj zapis naziva se **parametarski oblik jednadžbe ravnine**.

Korolar 138 $x \in \pi \Leftrightarrow [\overrightarrow{T_0X}], \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *su komplanarni* $\Leftrightarrow \overrightarrow{r_X} - \overrightarrow{r_{T_0}}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *su komplanarni* $\Leftrightarrow (\overrightarrow{r_X} - \overrightarrow{r_{T_0}}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} X - X_0 & Y - Y_0 & Z - Z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

Uz $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{T_0T_1}] = (X_1 - X_0, Y_1 - Y_0, Z_1 - Z_0)$ *i* $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{T_0T_2}] = (X_2 - X_0, Y_2 - Y_0, Z_2 - Z_0)$ *imamo:*

$$\begin{vmatrix} X - X_0 & Y - Y_0 & Z - Z_0 \\ X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 & Z_1 - Z_0 \\ X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 & Z_2 - Z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Teorem 139 *Neka su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ t.d. je bar jedan od brojeva A, B ili C različit od nule. Skup svih točaka $X = (x, y, z)$ za koje vrijedi*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

*je ravnina u E^3. (Ovaj zapis naziva se **opći oblik jednadžbe ravnine**)*

Dokaz: *bez smanjenja općenitosti neka je $A \neq 0$. Označimo $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}$. Uočimo da vrijedi:*

$$T_0 = \left(\frac{-B - C - D}{A}, 1, 1\right) \in S$$

Definirajmo $\overrightarrow{n} := (A, B, C)$ i normirajmo ga. Nadopunimo $\{\overrightarrow{n}\}$ do ortonormirane baze za V^3, tj. neka je $\{\overrightarrow{n}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ ortonormirana baza za V^3. Pokažimo da je $S = \pi(T_0; \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ tj. ravnina određena s točkom T_0 i vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Neka je $(x, y, z) \in S$. Tada imamo

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

i zato što je $T_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$ vrijedi

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

odakle slijedi

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Sada je očito $[\overrightarrow{T_oX}]\in S$ *pa je* $\overrightarrow{n}\cdot[\overrightarrow{T_oX}]=0$. *Neka je* $[\overrightarrow{T_oX}]=\gamma\overrightarrow{n}+\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$.

$$0=[\overrightarrow{T_oX}]\cdot\overrightarrow{n}=\gamma\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}+\alpha\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}+\beta\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{n}=\gamma\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}=\gamma$$

Dakle, $[\overrightarrow{T_0X}]=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$ *za neke* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow X\in\pi(T_0;\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$.

Obrnuto, neka je $X\in\pi(T_0;\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$. *Tada je* $[\overrightarrow{T_0X}]=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$ *za neke* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. *Tada je i* $\overrightarrow{n}\cdot[\overrightarrow{T_oX}]=0$ *odakle slijedi*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+Ay+Az=Ax_0+Ay_0+Az_0=[jer\,je\,T_0\in S]=-D\Rightarrow x\in S$$

□

Napomena 140 *Iz dokaza vidimo da ako su* $T_1,T_2\in\pi$, $\pi\ldots Ax+By+Cz+D=0$ *onda je* $\overrightarrow{T_1T_2}\perp\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n}=(A,B,C)$. *Vektor* $\overrightarrow{n}$ *nazivamo* ***vektor normale*** *ravnine* π.

Uočimo, ako je $X=(x,y,z)\in\pi$, onda je $\overrightarrow{r_X}\cdot\overrightarrow{n}+D=Ax+By+Cz+D=0$. Također, ako je jednadžba ravnine dana s $\pi\ldots Ax+By+Cz+D=0$, onda i za $\forall k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ vrijedi $A\cdot k\cdot x+B\cdot k\cdot y+C\cdot k\cdot z+D\cdot k=0$ također jednadžba ravnine π, dakle opći oblik jednadžbe nije jedinstven.

