EM2 – formule - 1. dio

Vektori

Skalarni produkt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$

Vektorski produkt: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ je okomit na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, orijentiran tako da $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$ bude desna baza.

Mješoviti produkt: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

U ortonormiranoj bazi (desnoj): Za $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ i $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \qquad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix} \qquad (\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

Analitička geometrija ravnine i prostora

Udaljenost dvije točke $d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|$

u ravnini: $T(x,y)$, $\overrightarrow{OT}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

u prostoru: $T(x,y,z)$, $\overrightarrow{OT}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Pravac određen točkom T_0 i vektorom smjera $\vec{s}$ $\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\cdot\vec{s}$.

u ravnini, $\vec{s}=(p,q)$: $x=x_0+\lambda p$, $y=y_0+\lambda q$.

u prostoru, $\vec{s}=(p,q,r)$: $x=x_0+\lambda p$, $y=y_0+\lambda q$, $z=z_0+\lambda r$.

kanonski oblik: $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$.

Jednadžba pravca (u ravnini) i ravnine (u prostoru)

opći oblik	$Ax+By+C=0$	$Ax+By+Cz+D=0$
vektor normale	$\vec{n}=(A,B)$	$\vec{n}=(A,B,C)$
udaljenost točke od	$\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	$\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
segmentni oblik	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$
normalni oblik	$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$	$\vec{n_0}\cdot\vec{r_0}=\delta$
udaljenost točke od	$\lvert x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\rvert$	$\lvert\vec{n_0}\cdot\vec{r_0}-\delta\rvert$

Pravac u ravnini – eksplicitni oblik $y=kx+l$, $k=\mathrm{tg}\varphi$

pravac određen točkom i koeficijentom smjera: $y-y_0=k(x-x_0)$

Pravac određen dvjema točkama

u ravnini: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

u prostoru: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Jednadžba ravnine ...

... koja prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i okomita je na $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

... koja prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i razapeta je vektorima $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

... koja prolazi kroz tri točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Pravac u prostoru kao presjek dvije ravnine

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Udaljenost

točke T_0 od pravca koji prolazi točkom T_1 s vektorom smjera $\vec{s}$: $\dfrac{|(\vec{r_0} - \vec{r_1}) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$

dva pravca određena točkama T_1, T_2 i vektorima smjera $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$: $\dfrac{|((\vec{r_2} - \vec{r_1}), \vec{s_1}, \vec{s_2})|}{|\vec{s_1} \times \vec{s_2}|}$

Kut

između dva pravca s vektorima smjerova $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

između dva pravca u eksplicitnom obliku: $\mathrm{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$

između pravca (koef. smjera $\vec{s} = (p, q, r)$) i ravnine (vektor normale $\vec{n} = (A, B, C)$):

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \frac{|pA + qB + rC|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

između dvije ravnine s vektorima normale $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$