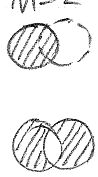
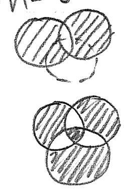
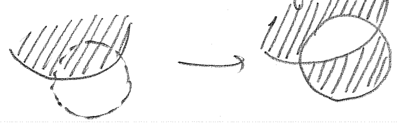
Zadatak 7. U ravnini je nacrtano n kružnica (proizvoljnih polumjera i u proizvoljnom međusobnom položaju). Dokažite da se tako dobivena karta može obojati dvjema bojama tako da su svaka dva susjedna područja obojana različitim bojama.

Ideja: $n=1$  $n=2$  dodamo jednu kružnicu & promijenimo boje unutar nje! $n=3$ 

Dokaz: Matematičkom indukcijom.

Baza $n=1$  OK

Pretp. da svaku kartu nastalu od $n-1$ kružnica možemo obojati na taj način.

Korak Tvrdimo da onda možemo i svaku kartu od n kružnica.
Neka je dana neka proizvoljna karta od n kružnica. Uklonimo jednu kružnicu. Kartu od preostalih $n-1$ kružnica obojimo (to možemo po pretp. indukcije). Zatim vratimo uklonjenu kružnicu i unutar nje promijenimo boje.  Time smo dobili dobro bojanje n-karte.

Zaključak
Po principu mat. indukcije svaka (od kružnica) takva karta može obojati na taj način.

Zadatak 9. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \leq \frac{n^2+3n}{4}.$$

Ovo je $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$

Zaključak: Tvrdnja vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Mat. indukcijom

Baza: $n=1$ $\quad 1 \overset{?}{\leq} \frac{1^2+3\cdot 1}{4} = 1$ OK

Pretp. da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. da vrijedi
$1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k} \leq \frac{k^2+3k}{4}$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Korak Dokazat ćemo da tada vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi
$1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k+1} \leq \frac{(k+1)^2+3(k+1)}{4}$.

Ovo je $\frac{k^2+3k}{4} + \frac{2k+4}{4}$

lijeva strana $= \underbrace{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k}}+\sqrt{k+1} \overset{PP}{\leq} \frac{k^2+3k}{4}+\sqrt{k+1} \leq$

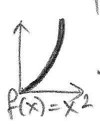
KAD BISMO DOKAZALI OVU NEJEDNAKOST KORAK BI BIO GOTOV.

Pokušajmo ju dokazati.

$\sqrt{k+1} \leq \frac{k+2}{2} \overset{\text{za } k\geq 0}{\Longleftrightarrow} k+1 \leq \frac{(k+2)^2}{4}$

$\Updownarrow$

$4k+4 \leq k^2+4k+4 \iff 0 \leq k^2$ UVIJEK VRIJEDI. OK.



Zadatak 10. Dokažite da je

$$1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \ldots + 2010\cdot 2^{2009} = 2009\cdot 2^{2010} + 1.$$

Dokazat ćemo općenitiju tvrdnju:

$$1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^{n-1} = (n-1)\cdot 2^n + 1$$

Matematičkom indukcijom.

Baza: Pokušamo za $n=1$ $\quad 1\cdot 2^0 = 0\cdot 2^1 + 1$ ok

Pretp. da vrijedi $1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + \ldots + k\cdot 2^{k-1} = (k-1)\cdot 2^k + 1$ za neki $k\in\mathbb{N}$.

Korak: Dokazat ćemo da tada vrijedi i

$$1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + \ldots + (k+1)\cdot 2^k = k\cdot 2^{k+1} + 1.$$

lijeva strana $= \underbrace{1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + \ldots + k\cdot 2^{k-1}}_{\text{po pretp. indukcije jednako } (k-1)2^k+1} + (k+1)\cdot 2^k \overset{PP}{=} (k-1)\cdot 2^k + 1 + (k+1)\cdot 2^k =$

$= k\cdot 2^k - \cancel{2^k} + 1 + k\cdot 2^k + \cancel{2^k} = 2\cdot k\cdot 2^k + 1 = k\cdot 2^{k+1} + 1$ ok

Zaključak: Tvrdnja vrijedi za svaki $n\in\mathbb{N}$. Posebno, vrijedi i za $n=2010$.