Definicija 141 *Udaljenost točke T od ravnine π definira se kao*

$$d(T,\pi):=inf\{d(T,x):x\in\pi\}$$

Teorem 142 *Neka je ravnina* $\pi\ldots Ax+By+Cz+D=0$ *i neka je* $T=(x_0,y_0,z_0)\in E^3$ *proizvoljna. Tada je:*

$$d(T,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

<u>Dokaz:</u> neka je $\overrightarrow{n}=(A,B,C)$ *vektor normale ravnine* π *i neka je* T_π *sjecište ravnine* π *i pravca koji prolazi kroz* T *i paralelan je s vektorom normale. Tada je* $[\overrightarrow{TT_\pi}]\perp[\overrightarrow{T_\pi X}]$ *za* $\forall X\in\pi$ *te je* $\triangle TT_\pi X$ *pravokutan. Očito vrijedi* $d(T,\pi)=\alpha\cdot\overrightarrow{n_0}$ *gdje je*

$$\overrightarrow{n_0}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

jedinični vektor normale (jer je $|\overrightarrow{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$*). Odredimo* α. *Stavimo* $T_\pi=(x_\pi,y_\pi,z_\pi)\in\pi$. *Sada je:*

$$[\overrightarrow{TT_\pi}]=(x_\pi-x_0,y_\pi-y_0,z_\pi-z_0)=\alpha\cdot\overrightarrow{n_0}\Longrightarrow[\overrightarrow{TT_\pi}]\cdot\overrightarrow{n_0}=\alpha$$

$$\alpha=(x_\pi-x_0,y_\pi-y_0,z_\pi-z_0)\cdot\overrightarrow{n_0}=(x_\pi,y_\pi,z_\pi)\cdot\overrightarrow{n_0}-(x_0,y_0,z_0)\cdot\overrightarrow{n_0}=$$

$$=\overrightarrow{r_\pi}\cdot\overrightarrow{n_0}-\frac{A_0+B_0+C_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\overrightarrow{n_0}=\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-\frac{A_0+B_0+C_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$\square$

Uočimo kako predznak od $\alpha = [\overrightarrow{TT_\pi}] \cdot \overrightarrow{n_0}$ ovisi o tome je li $\angle([\overrightarrow{TT_\pi}], \overrightarrow{n_0})$ šiljasti ili tupi kut.

Definicija 143 *Neka su dane ravnine π_1 i π_2 čiji je presjek pravac p. Neka je $A \in p$ proizvoljna točka te neka je π ravnina okomita na p i koja prolazi kroz A. Definirajmo pravce $p_1 := \pi_1 \cap \pi$ i $p_2 := \pi_2 \cap \pi$. Kut između ravnina π_1 i π_2 definira se kao manji od kuteva koje zatvaraju pravci p_1 i p_2 u oznaci $\angle(\pi_1, \pi_2)$. Ako se ravnine ne sijeku kažemo kako su paralelne.*

Uočimo kako je kut između dvije ravnine jednak kutu između pripadnih vektora normale te dvije ravnine.

Propozicija 144 *Neka su $\pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ dvije ravnine. Tada vrijedi sljedeće:*

$$cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

<u>*Dokaz:*</u> *neka su vektori normale ravnina π_1 i π_2 redom:*

$$\overrightarrow{n_1} = \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \right)$$

$$\overrightarrow{n_2} = \left(\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right)$$

Tada je $cos\angle(\pi_1, \pi_2) = |cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| = |\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|$.

$\square$

4.3 Analitičko predočenje pravca

Neka je p proizvoljni pravac i $T_0, T_1 \in p$. Definirajmo $\overrightarrow{a} := [\overrightarrow{T_0T_1}]$. Za svaku točku $x \in p$ očito postoji (jedinstveni) $\alpha \in \mathbb{R}$ t.d. $\alpha\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{T_0T_1}]$. Neka je točka $D \in E^3$ ishodište, tada za neki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x \in p \Longleftrightarrow \overrightarrow{r_x} = \overrightarrow{r_{T_0}} + \alpha\overrightarrow{a}$$

što je **vektorski parametarski oblik jednadbe pravca**.
Neka je opet $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in p$ te $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ vektor koji ima isti smjer kao i pravac p. Tada za točku $X = (x, y, z)$ vrijedi:

$$X = (x, y, z) \in p \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = x_0 + \alpha\overrightarrow{a_x} \\ y = y_0 + \alpha\overrightarrow{a_y} \\ z = z_0 + \alpha\overrightarrow{a_z} \end{array}$$

što nazivamo **parametarska jednadžba pravca**.

