

ELEMENTARNA MATEMATIKA – PETA DOMAĆA ZADAĆA

1. Odredite sve $a, b \in \mathbb{R}$ takve da polinom

$$p(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + a + b$$

ima trostruku cjelobrojnu nultočku.

2. Odredite sve polinome p takve da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x - 3)p(x + 1) - (x + 3)p(x - 2) = 3x(x^2 - 9).$$

3. Dokažite da polinom

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$$

ima barem jednu višestruku nultočku.

4. Postoji li polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $p(2) = 4$ i $p(6) = 6$? Svoj odgovor obrazložite.

5. Odredite sve $k \in \mathbb{Z}$ za koje je $\frac{2k^2 - k + 1}{k - 2} \in \mathbb{Z}$.

6. Odredite polinom trećeg stupnja s vodećim koeficijentom 4 čije nultočke x_1, x_2, x_3 zadovoljavaju jednakosti

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 2, \quad \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = 4, \quad \frac{1}{x_1x_2x_3} = 8.$$

7. Riješite sustav:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 6 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} &= 1\end{aligned}$$

8. Riješite sustav:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\x^3 + y^3 + z^3 &= 8\end{aligned}$$

9. Rastavite na parcijalne razlomke:

$$(a) \frac{x^2 - 9x - 6}{x^3 + x^2 - 6x} \quad (b) \frac{x - 5}{x^3 - 8} \quad (c) \frac{1}{x^4 - 1} \quad (d) \frac{3x + 1}{x^2 + 6x + 9}$$