

Elementarna matematika 1

1. Logika

1. Koje su od sljedećih rečenica izjave?

- (a) Voda vrije na 100°C pri atmosferskom tlaku od 101325 Pa.
- (b) Mimosmjerni pravci nemaju zajedničkih točaka.
- (c) Koliko je $2^5 - 6$?
- (d) e je baza prirodnih logaritama.
- (e) Izračunajte $15.3^2 + \sqrt{17}$.
- (f) Jedan radijan iznosi 58° .
- (g) Funkcija f je neparna ako je $f(-x) = f(x)$.
- (h) $x = 7$ je rješenje jednadžbe $x^2 = a$.
- (i) $x = 7$ je rješenje jednadžbe $x^2 = 25$.
- (j) Ostatak pri dijeljenju 5 s 2 je 0.
- (k) $x = a$ je rješenje jednadžbe $x^2 = a^2$.

2. Napišite negacije sljedećih izjava:

- (a) Vrh planine je pod snijegom ako i samo ako je ta planina viša od Matterhorna.
- (b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 = 0)$
- (c) Ako je 32 djeljivo s 8, onda je djeljivo i s 4.
- (d) Sava utječe u Dunav i broj 8 je paran.
- (e) Jarun nije more ili je 2 realan broj.
- (f) Ako je broj djeljiv s 3, onda je djeljiv i s 9.
- (g) $(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 = 3)$
- (h) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt{x} > 0)$
- (i) $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |\frac{1}{n} - a| < \varepsilon)$

3. Provjerite istinitost izjava iz prethodnog zadatka.

4. Sljedeće rečenice zapišite pomoću kvantifikatora i odredite im istinitost:

- (a) Umnožak dvaju parnih brojeva uvijek je djeljiv s 4.
- (b) Postoji realan broj koji je djeljiv svakim prirodnim brojem.
- (c) U skupu realnih brojeva postoji broj koji pomnožen sa svakim realnim brojem daje samog sebe.
- (d) Između svaka dva racionalna broja postoji realan broj.
- (e) Svaki prirodan broj pomnožen s 1 daje samog sebe.
- (f) Nije istina da je 1 djeljiv sa svakim prirodnim brojem.
- (g) Svaki realan broj manji je od svog kuba.

- (h) Broj 0 je manji od svakog kompleksnog broja.
- (i) Za svaki realan broj postoji realan broj dvostruko veće apsolutne vrijednosti od njega.
- (j) Za svaka dva realna broja postoji prirodan broj koji je veći od njihovog umnoška.
- (k) Apsolutna vrijednost zbroja dvaju realnih brojeva manja je ili jednaka od zbroja njihovih apsolutnih vrijednosti.

5. Napišite obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji sljedećih implikacija i odredite istinitost svih zadanih i dobivenih tvrdnji.

- (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^3 = y^3 \Rightarrow x = y)$
- (b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\log_x 10 = y \Rightarrow 10 = x^y)$
- (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$
- (d) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy < 0 \Rightarrow (x < 0 \text{ ili } y < 0))$
- (e) Ako su dva trokuta sukkladna, onda imaju jednake površine i opsege.
- (f) Ako središte trokutu opisane kružnice leži na jednoj od njegovih stranica, onda je trokut pravokutan.
- (g) Ako trokuti nemaju jednake stranice, onda su im površine jednake.

6. Zadana je tvrdnja: "Za svaka dva cijela broja a i d vrijedi: ako je a djeljiv svakim cijelim brojem kojim je djeljiv broj d , onda je a djeljiv brojem d ."

- (a) Zapišite riječima obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.
- (b) Odredite istinitost zadane i dobivenih tvrdnji.
- (c) Zapišite zadanu tvrdnju simbolima.
- (d) Zapišite simbolima njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji.

7. Zapis $(\forall x \in S)A(x)$ pokrata je za formulu $(\forall x)(x \in S \Rightarrow A(x))$. Zapis $(\exists x \in S)B(x)$ pokrata je za formulu $(\exists x)(x \in S \wedge B(x))$. Nađite negacije tih dviju formula i njihove pokrate.

8.* Nađite primjer kojim ćete dokazati da formula $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ nije ekvivalentna formuli $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$.

9.* Nađite primjer kojim ćete dokazati da formula $(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ nije ekvivalentna formuli $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$.

10.* Zapišite formulu $(\forall x)(A \Rightarrow B(x))$ i formulu $A \Rightarrow (\forall x)B(x)$ pomoću logičkih veznika \wedge , \vee , \neg i kvantifikatora. Nađite primjer kojim dokazujete da te dvije formule nisu ekvivalentne ili dokažite da su ekvivalentne.

11.* Zapišite formulu $(\exists x)(A \Rightarrow B(x))$ i formulu $A \Rightarrow (\exists x)B(x)$ pomoću logičkih veznika \wedge , \vee , \neg i kvantifikatora. Nađite primjer kojim dokazujete da te dvije formule nisu ekvivalentne ili dokažite da su ekvivalentne.