

Elementarna matematika 1

4. Elementarna teorija brojeva

1. Neka su $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$. Neka su $f, g, h \subseteq X \times Y$ relacije zadane s

$$f = \{(1, a), (2, d), (3, a), (4, b)\}$$

$$g = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, d)\}$$

$$h = \{(1, b), (2, d), (3, a), (4, c)\}$$

Koje su od tih relacija funkcije, koje injekcije, koje surjekcije i koje bijekcije s domenom X i kodomenom Y ?

2. Dokažite da su sljedeće funkcije bijekcije i odredite im inverzne funkcije:

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 7$

(b) $g: [0, +\infty) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

(c) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (2x - 7y, 3y - x)$

3. Dokažite da je komponiranje funkcija asocijativna operacija. Dokažite da komponiranje funkcija nije komutativna operacija, tj. nađite primjer funkcija $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takvih da $f \circ g \neq g \circ f$.

4. Nađite:

(a) $M(3451, 2842)$

(b) $M(226304, 483327)$

(c) $M(1976072, 4866752)$

5. Dokažite da je $3 \cdot M(15, 240) = M(45, 765)$ bez njihovog direktnog računanja. Uputa: smijete koristiti tvrdnje dokazane u zadacima na vježbama.

6. Jesu li za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $13n + 16$ i broj $9n + 11$ relativno prosti? Svoj odgovor obrazložite.

7. Izračunajte $M(3 \cdot 2^{2010} - 3, 3 \cdot 2^{2007} + 3 \cdot 2^{2010} - 6)$.

8. Neka je $V(a, b)$ najmanji zajednički višekratnik brojeva a i b . Dokažite $M(a, b) \cdot V(a, b) = |ab|$.

9. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $n^3 - n$ djeljiv s 3, a broj $n^5 - n$ djeljiv s 5.

10. Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je $3^{2n-1} - 2^{n-1}$ kvadrat nekog prirodnog broja.

11. Dokažite da $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

12. Dokažite da je $m^7 + n^7$ djeljivo s 49 ako je $m + n$ djeljivo sa 7.

13. Odredite ostatak pri dijeljenju 2^{30} s 13.

14. Odredite ostatak pri dijeljenju $2^{359} + 2^{19} \cdot 15^{18}$ s 31.