Elementarna matematika 1

3. Matematička indukcija

1. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Dokažite da $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ za svaki $n \geq 0$.
3. Dokažite da $7 \mid 37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ za svaki $n \geq 0$.
4. Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$
5. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$
6. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},$$
gdje je n broj drugih korijena na lijevoj strani.
7. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
   (a) $-3 + 3 + 9 + \ldots + (6n - 9) = 3n^2 - 6n$
   (b) $5 + 8 + 11 + \ldots + (3n + 2) = \frac{1}{2}n(3n + 7)$
8. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$2 + 16 + 56 + \ldots + (3n - 2) \cdot 2^n = 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1}.$$
9. Dokažite da je broj $3^{2n+1} + 40n - 67$ djeljiv sa 64 za sve $n \in \mathbb{N}$.
10. Dokažite da vrijedi:
    (a) $3^n > 2^{n+1} + 2n$ za sve prirodne brojeve $n \geq 3$
    (b) $2^n > n^3$ za sve prirodne brojeve $n \geq 10$
11. Dokažite da n pravaca u ravnini, od kojih nijedna dva nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom, dijele ravninu na ukupno $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ dijelova.
12. Neka je x realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Matematičkom indukcijom dokažite da je tada $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodan broj n.

LaTeX-irala: Martina Stojić stojic@math.hr http://web.math.hr/~stojic studeni 2016.