Nadalje, vektori $\overrightarrow{r_x} - \overrightarrow{r_{T_0}} = [\overrightarrow{T_0X}]$ i $\overrightarrow{a}$ su kolinearni pa je $(\overrightarrow{r_x} - \overrightarrow{r_{T_0}}) \times \overrightarrow{a} = 0$ odakle imamo:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$$

$$((y-y_0)a_z-(z-z_0)a_y)\overrightarrow{i}+((x-x_0)a_z-(z-z_0)a_x)\overrightarrow{j}+((x-x_0)a_y-(y-y_0)a_x)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}$$

$$\begin{aligned}(y-y_0)a_z-(z-z_0)a_y=0\\(x-x_0)a_z-(z-z_0)a_x=0\\(x-x_0)a_y-(y-y_0)a_x=0\end{aligned}$$

odakle množenjem s $\frac{1}{a_z a_y}$, $\frac{1}{a_z a_x}$ i $\frac{1}{a_y a_x}$ dobijemo

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$$

što nazivamo kanonska ili **normalna jednadžba pravca**.

Primjer 145 *Neka je p pravac koji prolazi kroz točke $T_1=(x_1,y_1,z_1)$ i $T_2=(x_2,y_2,z_2)$. Tada vrijedi:*

1. *pravac ima smjer $\overrightarrow{a}=[\overrightarrow{T_1T_2}]=\overrightarrow{r_{T_1}}-\overrightarrow{r_{T_2}}$.*
2. *vektorski parametarski oblik je: $\overrightarrow{r_x}=\overrightarrow{r_{T_1}}+\alpha(\overrightarrow{r_{T_2}}-\overrightarrow{r_{T_1}})=(1-\alpha)\overrightarrow{r_{T_1}}+\alpha\overrightarrow{r_{T_2}}$ za neki $\alpha\in\mathbb{R}$.*
3. *parametarska jednadžba pravca:*

$$\begin{aligned}x=(1-\alpha)\overrightarrow{x_1}+\alpha\overrightarrow{x_2}\\y=(1-\alpha)\overrightarrow{y_1}+\alpha\overrightarrow{y_2}\\z=(1-\alpha)\overrightarrow{z_1}+\alpha\overrightarrow{z_2}\end{aligned}$$

4. *kanonska jednadžba pravca:*

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_1}=\frac{y-y_0}{y_2-y_1}=\frac{z-z_0}{z_2-z_1}$$

Također, pravac p možemo zadati i kao presjek ravnina $\pi_1\ldots A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ i $\pi_2\ldots A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (za koje je nužno i dovoljno da im vektori normale nisu paralelni tj. $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{B_1}{B_2}$ i $\frac{C_1}{C_2}$ nisu isti brojevi) i tada pišemo

$$p\quad\ldots\quad\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Definicija 146 *Kut između pravaca p_1 i p_2 u E^3 definira se kao manji od dva suplementarna kuta između pravaca q_1 i q_2 za koje vrijedi $q_1\parallel p_1$, $q_2\parallel p_2$ i $q_1\cap q_2\neq\emptyset$. Oznaka je $\angle(p_1,p_2)$.*

Uočimo kako uvijek vrijedi $\angle(p_1,p_2)\leq\frac{\pi}{2}$.

Propozicija 147 *Neka su $p_1\ldots\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r_1}+\alpha\overrightarrow{a}$ gdje je $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$ i $p_2\ldots\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r_2}+\alpha\overrightarrow{b}$ gdje je $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y,b_z)$. Tada je:*

$$cos\angle(p_1,p_2)=\frac{|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Dokaz: $cos\angle(p_1,p_2)=cos\angle(q_1,q_2)=|cos\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})|$.

$\square$

Sada je očito kako su pravci okomiti ako je $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$. Također, pravci su paralelni ako vrijedi $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, tj. ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ paralelni.

Definicija 148 *Kut $\angle(p,\pi)$ između pravca p i ravnine π je kut između pravca p i njegove ortogonalne projekcije na ravninu π. Ako je ortogonalna projekcije pravca p na ravninu π jedna točka tada definiramo $\angle(p,\pi) = \frac{\pi}{2}$.*

Propozicija 149 *Neka je dan pravac $p \ldots \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \alpha\overrightarrow{a}$ gdje je $\overrightarrow{a} = (\alpha,\beta,\gamma)$ i ravnina $\pi \ldots Ax + By + Cz + D = 0$. Tada je:*

$$sin\angle(p,\pi) = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

<u>Dokaz:</u> $sin\angle(p,\pi) = sin(\frac{\pi}{2} - \angle(n,p)) = cos\angle(n,p)$.

