

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1.

- (a) Precizno i u skladu s aksiomatskom izgradnjom geometrije ravnine definirajte sljedeće pojmove: rotacija, vektor u euklidskom prostoru, kut između dvaju vektora.
- (b) Neka su dane točke ravnine A_1, A_2, B_1, B_2 , te izometrija f takvi da vrijedi: $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$. Dokažite da tada vrijedi i $f([\overrightarrow{A_1A_2}]) = [\overrightarrow{B_1B_2}]$.
Napomena: Uočite da je jednakost koju trebate dokazati jednakost dvaju skupova, te da za uređene parove točaka (X, Y) uzimamo da je $f((X, Y)) = (f(X), f(Y))$.
- (c) Neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ vektori u euklidskoj ravnini. Odredite nužne i dovoljne uvjete za postojanje izometrije f za koju vrijedi $f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1$ i $f(\vec{a}_2) = \vec{b}_2$. Koliko takvih izometrija postoji? Koliko takvih rotacija postoji?

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite! Možete koristiti činjenice dokazane na predavanjima.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Zadatak 2. Zadani su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Neka je točka D presjek simetrale kuta $\angle BAC$ i stranice \overline{BC} , a točka D' presjek simetrale kuta $\angle B'A'C'$ i stranice $\overline{B'C'}$. Nadalje, neka je E nožište visine iz vrha D trokuta $\triangle ADC$, a E' nožište visine iz vrha D' trokuta $\triangle A'D'C'$. Ako je $|AD| = |A'D'|$, $|DE| = |D'E'|$ i $\angle ABC = \angle A'B'C' = \beta$, dokažite da su trokuti ABC i $A'B'C'$ sukladni. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Zadatak 3. U trokutu $\triangle ABC$ na stranicama \overline{AB} i \overline{AC} dane su redom točke D i E takve da vrijedi $|DB| = \frac{1}{6}|AB|$ i $|EC| = \frac{1}{4}|AC|$. Odredite u kojem omjeru težišnica iz vrha A dijeli dužinu \overline{DE} .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Zadatak 4. Odredite sve pravce p koji prolaze sjecištem pravaca $q \dots \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$ i $r \dots \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{0}$ te zatvaraju kut od 30° sa pravcem q i kut od 45° s pravcem r .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Zadatak 5. Zadan je proizvoljni tetraedar. Sa p_i i \vec{n}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ označimo površine stranica tog tetraedra i pripadne jedinične vanjske normale stranica, respektivno. Dokažite da je

$$\sum_{i=1}^4 p_i \cdot \vec{n}_i = 0$$

Napomena. Jedinična vanjska normala stranice ABC tetraedra $ABCD$ je jedinični vektor okomit na ravninu određenu s ABC kojemu je početak u ravnini određenoj s ABC , a kraj u poluprostoru određenom ravninom ABC koji ne sadrži točku D .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1.

- (a) Precizno i u skladu s aksiomatskom izgradnjom geometrije ravnine definirajte sljedeće pojmove: rotacija, vektor u euklidskom prostoru, kut između dvaju vektora.
- (b) Neka su dane točke ravnine A_1, A_2, B_1, B_2 , te izometrija f takvi da vrijedi: $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$. Dokažite da tada vrijedi i $f([\overrightarrow{A_1A_2}]) = [\overrightarrow{B_1B_2}]$.
Napomena: Uočite da je jednakost koju trebate dokazati jednakost dvaju skupova, te da za uređene parove točaka (X, Y) uzimamo da je $f((X, Y)) = (f(X), f(Y))$.
- (c) Neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ vektori u euklidskoj ravnini. Odredite nužne i dovoljne uvjete za postojanje izometrije f za koju vrijedi $f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1$ i $f(\vec{a}_2) = \vec{b}_2$. Koliko takvih izometrija postoji? Koliko takvih rotacija postoji?

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite! Možete koristiti činjenice dokazane na predavanjima.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Zadatak 2. Zadani su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Neka je točka D presjek simetrale kuta $\angle ABC$ i stranice \overline{AC} , a točka D' presjek simetrale kuta $\angle A'B'C'$ i stranice $\overline{A'C'}$. Nadalje, neka je E nožište visine iz vrha D trokuta $\triangle ABD$, a E' nožište visine iz vrha D' trokuta $\triangle A'B'D'$. Ako je $|BD| = |B'D'|$, $|DE| = |D'E'|$ i $\angle ACB = \angle A'C'B' = \gamma$, dokažite da su trokuti ABC i $A'B'C'$ sukladni. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Zadatak 3. U trokutu $\triangle ABC$ na stranicama \overline{BA} i \overline{BC} dane su redom točke D i E takve da vrijedi $|DA| = \frac{1}{6}|AB|$ i $|EC| = \frac{1}{4}|BC|$. Odredite u kojem omjeru težišnica iz vrha B dijeli dužinu \overline{DE} .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Zadatak 4. Odredite sve pravce r koji prolaze sjecištem pravaca $p \dots \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ i $q \dots \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}$ te zatvaraju kut od 30° sa pravcem p i kut od 45° s pravcem q .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Popravni kolokvij – 6. rujna 2019.

Zadatak 5. Zadan je proizvoljni tetraedar. Sa s_i i \vec{v}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ označimo površine stranica tog tretraedra i pripadne jedinične unutrašnje normale stranica, respektivno. Dokažite da je

$$\sum_{i=1}^4 s_i \cdot \vec{v}_i = 0$$

Napomena. Jedinična unutrašnja normala stranice ABC tetraedra $ABCD$ je jedinični vektor okomit na ravninu određenu s ABC kojemu je početak u ravnini određenoj s ABC , a kraj u poluprostoru određenom ravninom ABC koji sadrži točku D .