Relacije

Za svaku od sljedećih relacija na $\mathbb{R}$ odredite njena svojstva:

		S	A	T	R	I
a)	$x \diamond y \overset{def.}{\iff} x\cdot y = 0$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
b)	$x \,\rho\, y \overset{def.}{\iff} x\cdot y \neq 0$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
c)	$x \boxtimes y \overset{def.}{\iff} \lvert x-y\rvert < 5$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
d)	$x \odot y \overset{def.}{\iff} x^2+y^2=1$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
e)	$x \,\omega\, y \overset{def.}{\iff} x^2+y^2=0$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

Mi ćemo ispitati svojstva relacije $\diamond$ na $\mathbb{R}$.

$$x \diamond y \overset{def.}{\iff} x\cdot y = 0$$

(za $x,y \in \mathbb{R}$) Kažemo da je x u relaciji $\diamond$ s y ako vrijedi $x\cdot y=0$.

npr. $0 \diamond 1$, $2 \diamond 0$, $1 \not\diamond 2$.

Svojstva:

Refleksivnost Pitamo se: Da li $(\forall x \in \mathbb{R})(x \diamond x)$? tj.

Pogledajmo definiciju od $\diamond$.

Da li $(\forall x \in \mathbb{R})(x\cdot x = 0)$?

Ne. Naprimjer, za $x=1$ imamo $1\cdot 1 \neq 0$.

(Dokazali smo da vrijedi negacija, tj. $(\exists x \in \mathbb{R})(x\cdot x \neq 0)$.)

Dakle, relacija $\diamond$ nije refleksivna.

Simetričnost Pitamo se: Da li $(\forall x,y \in \mathbb{R})(x \diamond y \Longrightarrow y \diamond x)$? tj.

Da li $(\forall x,y \in \mathbb{R})(x\cdot y = 0 \Longrightarrow y\cdot x = 0)$?

Da! Dakle, relacija $\diamond$ je simetrična.

Tranzitivnost Pitamo se: Da li $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})((x \diamond y \text{ i } y \diamond z) \Longrightarrow x \diamond z)$? tj.

Da li $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})((x\cdot y = 0 \text{ i } y\cdot z = 0) \Longrightarrow x\cdot z = 0)$?

(Pitamo se da li za sve x,y,z za koje vrijedi da je $xy=0$ i $yz=0$ mora vrijediti i $xz=0$.)

Ne mora! Naprimjer, za $x=1, y=0, z=1$ imamo $x\cdot y=0$ i $y\cdot z=0$ ali <u>ne</u> vrijedi $x\cdot z=0$.

(Što smo upravo napravili? Pronašli smo <u>protuprimjer</u>, njime smo opovrgnuli univerzalnu tvrdnju, tj. dokazali smo njenu negaciju: $(\exists x,y,z \in \mathbb{R})(x\cdot y=0 \text{ i } y\cdot z=0 \text{ i } x\cdot z \neq 0)$)

Dakle, relacija $\diamond$ nije tranzitivna.

Antisimetričnost: Pitamo se: Da li $(\forall x,y\in\mathbb{R})((x\Diamond y \text{ i } y\Diamond x)\Longrightarrow x=y)$? tj.

Da li $(\forall x,y\in\mathbb{R})((x\cdot y=0 \text{ i } y\cdot x=0)\Longrightarrow x=y)$?

Ne. Naprimjer, za $x=0$ i $y=1$ vrijedi

$x\cdot y=0$ i $y\cdot x=0$ ali ne vrijedi $x=y$.

(Dokazali smo opet negaciju:

$(\exists x,y\in\mathbb{R})(x\cdot y=0 \text{ i } y\cdot x=0 \text{ i } x\neq y)$)

Dakle, relacija $\Diamond$ nije antisimetrična.

Irefleksivnost: Pitamo se: Da li $(\forall x\in\mathbb{R})(x \not\Diamond x)$? tj.

Da li $(\forall x\in\mathbb{R})(x\cdot x\neq 0)$?

Ne. Naprimjer, za $x=0$ ne vrijedi $x\cdot x\neq 0$.

(Opet smo dokazali negaciju univerzalne tvrdnje tako da smo pronašli protuprimjer. Dokazali smo:

$(\exists x\in\mathbb{R})(x\cdot x=0)$. $\leftarrow$ To je $x=0$.)

Dakle, relacija nije irefleksivna.

Napomena: Je li relacija $<$ na $\mathbb{R}$ antisimetrična?

Da li $(\forall x,y\in\mathbb{R})((\underline{x<y \text{ i } y<x})\Longrightarrow x=y)$? $\swarrow$ Je li ovo $\top$ ili $\bot$?

Ako nismo sigurni je li ovo $\top$ ili $\bot$, pokušajmo s negacijom. Da li vrijedi negacija:

$(\exists x,y\in\mathbb{R})(\underbrace{x<y \text{ i } y<x}_{\text{nemoguće je da postoje takvi } x \text{ i } y} \text{ i } x\neq y)$? Ne. $\bot$

Dakle, naša tvrdnja je $\top$. Relacija $<$ jest antisimetrična.

(Univerzalna tvrdnja po praznom skupu $(\forall x\in\emptyset)P(x)$ je uvijek $\top$.)