3 Matematička indukcija

Princip matematičke indukcije

Neka je $P(n)$ neka tvrdnja čija istinitost ovisi o prirodnom broju n i neka vrijedi:

(i) Tvrdnja je istinita za $n = 1$, tj. vrijedi $P(1)$.

(ii) Ako je tvrdnja istinita za prirodni broj n, onda je istinita za $n + 1$, tj. vrijedi:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(n+1)).$$

Tada je $P(n)$ istinita za svaki prirodni broj n.

Ovdje se (i) zove *baza indukcije*, a (ii) *korak indukcije*. Princip matematičke indukcije možemo izreći i u jeziku teorije skupova:

Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ i neka vrijedi

(i) $1 \in S$

(ii) Ako je $n \in S$, onda je $n + 1 \in S$, tj. $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in S \Rightarrow n + 1 \in S)$.

Tada je $S = \mathbb{N}$.

Zadatak 1. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zadatak 2. Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

DZ 1. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadatak 3. Dokažite da je broj $3^{2n+2} - 8n - 9$ djeljiv sa 64 za svaki $n \geq 0$.

Napomena. Baza indukcije ne mora biti za $n = 1$, može se početi od bilo kojeg cijelog broja n_0. Tada je zaključak matematičke indukcije da tvrdnja vrijedi za sve cijele brojeve $n \geq n_0$.

DZ 2. Dokažite da $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ za svaki $n \geq 0$.

DZ 3. Dokažite da $7 \mid 37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ za svaki $n \geq 0$.

Zadatak 4. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kune i 5 kuna moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu koja nije manja od 8 kuna.

Zadatak 5. Dokažite da je $2^n > 10n^2$ za sve $n \geq 10$.

Zadatak 6. Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

DZ 4. Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

DZ 5. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Zadatak 7. U ravnini je nacrtano n kružnica (proizvoljnih polumjera, u bilo kojem međusobnom položaju). Dokažite da se tako dobivena "karta" može obojati dvjema bojama tako da su svaka dva susjedna područja obojana različitim bojama.

Zadatak 8. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \cdots + \sqrt{4}}}} < 3,$$

gdje je n broj drugih korijena na lijevoj strani.

DZ 6. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

gdje je n broj drugih korijena na lijevoj strani.

Zadatak 9. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n} \leq \frac{n^2 + 3n}{4}.$$

Zadatak 10. Dokažite da je

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 2017 \cdot 2^{2016} = 2016 \cdot 2^{2017} + 1.$$

Zadatak 11. Ping-pong loptice možemo složiti u pravilnu trostranu piramidu tako da donji sloj složimo u jednakostranični trokut s n loptica duž stranice, idući sloj u trokut s $n-1$ loptica duž stranice, i tako dalje. Dokažite matematičkom indukcijom da je za piramidu od n slojeva potrebno ukupno $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ loptica.

Zadatak 12. Dokažite da za sve pozitivne a, $b \in \mathbb{R}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2^n(a^n + b^n) \geq (a+b)^n.$$

Zadatak 13. Dokažite da $54 \mid 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.