$\square$

Ponovno je očito kako su pravac i ravnina okomiti ako je vektor normale te ravnine paralelan s pravcem, a paralelni ako je $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$.

Definicija 150 *Neka je p pravac i $T \in E^3$. Udaljenost točke T od pravca p definira se kao*

$$d(T,p) := inf\{d(T,x) : x \in p\}$$

Propozicija 151 *Neka je $p \ldots \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_{T_1}} + \alpha\overrightarrow{a}$ pravac gdje je $\overrightarrow{a} = (\alpha,\beta,\gamma)$ i $\overrightarrow{r_{T_1}} = (x_1,y_1,z_1)$ i $T_0 = (x_0,y_0,z_0)$. Tada je*

$$d(T_0,p) = \sqrt{\frac{X^2+Y^2+Z^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

gdje su

$$X = \begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} \qquad Z = \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

<u>Dokaz:</u> $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{T_1T_2}]$, *gledajmo* $\triangle T_0T_1T_2$

$$P(\triangle T_0T_1T_2) = \frac{1}{2}|T_1T_2| \cdot d(T_0,P)$$

Također,

$$P(\triangle T_0T_1T_2) = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{T_1T_0}] \times [\overrightarrow{T_1T_2}]| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{r_{T_0}} - \overrightarrow{r_{T_1}}) \times \overrightarrow{a}|$$

$$d(T_0,p) = \frac{|(\overrightarrow{r_{T_0}} - \overrightarrow{r_{T_1}}) \times \overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} \right\|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} =$$

$$\frac{|X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \sqrt{\frac{X^2+Y^2+Z^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

$\square$

Definicija 152 *Neka su p_1 i p_2 pravci. Udaljenost pravaca p_1 i p_2 definira se kao*

$$d(p_1, p_2) := inf\{d(x, y) : x \in p_1, y \in p_2\}$$

Propozicija 153 *Ako su p_1 i p_2 pravci u prostoru onda postoji pravac n t.d. $p_1 \perp n$ i $p_2 \perp n$ te n siječe oba pravca. Kažemo da je n* ***zajednička normala*** *pravaca p_1 i p_2.*

Dokaz: ako se pravci sijeku ili su paralelni onda leže u jednoj ravnini pa je očito kako pravac n postoji te ima isti smjer kao i vektor normale ravnine u kojoj leže pravci. Pa dokažimo sada kako n postoji i kada su pravci mimoilazni. Neka su $p_1 \ldots \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_{T_1}} + \alpha\overrightarrow{a_1}$ i $p_2 \ldots \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_{T_2}} + \alpha\overrightarrow{a_2}$ dva pravca. Pravac n mora biti $p_1 \perp n$ i $p_2 \perp n$ tj. njegov vektor smjera mora biti kolinearan s $\overrightarrow{a} := \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}$ (uočimo da $\overrightarrow{a_1}$ i $\overrightarrow{a_2}$ nisu kolinearni).

- *pravci p_1 i n moraju biti okomiti pa postoji ravnina π_1 u kojoj oba pravca leže kao i točka T_1. Za $T \in \pi_1$ vrijedi $(\overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_{T_1}}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a}) = 0$.*
- *pravci p_2 i n moraju biti okomiti pa postoji ravnina π_2 u kojoj oba pravca leže kao i točka T_2. Za $T \in \pi_2$ vrijedi $(\overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_{T_2}}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a}) = 0$.*

Po konstrukciji je $n \in \pi_1 \cap \pi_2$, a presjek mora postojati jer je $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{a_1}$ i $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{a_2}$.

