Elementarna matematika 1

2. Skupovi i relacije

1. Neka je $A = [0, 3\rangle \cup \langle 5, 7]$ i $B = [2, 6]$. Odredite $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

2. Neka su A i B skupovi. Ispitajte koje od sljedećih inkluzija vrijede općenito:

   (a) $(A \setminus B) \cup C \subseteq (A \cup C) \setminus B$

   (b) $(A \cup C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$

   (c) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

   (d) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

   Dokažite svoje tvrdnje.

3. Neka su A, B i C podskupovi univerzalnog skupa U. Dokažite da vrijedi sljedeće:

$$(A \cap B) \subseteq C \text{ ako i samo ako } A \subseteq (B^c \cup C).$$

4. Nacrtajte Vennove dijagrame i odredite odnos skupova:

   (a) $(B \backslash C) \backslash (B \backslash A)$ i $(B \cap A) \backslash C$

   (b) $(A \backslash B) \cup ((B \backslash C) \backslash A)$ i $B \triangle (C \cap A)$

   (c) $(A \cap C) \triangle (B \cap C)$ i $C \backslash (A \cap B)$

   (d) $(A \cup C) \triangle (B \cup C)$ i $(A \triangle B) \cup C$

   (e) $(A \triangle B)^c$ i $A^c \triangle B$

   Sve svoje tvrdnje dokažite.

5. Neka su S i T skupovi. Dokažite da su skupovi $\mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$ i $\mathcal{P}(T) \setminus \{\emptyset\}$ disjunktni ako i samo ako su skupovi S i T disjunktni.

6. Vrijedi li općenito $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$? Ako ne, postoje li skupovi za koje to vrijedi? Dokažite svoje tvrdnje.

7. Na skupu $\mathbb{R}$ definirana je binarna relacija $\circ$ sa

$$x \circ y \iff xy = 0.$$

   Ispitajte je li relacija $\circ$ refeksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite.

8. Na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiramo binarnu relaciju ρ sa

$$A \rho B \iff A \setminus B = \emptyset.$$

   Je li relacija ρ refeksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična? Sve svoje tvrdnje dokažite.

9. Ispitajte svojstva relacije $|$ na skupu $\mathbb{N}$, gdje je $|$ definirana sa

$$x \mid y \iff x \text{ dijeli } y.$$

   Ispitajte zatim svojstva relacije $|$ na skupu $\mathbb{Z}$. Po kojim svojstvima se one razlikuju?

10. Je li svaka simetrična i tranzitivna relacija nužno i refleksivna? Dokažite što tvrdite.

11. Neka je τ binarna relacije na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definirana sa

$$(a, b)\, \tau\, (c, d) \Leftrightarrow (a < c \vee (a = c \,\wedge\, b \leq d)), \text{ za } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Je li τ parcijalni uređaj na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Je li τ totalni uređaj na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Svoje tvrdnje obrazložite.

12. Zadana je binarna relacija $\mu = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (d, a), (d, b), (d, d)\}$ na četveročlanom skupu $\{a, b, c, d\}$. Provjerite je li ta relacija refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična.

13. Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadana je binarna relacija

$$\rho = \{(2, 2), (1, 5), (4, 2), (3, 1), (5, 5), (1, 5), (5, 3)\}.$$

Proširite relaciju ρ najmanjim mogućim brojem uređenih parova do relacije $\tilde{\rho}$ tako da $\tilde{\rho}$ bude refleksivna i simetrična relacija. Dokažite zatim da je $\tilde{\rho}$ relacija ekvivalencije i odredite pripadne klase ekvivalencije.

14. Nađite primjer refleksivne i simetrične relacije koja nije relacija ekvivalencije.

15. Neka je S skup. Na $\mathcal{P}(S)$ definiramo relaciju ρ sa $A \rho B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. Je li za svaki skup S relacija ρ refleksivna? Simetrična? Tranzitivna? Antisimetrična?

16.* Neka su ρ_1 i ρ_2 dvije relacije ekvivalencije na skupu S. Za $a \in S$ s $[a]_1$ označimo klasu ekvivalencije od a s obzirom na relaciju ρ_1 te s $[a]_2$ klasu ekvivalencije od a s obzirom na relaciju ρ_2. Pretpostavimo da za svaki $x \in S$ postoji $y \in S$ takav da je $[x]_1 = [y]_2$. Dokažite da je tada $\rho_1 = \rho_2$.