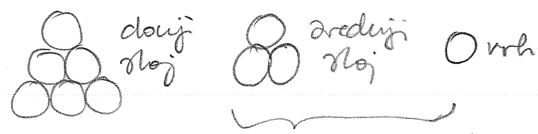
Zadatak 11. Ping-pong loptice možemo složiti u pravilnu trostranu piramidu tako da donji sloj složimo u jednakostranični trokut s n loptica duž stranice, sljedeći sloj u trokut s $n-1$ loptica duž stranice, itd. Dokažite matematičkom indukcijom da je za piramidu od n slojeva potrebno $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ loptica.

Dokaz: Matematičkom indukcijom.

Označimo s $P(n)$ broj loptica potrebnih za piramidu s n slojeva.

Trebamo dokazati TVRDNJA: $\boxed{P(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$

npr. $n=3$



Baza: $n=1$ jednoslojna piramida

ima samo jednu lopticu, tj. $P(1)=1$.

$1 \overset{?}{=} \frac{1}{6}1\cdot 2\cdot 3$ DA! OK

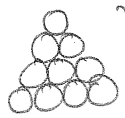
Pretp. da k-slojna piramida ima $\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ loptica, tj.

$$P(k) = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) \text{ za neki } k\in\mathbb{N}.$$

Korak: Dokazat ćemo da tada za $(k+1)$-slojnu piramidu

$$P(k+1) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3).$$

$P(k+1) =$



$+ \; P(k)$ (k-slojna piramida) $= \underbrace{(1+2+\ldots+k+(k+1))}_{\text{ovo je GAUSS } \frac{(k+1)(k+2)}{2}} + P(k) \overset{PP}{=}$

ovo je $\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ po pretp. ind.

$\overset{PP}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) =$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{6}(3+k) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$ Q.E.D.

Zaključak: Tvrdnja vrijedi $\forall n\in\mathbb{N}$.

Zadatak 13. Dokažite da 54 dijeli $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Matematičkom indukcijom.

Baza $n=1$ Da li 54 dijeli $2^{2+1} - 9 + 3\cdot 1 - 2 = 8 - 9 + 3 - 2 = 0$?

DA! $54 \mid 0$ OK

Prep. da $54 \mid 2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Dakle, $2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2 = 54a$ za neki $a \in \mathbb{Z}$

Korak Dokazat ćemo da tada

$$54 \mid 2^{2(k+1)+1} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2.$$

$$2^{2k+1} \cdot 2^2 - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2 \overset{PP}{=}$$

po pretpostavci indukcije $2^{2k+1} = 54a + 9k^2 - 3k + 2$ za neki $a \in \mathbb{Z}$.

! HOĆEMO SE RIJEŠITI SITUACIJE DA IMAMO I EKSPONENCIJALNI I POLINOMIJALNI IZRAZ

VIDITE, SAD IMAMO SAMO POLINOMIJALNI

$$\overset{PP}{=} 4\cdot(54a + 9k^2 - 3k + 2) - 9(k^2 + 2k + 1) + 3k + 3 - 2 =$$

$$= 54\cdot 4a + 3\cdot 9k^2 - 27k = 54\cdot 4a + 27\cdot(k-1)k$$

djeljivo s 54

djeljivo s 2 (jer su dva uzastopna cijela broja)

Zaključak: Tvrdnja vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 14. Dokažite da je $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Definirajmo induktivno niz:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \end{cases}$$

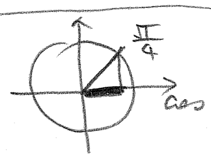
TO ĆEMO U BAZI UPOTRIJEBITI

A OVO U KORAKU INDUKCIJE

Trebamo dokazati TVRDNJA: $\boxed{a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$.

Dokaz: Matematičkom indukcijom.

Baza: $n=1$ $\sqrt{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, tj. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ OK



Prep. da $a_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Korak. Dokazat ćemo da tada vrijedi i

$$a_{k+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right).$$

Imamo $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \overset{PP}{=} \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)} = 2\cdot\sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{2}} =$

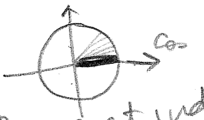
ovo je $\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$

$$= 2\cdot\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)\right| = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$ TO JE TO!

PAZITE! $\sqrt{x^2} = |x|$ MODUL!

jer je za male kutove α $\cos\alpha \geq 0$

Upotrijebili smo formulu $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$



Zaključak: Po principu mat. indukcije tvrdnja vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$.