$\square$

Korolar 154 *Udaljenost mimoilaznih pravaca p_1 i p_2 jednaka je duljini dužine koju ti pravci odsjecaju na zajedničkoj normali.*

Dokaz: neka je n zajednička normala pravaca p_1 i p_2 te neka je $N_1 := n \cap p_1$ i $N_2 := n \cap p_2$. Tvrdimo $d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2)$. Neka su $x_1 \in p_1$ i $x_2 \in p_2$ proizvoljni. Tada je $\overrightarrow{r_{x_1}} = \overrightarrow{r_{N_1}} + \alpha_1\overrightarrow{a_1}$ i $\overrightarrow{r_{x_2}} = \overrightarrow{r_{N_2}} + \alpha_2\overrightarrow{a_2}$ za neke $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Sada je

$$[\overrightarrow{x_1x_2}] = \overrightarrow{r_{x_2}} - \overrightarrow{r_{x_1}} = [\overrightarrow{N_1N_2}] + \alpha_2\overrightarrow{a_2} - \alpha_1\overrightarrow{a_1}$$

pa vrijedi

$$d^2(x_1, x_2) = |[\overrightarrow{x_1x_2}]|^2 = [\overrightarrow{x_1x_2}] \cdot [\overrightarrow{x_1x_2}] = ([\overrightarrow{N_1N_2}] + \alpha_2\overrightarrow{a_2} - \alpha_1\overrightarrow{a_1}) \cdot ([\overrightarrow{N_1N_2}] + \alpha_2\overrightarrow{a_2} - \alpha_1\overrightarrow{a_1}) =$$
$$= [\overrightarrow{N_1N_2}] \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}] + (\alpha_2\overrightarrow{a_2} - \alpha_1\overrightarrow{a_1}) \cdot (\alpha_2\overrightarrow{a_2} - \alpha_1\overrightarrow{a_1}) + 2\alpha_2[\overrightarrow{N_1N_2}] \cdot \overrightarrow{a_2} - 2\alpha_1[\overrightarrow{N_1N_2}] \cdot \overrightarrow{a_1} =$$
$$= d^2(N_1, N_2) + (\alpha_2\overrightarrow{a_2} - \alpha_1\overrightarrow{a_1}) \cdot (\alpha_2\overrightarrow{a_2} - \alpha_1\overrightarrow{a_1}) \geq d^2(N_1, N_2)$$

$\square$

Propozicija 155 *Za $p_1 \ldots \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_{T_1}} + \alpha\overrightarrow{a_1}$, $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{a_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i $p_2 \ldots \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_{T_2}} + \alpha\overrightarrow{a_2}$, $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{a_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ vrijedi*

$$d(p_1, p_2) = \frac{\left|\begin{array}{ccc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{array}\right|}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)^2}}$$

Dokaz: *(uz oznake kao u prethodnom dokazu) neka je* $T \in E^3$ *t.d.* $[\overrightarrow{N_1T}] = [\overrightarrow{T_1T_2}]$. *Sada je* $N_1T_1T_2T$ *paralelogram.* $\triangle N_1N_2T$ *je pravokutan pa imamo:*

$$d(p_1,p_2) = |[\overrightarrow{N_1N_2}]| = |\overrightarrow{N_1T}| \cdot cos\angle(\overrightarrow{N_1T}, \overrightarrow{N_1N_2}) = [\overrightarrow{N_1T}] \cdot \frac{[\overrightarrow{N_1N_2}]}{|[\overrightarrow{N_1N_2}]|} = [\overrightarrow{T_1T_2}] \cdot \frac{[\overrightarrow{N_1N_2}]}{|[\overrightarrow{N_1N_2}]|} =$$

$$= (\overrightarrow{r_{T_2}} - \overrightarrow{r_{T_1}}) \cdot \frac{\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}|} = \frac{(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})}{|\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}|} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|}$$

odakle tvrdnja u nazivniku sada slijedi iz ***Lagrangeovog identiteta*** $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

□

4.4 Analitičko predočenje ploha

Ploha drugog reda ili **kvadrika** je ploha čije točke (x, y, z) zadovoljavaju jednadžbu

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

za neke $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbb{R}$.
Neke plohe drugog reda dane su sljedećim jednadžbama $(a, b, c, p \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$.

1. elipsoid:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
Dodatno, za $a = b = c$ to je sfera radijusa a.

2. jednoplohi hiperboloid:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3. dvoplohi hiperboloid:
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

4. eliptički paraboloid:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

5. hiperbolički paraboloid:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

6. konus drugog reda:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

7. cilindri:

   (a) eliptički cilindar:
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   (b) hiperbolički cilindar:
   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   (c) parabolički cilindar:
   $$y^2 = 2px$$

Literatura

[1] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1 i 2*

[2] K. Horvatić: *Linearna algebra* (za analitičku geometriju)